Výroková funkcia, kvantifikované výroky

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Začneme trochu odľahčene. Niektoré výroky (o chvíľu budeme o nich hovoriť podrobnejšie) obsahujú slová ako „každý“, „všetci“, „existuje“, ...

Ž: *S tým som sa už stretol. To sú kvantifikátory.*

U: Správne. Môžeme ich vo výrokoch ľubovoľne zamieňať?

Ž: *To teda nie. Kvantifikátor „existuje“ znamená niečo úplne iné ako kvantifikátory „každý“, „všetci“.*

U: Máš pravdu. Výrok:

Každý žiak triedy dostal z písomky známku 1.

znamená niečo úplne iné ako výrok:

Existuje žiak triedy, ktorý dostal z písomky známku 1.

Ž: *To je teda riadny rozdiel.*

U: No ani slová „každý“ a „všetci“ nemôžeme ľubovoľne zamieňať.

Ž: *Hm, ... Naozaj? Veď výroky:*

Každý *žiak triedy dostal z písomky známku* 1.

Všetci *žiaci triedy dostali z písomky známku* 1.

znamenajú to isté.

U: S tým súhlasím. Skúsme sa však pozrieť na nasledujúce výroky:

Každý človek sa zmestí do tejto skrine.

Všetci ľudia sa zmestia do tejto skrine.

Tiež znamenajú to isté?

Ž: *To teda nie!!! Je rozdiel, či do skrine vojde každý človek zvlášť alebo všetci naraz.*

U: Opäť sa ukázalo, aká je hovorová reč pestrá – takou aj má byť. No tiež sa ukázalo, aká je dôležitá presná formulácia a argumentácia. Symbolika výrokovej logiky by nám mala k tomu dopomôcť.

U: Začnime pojmom ***výroková funkcia***.

Ž: *Znie to dosť odstrašujúco.*

U: Žiaden strach. Pôjdeme na to pekne pomaly. Uvidíš, že to nie je nič hrozné. Už máme predstavu, čo je to ***výrok***.

Ž: *Je to oznamovacia veta, ktorá je buď pravdivá alebo nepravdivá.*

U: OK. Tak sa pozrime na nasledujúce oznamovacie vety. Skús rozhodnúť, či sú, alebo nie sú výrokmi.

$$A : 2 + 2 = 3.$$

$$B : x < 4.$$

$$C : \text{Mačka je čierna.}$$

Ž: *A je výrok, dokonca nepravdivý: $2 + 2 = 4$, nie 3. B je tiež oznamovacia veta, teda ide o výrok.*

U: Nie tak rýchlo. Skús určiť pravdivostnú hodnotu tvrdenia.

$$B : x < 4.$$

Ž: *Záleží to od toho, čo dosadím za premennú x.*

Ak sa $x = 2$, ide o pravdivý výrok, lebo naozaj platí, že $2 < 4$.

No ak sa $x = 7$, výrok $7 < 2$ je nepravdivý.

U: Takže nemôže ísť o výrok, lebo nevieme určiť, či je tvrdenie B pravdivé alebo nepravdivé. Vieme to rozhodnúť vtedy, ak za premennú x dosadíme konkrétne číslo. Čiže

pravdivostná hodnota tvrdenia B ***závisí od premennej*** x.

Poznáš nejaký matematický pojem, ktorý popisuje ***závislosť***?

Ž: *Hm, . . . žeby funkcia?*

U: Presne tak. Keďže naša ***závislosť súvisí s výrokmi***, budeme hovoriť, že B je ***výroková funkcia***. V niektorej literatúre sa môžeme stretnúť aj s pojmom ***výroková forma***, či ***výroková formula***.

Ž: *To je niečo iné?*

U: Výroková funkcia, výroková forma aj výroková formula znamenajú to isté. Tu je presná definícia:
výrokovou funkciou $V(x)$ ***s premennou*** x ***nazývame takú oznamovaciu vetu, ktorá obsahuje premennú*** x***, sama nie je výrokom, no stane sa ním vtedy, keď za premennú*** x ***dosadíme konkrétny objekt z vopred danej množiny***.

Ž: *Teda v našom príklade tvrdenie*

$$x < 4$$

nie je výrokom. No ak za premennú x dosadím konkrétne čísla, dostanem výroky, napríklad aj tieto:

$$1 < 4,$$

$$4 < 4,$$

$$100 < 4.$$

U: Pochopil si to veľmi dobre. Pokračujme ďalej. Je veta

$$C: \text{Mačka je čierna.}$$

výrokom?

