

## Negácia zložených výrokov

*RNDr. Jana Krajčiová, PhD.*

**U:** Začneme negáciou **konjunkcie**.

**Ž:** **Konjunkcia** vznikne, ak medzi dva výroky dáme spojku ...

**U:** ... spojku „a zároveň“. Napríklad výrok

$A \wedge B$  : Samo vie po anglicky **a zároveň** po francúzsky.

je konjunkciou dvoch výrokov:

$A$  : Samo vie po anglicky.

$B$  : Samo vie po francúzsky.

**Ž:** Už som si to pripomenul ...

**U:** Teraz sa pokúsme nájsť **negáciu** daného zloženého výroku.

**Ž:** Ak si správne pamätám, negácia vznikne, ak pred celý výrok dáme „nie je pravda, že“. Tým dostaneme:

$\neg(A \wedge B)$  : **Nie je pravda, že** Samo vie po anglicky a zároveň po francúzsky.

**U:** Pamätáš si to dobre. Skúsme túto negáciu preformulovať tak, aby sme nepoužili slovné spojenie „nie je pravda, že“.

**Ž:** To nie je ťažké. Buď Samo neovláda prvý jazyk, alebo neovláda druhý jazyk.

**U:** Ešte môže neovládať oba jazyky. Negáciu môžeme sformulovať nasledovne:

Samo **nevie** po anglicky **alebo nevie** po francúzsky.

**Ž:** Aha ... Medzi negáciu výroku  $A$  a negáciu výroku  $B$  dáme spojku „alebo“.

**U:** Správne. Symbolicky to môžeme zapísať takto:

$\neg(A \wedge B)$  znamená to isté, čo  $(\neg A \vee \neg B)$ .

Slovne to môžeme sformulovať takto: **Negácia konjunkcie výrokov  $A$ ,  $B$  sa dá vyjadriť disjunkciou negácii výrokov  $A$ ,  $B$ .**

**Ž:** Symbolicky zápis je zrozumiteľnejší ...

**U:** Korektný dôkaz pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt nájdeme medzi príkladmi inej témy. Tam ukážeme, že výrok

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

je **tautológiou**.

Ž: *Tomu nerozumiem.*

U: V podstate ide o to, že výroky  $\neg(A \wedge B)$  aj  $(\neg A \vee \neg B)$  majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu, preto medzi ne môžeme dať znak ekvivalencie  $\Leftrightarrow$ . No viac sa o tom dozvieš v už spomínanej inej téme.

negáciou konjunkcie  $A \wedge B$  je disjunkcia  $\neg A \vee \neg B$

U: Pokračujme negáciou **disjunkcie**. Tá nám vznikne, keď medzi dva výroky dáme spojku „alebo“.

Ž: *Uved'me si nejaký príklad.*

U: Vyžime naše vyššie uvedené výroky  $A$ ,  $B$ . Ich disjunkciou dostaneme:

$A \vee B$  : Samo vie po anglicky **alebo** po francúzsky.

Ž: *Jeho negácia znie:*

$\neg(A \vee B)$  : **Nie je pravda, že** Samo vie po anglicky alebo po francúzsky.

U: Pozrime sa na negáciu volnejšie a preformulujme ju bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“. Keď

Samo vie po anglicky **alebo** po francúzsky,

tak sú tri možnosti:

- Samo vie iba po anglicky,
- Samo vie iba po francúzsky,
- Samo ovláda oba jazyky: angličtinu aj francúzštinu.

Ž: *No a keď to nemá byť pravda, tak ostáva už iba štvrtá možnosť, keď*

*Samo nevie ani po anglicky, ani po francúzsky.*

U: Správne. Túto negáciu môžeme sformulovať pomocou logickej spojky „a zároveň“ takto:

Samo **nevie** po anglicky **a zároveň** Samo **nevie** po francúzsky.

Pokús sa to zapísať symbolicky.

Ž: *Spojka „a zároveň“ je medzi výrokmi  $\neg A$  a  $\neg B$ . Preto negácia výroku  $A \vee B$  vyzerá takto:*

$\neg A \wedge \neg B$ .

U: Čiže

$\neg(A \vee B)$  znamená to isté, čo  $(\neg A \wedge \neg B)$ .

Slovná formulácia znie: **Negácia disjunkcie výrokov  $A$ ,  $B$  sa dá vyjadriť konjunkciou negácií výrokov  $A$ ,  $B$ .**

Opäť platí, že korektný dôkaz urobíme využitím tabuľky pravdivostných hodnôt. Pomocou nej sa ukáže, že výrok

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

je **tautológiou**.

**Ž:** *Opäť to divné slovo ...*

**U:** Spomínaný dôkaz nájdeš medzi príkladmi inej témy.

negáciou disjunkcie  $A \vee B$  je konjunkcia  $\neg A \wedge \neg B$

**Ž:** *Zrejme ďalej nasleduje negácia **implikácie**.*

**U:** Áno. Skúsme negovať výrok

$C \Rightarrow D$  : **Ak** budeš mať dobré vysvedčenie, **tak** dostaneš bicykel.

**Ž:** *To by tiež nemalo byť zložité. Negácia bude znieť:*

*Ak nebudeš mať dobré vysvedčenie, tak nedostaneš bicykel.*

**U:** Spomaľ. Nebol by som si tým taký istý. Predstavme si situáciu, že

nebudeš mať dobré vysvedčenie a nedostaneš bicykel.

Čo môžeme v tomto prípade povedať o pravdivostných hodnotách tvojej takzvanej negácie a tiež pôvodného výroku?

**Ž:** *V mojej negácii*

*Ak nebudeš mať dobré vysvedčenie, tak nedostaneš bicykel.*

*je splnený aj predpoklad aj záver. Preto aj celá implikácia je **pravdivá**. V pôvodnom výroku*

**Ak** budeš mať dobré vysvedčenie, **tak** dostaneš bicykel.

*nie je splnený ani predpoklad ani záver, preto celá implikácia je ...*

**U:** Pozor, pozor ... celá implikácia je **pravdivá**. Ak z nepravdy vyplýva nepravda, celá implikácia je pravdivá. Čiže v danej situácii je pravdivá aj pôvodná implikácia, aj tvoja negácia.

**Ž:** *Hm ... Takže moja negácia je nesprávna. Negácia musí mať vždy opačnú pravdivostnú hodnotu ako pôvodný výrok.*

**U:** No vidíš, sám si na to prišiel.

**Ž:** *Ale ako bude teda znieť správna negácia implikácie?*

**U:** Predstav si, že ti otec sľúbi:

Ak budeš mať dobré vysvedčenie, tak dostaneš bicykel.

Kedy zneguje svoj sľub, teda kedy ho nedodrží?

**Ž:** *Ak budem mať dobré vysvedčenie a napriek tomu nedostanem bicykel.*

**U:** Môžeme to sformulovať pomocou logickej spojky „a zároveň“:

$\neg(C \Rightarrow D)$  : **Budeš** mať dobré vysvedčenie **a zároveň nedostaneš** bicykel.

Skús to zapísať symbolicky.

**Ž:** *Medzi pôvodným výrokom  $C$  a negáciou  $\neg D$  je spojka „a zároveň“.*

**U:** Správne. Teda negácia implikácie