Ž: *Áno. To je štandardný príklad výroku.*

U: Tak povedz, či je pravdivý alebo nie.

Ž: *Neviem, o akú mačku ide. Preto nemôžem vedieť, či je naozaj čierna.*

U: Naša ***mačka je*** vlastne ***premenná***. O pravdivosti vety C vieme rozhodnúť až vtedy, ak si za túto premennú dosadíme konkrétnu mačku.

Ž: *Takže veta C je tiež výrokovou funkciou?*

U: Áno. Niekedy však môže byť aj výrokom. A to vtedy, ak je z kontextu jasné, o akej mačke je reč. Vieš vymyslieť taký príklad?

Ž: *Ak sedím napríklad v aute, cez cestu mi prebehne mačka a ja poviem:*

Mačka je čierna.

Vtedy je jasné o akej mačke hovorím.

U: Výborne. V tomto prípade je veta

Mačka je čierna.

naozaj výrokom.

U: Výroková funkcia sa môže stať výrokom ešte iným spôsobom, ako dosadením konkretného objektu za príslušnú premennú.

Ž: *Neviem si predstaviť ako.*

U: Môžeme pred ňu dať niektoré zo slovíčok: ***každý***, ***existuje***.

Ž: *Tie sme používali na začiatku.*

U: Áno, volajú sa ***kvantifikátory***.

Ž: *Niečo nám kvantifikujú?*

U: Áno. Ukážme si to na príklade výrokovej funkcie

$$C: \text{Mačka je čierna.}$$

Ak dáme pred ňu kvantifikátor „každý“, dostaneme:

Každá mačka je čierna.

Tým sme vlastne určili počet čiernych mačiek. Nevieme ho vyjadriť číslom, no tvrdíme, že sú ***všetky*** čierne. Vieš určiť pravdivosť tejto vety?

Ž: *Určite je nepravdivá. Moja stará mama má sivú mačku, preto nemôže byť každá mačka čierna.*

U: Máme oznamovaciu vetu, ktorej pravdivosť vieme určiť. ***Je*** teda ***výrokom***. Teraz dajme pred výrokovú funkciu C kvantifikátor „existuje“.

Ž: *Dostaneme:*

Existuje *mačka, ktorá je čierna.*

U: Tvrdíme, že ***aspoň jedna*** zo všetkých mačiek je čierna. Pravdivostná hodnota tejto vety sa jednoznačne dá určiť, preto ide o výrok.

Ž: *Je to pravdivý výrok. Veď naša suseda má čiernu mačku.*

U: Zhrňme to. Poznáme dva typy ***kvantifikátorov***:

- ***všeobecný*** – má značku: $\forall$, číta sa: ***každý***, ***pre každé***;
- ***existenčný*** – má značku: $\exists$, číta sa: ***existuje*** (aspoň jeden).

Ak dáme kvantifikátor pred výrokovú funkciu $V(x)$, dostaneme ***kvantifikovaný výrok***. Máme dve možnosti:

- kvantifikovaný výrok so ***všeobecným*** kvantifikátorom:

  $$\boxed{\forall x : V(x)}$$

  čítame: pre každé x platí $V(x)$;

- kvantifikovaný výrok s ***existenčným*** kvantifikátorom:

  $$\boxed{\exists x : V(x)}$$

  čítame: existuje x, pre ktoré platí $V(x)$.

Ž: *Značky symbolov $\forall$ a $\exists$ sú celkom zaujímavé.*

U: Majú svoju históriu. Sú to prevrátené písmená A, E.

Ž: *Naozaj...*

U: Ide o začiatočné písmená slov „***A***LL“, „***E***XIST“.

Ž: *Viem, čo znamenajú: „všetko“ a „existovať“.*

U: Presne tak.

$\forall \leftrightarrow$ ***A*** $\leftrightarrow$ ***A***ll $\leftrightarrow$ všetko

$\exists \leftrightarrow$ ***E*** $\leftrightarrow$ ***E***xist $\leftrightarrow$ existovať

U: Pozrime sa na nasledujúcu vetu:

D : Ak je prirodzené číslo n deliteľné štyrmi, tak je párne.

Ž: *Je to výrok v tvare implikácie. Dokonca je tento výrok pravdivý.* **Každé** *prirodzené číslo deliteľné číslom 4 musí byť párne.*

U: Prečo si použil pri zdôvodňovaní pravdivosti výroku D slovíčko „každé“? Je spomenuté vo formulácii vety

D : Ak je prirodzené číslo n deliteľné štyrmi, tak je párne.,

že ide o ***každé*** prirodzené číslo?

Ž: *Nie, nie je. Akosi podvedome som tak uvažoval.*

U: Uvažoval si správne. Keď sa však nad tou vetou zamyslíme, zistíme, že by malo ísť o výrokovú funkciu s premennou n.

Ž: *Vlastne áno. Nehovorí sa v nej o konkrétnom prirodzenom čísle, ale o ľubovoľnom prirodzenom čísle n.*

U: No napriek tomu nejde o výrokovú funkciu. V danom výroku máme ***zamlčaný všeobecný kvantifikátor***. Celé znenie kvantifikovaného výroku D by malo byť nasledovné:

D : Pre ***každé*** prirodzené číslo n platí:

Ak je prirodzené číslo n deliteľné štyrmi, tak je párne.

Ž: *Môže sa zamlčať aj existenčný kvantifikátor?*

U: To by bol zmätok. Ak je nejaký kvantifikátor zamlčaný, tak len všeobecný.

U: Niekedy môžeme použiť v jednom výroku aj viac kvantifikátorov. Napríklad v nasledujúcom výroku máme všeobecný aj existenčný kvantifikátor. Výrok E znie:

Ku každému celému číslu a ***existuje celé číslo*** b také, že platí: $a + b = 0$.

Symbolicky je zapísaný v rámčeku:

$$\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z} : a + b = 0$$

Ž: *Vyzerá to dosť zložito.*

U: Chce to trochu cviku a pôjde to. Voľne prerozprávané: výrok E hovorí o tom, že ku každému celému číslu existuje číslo opačné.

Ž: *Ak si dobre pamätám, čísla navzájom opačné sa líšia len znamienkom.*

Opačné číslo napríklad k číslu 3 *je číslo* -3.

Opačné číslo k číslu -7 *je zase číslo* 7.

U: Presne tak. Inými slovami: súčet pôvodného čísla a čísla k nemu opačného je nula, v tvojich príkladoch:

$$3 + (-3) = 0,$$

$$-7 + 7 = 0.$$

Ž: *Už mi je to jasné. Výrok E **je pravdivý**.*

U: Veľmi dôležité je aj ***poradie kvantifikátorov***. Nemôžeme ich ľubovoľne zamieňať.

Ž: *Prečo?*

U: Zoberme si výrok F, ktorý bude mať oproti výroku E len zamenené kvantifikátory. Symbolicky je výrok F zapísaný v rámčeku:

$$\boxed{\exists b \in \mathbb{Z}\ \forall a \in \mathbb{Z} : a + b = 0}$$

Aké bude jeho slovné znenie?

Ž: *Výrok F znie:*

Existuje také celé číslo b, *že* **pre každé celé číslo** a *platí:* $a + b = 0$.

U: A existuje také číslo b?

Ž: *Pre každé celé číslo a je také číslo b iné.*

U: To áno. Ale výrok F hovorí, že by malo existovať jedno také celé číslo b pre všetky celé čísla a.

Ž: *No, to neexistuje.*

U: Teda výrok F ***je nepravdivý***. Výroky E a F hovoria rôzne veci.

Ž: *Myslím, že rozumiem. No nie je to ľahké.*

U: Uvedieme si ešte jeden príklad so zamenenými kvantifikátormi. Verím, že po ňom už nebudeš mať žiadne pochybnosti. Výrok G znie:

Pre každého žiaka triedy ***existuje cukrík***, ktorý cmúľa.

Ak zameníme poradie kvantifikátorov, dostaneme výrok H:

Existuje cukrík, ktorý cmúľa ***každý žiaka*** triedy.

Ž: *OK. Netreba to viac komentovať, už mi je to úplne jasné.*

U: Ostáva nám ukázať, ako sa ***negujú kvantifikované výroky***. Najprv určme ***negáciu*** kvantifikovaného výroku so ***všeobecným kvantifikátorom***. Začnime príkladom. Neguj náš známy výrok:

Každá mačka je čierna.

Ž: *Negácia má mať opačnú pravdivostnú hodnotu...*

U: ...a má zahŕňať všetky ostatné možnosti.

Ž: *Potom negácia*

Nie je pravda, že *každá mačka je čierna.*

znamená to isté, čo výrok:

Aspoň jedna *mačka* **nie je** *čierna.*

U: Veľmi dobre. Môžeme to preformulovať aj pomocou existenčného kvantifikátora:

Existuje mačka, ktorá ***nie je*** čierna.

Ž: *Takže všeobecný kvantifikátor sa zmenil na existenčný...*

U: ...a za ním nachádzajúcu sa výrokovú funkciu sme znegovali. Zovšeobecnime to:

Negácia výroku $\forall x : V(x)$ je výrok $\exists x : \neg V(x)$.

Ž: *Ako to bude s negáciou výroku s* **existenčným kvantifikátorom***? Tipujem, že analogicky: existenčný kvantifikátor zameníme za všeobecný...*

U: ...a výrokovú funkciu za ním znegujeme. Teda

Negácia výroku $\exists x : V(x)$ je výrok $\forall x : \neg V(x)$.

Ž: *Môžeme si to ukázať na konkrétnom príklade?*

U: Samozrejme. Negujme nasledujúci kvantifikovaný výrok:

Existuje nesmrteľný človek.

Ž: *Veď predsa*

každý *človek* **je smrteľný**.

U: Presne to je negácia pôvodného výroku.

Ž: *Naviac teda môžem povedať, že pôvodný výrok je nepravdivý a jeho negácia je pravdivá.*

U: Celkové zhrnutie si ešte raz pozri v tabuľke.

Negácia výroku $\forall x : V(x)$ je výrok $\exists x : \neg V(x)$.

Negácia výroku $\exists x : V(x)$ je výrok $\forall x : \neg V(x)$.

Príklad 1: *Zistite, ktoré z nasledujúcich viet sú výrokové funkcie:*

A: $4 \cdot 5 < 23$

B: $x \cdot 3 < 33$

C: *Hlavné mesto Českej republiky je Praha.*

D: *Škola má* 510 *žiakov.*

E: $\exists x \in \mathbb{R} : x \cdot 3 < 33$

F: *Ak je prirodzené číslo* n *deliteľné číslom* 10*, tak je deliteľné aj číslom* 5*.*

Ž: *Veta*

$$A : 4 \cdot 5 < 23$$

nie je výroková funkcia, *je to výrok, dokonca pravdivý. Totiž* $4 \cdot 5 = 20$*, a to je menšie ako* 23*.*

U: Správne. Pokračujme vetou

$$B : x \cdot 3 < 33.$$

Ž: *Jej pravdivosť, respektíve nepravdivosť závisí od toho, aké číslo dosadím za premennú* x*. Čiže* **ide o výrokovú funkciu** *s premennou* x*.*

U: Správne. Ak za premennú x dosadíme napríklad číslo 10, dostaneme pravdivý výrok

$$10 \cdot 3 < 33.$$

No napríklad pre $x = 20$, dostaneme nepravdivý výrok

$$20 \cdot 3 < 33.$$

Pokračujme vetou

$$C : \text{Hlavné mesto Českej republiky je Praha.}$$

Ž: *To je jasný výrok. Pravdivý. Preto to* **nie je výroková funkcia**.

U: OK. Ako to bude s vetou:

$$D : \text{Škola má 510 žiakov. ?}$$

Ž: *Tiež je to výrok.*

U: Trochu sa pri tom zastavme. Aká je jeho pravdivostná hodnota?

Ž: *To neviem. Neviem, koľko žiakov má naša škola.*

U: To sa dá jednoducho zistiť. Je ich 504.

Ž: *Takže je to nepravdivý výrok.*

U: OK. Si si istý, že veta D hovorí práve o ***našej*** škole?

Ž: *Hm. . . vlastne nie. Tak ako to je?*

U: Závisí to od uhla pohľadu. ***Ak je z kontextu jasné, o akej škole je reč, ide o výrok.*** Vtedy totiž vieme jednoznačne určiť jeho pravdivostnú hodnotu. No ***ak z kontextu nevieme, o akej škole veta*** D ***hovorí, ide o výrokovú funkciu***.

Ž: *A čo jej premenná?*

U: Ňou je škola.

Ž: *Takto som o tom nikdy neuvažoval. Ale znie to rozumne.*

U: Čím sa líši veta

$$E : \exists x \in \mathbb{R} : x \cdot 3 < 33$$

od vety

$$B : x \cdot 3 < 33?$$

Ž: *Existenčným kvantifikátorom.*

U: Je teda veta E výroková funkcia?

Ž: *Nie,* **nie je**. *Ak pred výrokovú funkciu dám kvantifikátor, stane sa z nej výrok.*

U: Výborne. Vedel by si určiť aj jeho pravdivostnú hodnotu?

Ž: *Je pravdivý. Takým reálnym číslom x je napríklad číslo* 1.

U: Správne. Teda

existuje reálne číslo $x = 1$ také, že platí: $1 \cdot 3 < 33$.

U: Ostáva nám posledná veta

F : Ak je prirodzené číslo n deliteľné číslom 10, tak je deliteľné aj číslom 5.

Ž: *Vystupuje tu premenná n, preto ide o výrokovú funkciu.*

U: Ak sa vo vete nachádza premenná, neznamená to nutne, že musí ísť o výrokovú funkciu. Môže to byť este kvantifikovaný výrok, ako napríklad veta E.

Ž: *Jasné. No tu sa žiaden kvantifikátor nenachádza.*

U: Nie je tu síce napísaný, no akosi podvedome chápeme, že veta F hovorí o všetkých prirodzených číslach. Nevieš určiť jej pravdivostnú hodnotu?

Ž: *Viem, je pravdivá. Číslo deliteľné desiatimi musí byť deliteľné aj piatimi.*

U: Ďalší dôvod na to, aby sme túto vetu chápali ako výrok, ***nie ako výrokovú funkciu***. Má však ***zamlčaný všeobecný kvantifikátor***. Celé znenie je nasledovné:

Pre každé prirodzené číslo n platí:

ak je číslo n deliteľné číslom 10, tak je deliteľné aj číslom 5.

Úloha 1: *Zistite, ktoré z nasledujúcich viet sú výrokové funkcie:*

A: $4 \cdot 5 = 23$*;*

B: $x \cdot 3 = 33$*;*

C: Autorom knihy „Bratia Karamazovci“ je Dostojevský.

D: V triede je 10 *dievčat.*

E: Ak je prvočíslo p väčšie ako 10*, tak je nepárne.*

Výsledok*: B, D*

Príklad 2: *Majme výrokovú funkciu*

$$V(x) : x^2 > 0.$$

Vytvorte z nej kvantifikovaný výrok tak, že pred ňu pridáte

a) existenčný kvantifikátor;

b) všeobecný kvantifikátor.

Určte pravdivostné hodnoty oboch kvantifikovaných výrokov.

Ž: *To nie je ťažké.*

U: Súhlasím. Začnime úlohou ***a)***.

Ž: *Pridaním existenčného kvantifikátora pred výrokovú funkciu $x^2 > 0$ dostanem výrok:*

$$\exists x : x^2 > 0.$$

U: Ešte by sa patrilo povedať, z akej množiny môžeme číslo x vybrať. Ak to nie je napísané v zadaní, máme na mysli množinu $\mathbb{R}$, teda množinu reálnych čísel.

Ž: *OK. Teda daný kvantifikovaný výrok znie:*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$$

U: Určme jeho pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Samozrejme, že existuje také reálne číslo, ktorého druhá mocnina je kladná. Je to napríklad číslo 5. Platí, že*

$$5^2 = 25 > 0.$$

U: Čiže daný výrok ***je pravdivý***. Pokračujme úlohou ***b)***. Zameňme existenčný kvantifikátor za všeobecný.

Ž: *Dostanem:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$$

U: Tento výrok hovorí, že

druhá mocnina ***ľubovoľného*** reálneho čísla je vždy kladná.

Platí to?

Ž: *Kladné číslo na druhú je samozrejme kladné. Aj záporné číslo na druhú je kladné, napríklad:*

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25 > 0.$$

Preto tento výrok je pravdivý.

U: Neunáhli sa. Ukázal si, že $x^2 > 0$ pre ľubovoľné kladné aj záporné reálne číslo x. Iné reálne čísla neexistujú?

Ž: *Hm... zabudol som na nulu.*

U: Presne tak. Aj jej druhá mocnina je kladná?

Ž: *Nie.*

$$0^2 = 0, \textit{ a to nie je väčšie ako nula.}$$

U: Čiže x^2 nie je kladné pre každé reálne číslo x. Preto výrok

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$$

je nepravdivý.

Úloha 1: *Majme výrokovú funkciu*

$$V(x) : x^2 \leqq 0.$$

Vytvorte z nej kvantifikovaný výrok tak, že pred ňu pridáte

a) *existenčný kvantifikátor;*

b) *všeobecný kvantifikátor.*

Určte pravdivostné hodnoty oboch kvantifikovaných výrokov.

Výsledok:

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leqq 0$, *je pravdivý;*

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leqq 0$, *je nepravdivý*

Príklad 3: *Majme kvantifikovaný výrok:*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0.$$

a) Sformulujte tento výrok slovne.

b) Určte jeho pravdivostnú hodnotu.

c) Vytvorte jeho negáciu a určte jej pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Zadanie úlohy* **a)** *hovorí, že mám zadaný výrok sformulovať slovne. Tu je to:*

existuje také reálne číslo x, pre ktoré platí: $x^2 + 4 = 0$.

U: Vidím, že to pre teba nebol žiaden problém. Pokračujme úlohou ***b)***, určme pravdivostnú hodnotu zadaného výroku.

Ž: *Vyriešim rovnicu:*

$$x^2 + 4 = 0.$$

U: Hm. . . aj tak sa dá. . .

Ž: *Takže vo vyššie uvedenej rovnici nechám x^2 na ľavej strane a na pravú dám číslo. Tak dostanem:*

$$x^2 = -4.$$

U: Čo ďalej?

Ž: *Aby som sa zbavil druhej mocniny na ľavej strane, obe strany rovnice odmocním, čím dostanem:*

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-4}.$$

Nepoznám $\sqrt{-4}$, lebo **záporné čísla sa nedajú odmocniť**.

U: Má teda daná rovnica nejaké riešenie?

Ž: *Nie, nemá. Preto výrok*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0$$

je nepravdivý.

U: Pokračujme úlohou ***c)***. Vytvorme negáciu vyššie uvedeného výroku.

Ž: *Existenčný kvantifikátor zamením za všeobecný a $x^2 + 4 = 0$ znegujem.*

U: Výborne, urob to.

Ž: *Tak dostanem:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \neq 0.$$

U: Správne. Aké to bude s pravdivostnou hodnotou negovaného výroku?

Ž: *Musí byť opačná, ako pravdivostná hodnota pôvodného výroku. Pôvodný výrok je nepravdivý, preto jeho* **negácia je pravdivá**.

U: Správne zdôvodnené. Dokonca vieme povedať, že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla zväčšená o štyri je vždy kladná.

Úloha 1: *Majme kvantifikovaný výrok:*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0.$$

a) Sformulujte tento výrok slovne.

b) Určte jeho pravdivostnú hodnotu.

c) Vytvorte jeho negáciu a určte jej pravdivostnú hodnotu.

Výsledok:

a) Existuje také reálne číslo x, pre ktoré platí: $x^2 - 4 = 0$.

b) je pravdivý;

c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0$; je nepravdivý

Príklad 4: *Majme kvantifikovaný výrok:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqq 0.$$

a) Sformulujte tento výrok slovne.

b) Určte jeho pravdivostnú hodnotu.

c) Vytvorte jeho negáciu a určte jej pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Začnem úlohou* **a)**. *Slovná formulácia zadaného výroku znie:*

pre každé reálne číslo x **platí:** $x^2 \geqq 0$.

U: OK. Môžeme to preformulavať ete aj takto:

pre každé reálne číslo x ***platí, že jeho druhá mocnina je nezáporná***.

Ž: *Nezáporná, to znamená...*

U: ...kladná alebo rovná nule.

Ž: *Jasné...*

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Určme pravdivostnú hodnotu zadaného výroku.

Ž: *Hocijaké kladné číslo na druhú je tiež kladné, napríklad*

$$3^2 = 9 > 0.$$

Aj ľubovoľné záporné číslo na druhú je kladné, napríklad

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 > 0.$$

U: To je všetko? Na nič si nezabudol? Reálne čísla delíme naozaj iba na kladné a záporné?

Ž: *Jasné... zabudol som ešte na nulu.*

U: Platí to aj pre ňu?

Ž: *No*

$0^2 = 0$, *a to síce nie je kladné, ale určite to je nezáporné, lebo* $0 \geqq 0$.

Takže aj pre $x = 0$ *platí, že* $x^2 \geqq 0$. *Teda výrok*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqq 0$$

je pravdivý.

U: Ostáva nám ešte úloha ***c)***. Vytvorme negáciu zadaného výroku.

Ž: *Všeobecný kvantifikátor zamením za existenčný a* $x^2 \geqq 0$ *znegujem.*

U: Urob to. Nezabudni, že v negácii sa znamienko $\geqq$ zmení na $<$.

Ž: *Dostanem:*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0.$$

U: Urč ešte jeho pravdivostnú hodnotu. Existuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina je záporná?

Ž: *Nie neexistuje. Vyššie uvedená* **negácia je nepravdivá***. Už aj kvôli tomu, že pôvodný výrok je pravdivý.*

U: Správne.

Úloha 1: *Majme kvantifikovaný výrok:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$$

a) Sformulujte tento výrok slovne.

b) Určte jeho pravdivostnú hodnotu.

c) Vytvorte jeho negáciu a určte jej pravdivostnú hodnotu.

Výsledok:

a) Pre každé reálne číslo x platí, že jeho druhá mocnina je kladná.

b) je nepravdivý;

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leqq 0$*; je pravdivý*

Príklad 5: *Majme kvantifikovaný výrok:*

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1.$$

a) Sformulujte tento výrok slovne a určte jeho pravdivostnú hodnotu.

b) Vytvorte jeho negáciu a určte jej pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Začnem úlohou* **a)**. *Ak uvedený výrok sformulujem slovne, dostanem:*

ku každému reálnemu číslu a existuje také reálne číslo b,

že platí: $a \cdot b = 1$.

U: Výborne. Ako je to s jeho pravdivostnou hodnotou?

Ž: *Hm...*

U: Poďme na konkrétne príklady.

Existuje napríklad k číslu $a = 2$ také číslo b, aby súčin $a \cdot b$ bol rovný jednej?

Ž: *Existuje. Je to jedna polovica. Pre $b = \frac{1}{2}$ predsa platí:*

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

U: K jednému a si teda našiel príslušné b. No výrok hovorí, že ku ***každému*** reálnemu a máš nájsť príslušné b. Dá sa to?

Ž: *Asi áno.*

U: Ukáž to na niekoľkých príkladoch. Už sme za a vzali celé kladné číslo. Skús ešte za a dosadiť nejaké záporné číslo, prípadne zlomok, či desatinné číslo.

Ž: *OK. Ku $a = -3$ zoberiem $b = -\frac{1}{3}$. Platí, to čo potrebujeme, lebo záporné číslo krát záporné číslo je číslo kladné:*

$$a \cdot b = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1.$$

U: A čo taký zlomok, napríklad $a = \frac{2}{5}$?

Ž: *Zamením čitateľa s menovateľom a dostanem $b = \frac{5}{2}$. Tiež platí, že*

$$a \cdot b = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1.$$

U: Také čísla voláme ***navzájom prevrátené***.

K číslu a je prevrátené číslo $\frac{1}{a}$.

Ž: *Aha... takže pôvodný výrok platí.*

Ku každému reálnemu číslu a zoberiem k nemu prevrátené číslo $b = \frac{1}{a}$, pričom bude platiť:

$$a \cdot b = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

U: Sformuloval si to veľmi slušne. Trochu sa však divím, že na jednej strane si schopný takto sformulovať záver, no na druhej strane sa dopustíš dosť vážnej nepresnosti.

Ž: *Akej?*

U: Zober za a číslo nula.

Ž: *Jasné... K nule neexistuje prevrátené číslo, lebo* $\frac{1}{0}$ *nemá zmysel. Nulou sa nedá deliť.*

U: Presne tak. Keď $a = 0$, tak

$$a \cdot b = 0 \cdot b = 0,$$

a tá sa nikdy nebude rovnať jednej. Takže ako je to s pravdivosťou daného výroku?

Ž: **Výrok**

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1$$

je nepravdivý.

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Vytvor k danému výroku negáciu.

Ž: *Kvantifikátory zamením: všeobecný za existenčný a existenčný za všeobecný. No a* $a \cdot b = 1$ *znegujem.*

U: Urob to.

Ž: **Negácia** *znie:*

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} : a \cdot b \neq 1.$$

U: Ako je to s jej pravdivostnou hodnotou?

Ž: *Keďže pôvodný výrok je nepravdivý, jeho* **negácia musí byť pravdivá**.

U: Áno. Dokonca vieme povedať, že

existuje $a = 0$ také, že pre všetky reálne čísla b platí $a \cdot b = 0 \cdot b = 0 \neq 1$.

Úloha 1: *Majme kvantifikovaný výrok:*

$$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot b = b.$$

a) Sformulujte tento výrok slovne.

b) Určte jeho pravdivostnú hodnotu.

c) Vytvorte jeho negáciu a určte jej pravdivostnú hodnotu.

Výsledok:

a) Existuje také reálne číslo b, že pre každé reálne číslo a platí, že $a \cdot b = b$.

b) je pravdivý, lebo $\exists b = 0\ \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot b = a \cdot 0 = 0 = b$;

c) $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists a \in \mathbb{R} : a \cdot b \neq b$; *je nepravdivý*

Príklad 6: *Určte negáciu výroku*

Ak je p prvočíslo, tak je nepárne.

Ž: *Je to výrok v tvare implikácie.*

U: Zopakujme si ***negáciu implikácie*** $A \Rightarrow B$.

Ž: *Pamätám si, že táto negácia bola trochu prekvapujúca, nenachádzla sa v nej opäť šípka $\Rightarrow$, ako by som očakával.*

U: Áno, je to tak.

Negácia implikácie $A \Rightarrow B$ je konjunkcia $A \wedge \neg B$.

Ž: *Už si spomínam.*

U: Ináč povedané: negáciou toho, že ***z predpokladu*** A ***vyplýva záver*** B, musí byť výrok, ktorý tvrdí, že napriek tomu, že ***predpoklad*** A ***platí, zároveň*** záver B neplatí, teda platí jeho negácia $\neg B$.

Ž: *Potom negácia pôvodného výroku*

Ak *je p prvočíslo,* **tak** *je nepárne.*

znie nasledovne:

p je prvočíslo **a zároveň je párne**.

U: Takmer by sa s tým dalo súhlasiť. Niečo dôležité tu však chýba. Skús určiť pravdivostné hodnoty oboch výrokov: pôvodného, aj jeho negácie.

Ž: *Pôvodný výrok*

Ak je p prvočíslo, tak je nepárne.

je nepravdivý, lebo existuje jedno párne prvočíslo, a to číslo 2.

U: OK. Teraz urč, ako je to s pravdivostnou hodnotou negácie:

p je prvočíslo a zároveň je párne.

Ž: *Keďže je pôvodný výrok nepravdivý, jeho negácia by mala byť pravdivá.*

U: A naozaj je?

Ž: *To je divné. Neviem, aké prvočíslo p je myslené v negácii*

p je prvočíslo a zároveň je párne.

Pre $p = 2$ by to platilo, no pre iné prvočíslo, napríklad $p = 3$, by to už neplatilo.

U: Aha, už sa ukázal problém. Skúsme ho vyriešiť.

Ž: *Tá negácia vyzerá ako výroková funkcia, nie ako výrok. Vystupuje tu premenná p, od ktorej závisí pravdivostná hodnota spomínanej negácie.*

U: Premenná p vystupuje aj v pôvodnom výroku:

Ak je p prvočíslo, tak je nepárne.

Preto aj ten ***by sme mohli považovať za výrokovú funkciu***. Akurát že jej ***pravdivostná hodnota je pre ľubovoľnú hodnotu premennej*** p ***vždy rovná*** 1.

Ž: *Veď na začiatku som povedal, že pôvodný výrok je pravdivý.*

U: V tomto prípade je preto výhodnejšie chápať vetu:

Ak je p prvočíslo, tak je nepárne.

za ***výrok so zamlčaným všeobecným kvantifikátorom***, nie za výrokovú funkciu. Ako by teda znel spomínaný výrok aj so všeobecným kvantifikátorom?

Ž: *Asi takto:*

Pre každé prirodzené číslo p *platí: ak je p prvočíslo, tak je nepárne.*

U: Ako bude potom znieť negácia výroku so všeobecným kvantifikátorom?

Ž: *Všeobecný kvantifikátor zmením na existenčný a implikáciu za ním znegujem. Tak dostanem* **negáciu***:*

Existuje prirodzené číslo p také, že platí: p je prvočíslo a zároveň je párne.

U: Teraz je to už v poriadku.

Úloha 1: *Určte negáciu výroku*

Ak je prvočíslo väčšie ako 10*, tak je párne.*

Výsledok*: Existuje prvočíslo väčšie ako* 10*, ktoré je nepárne.*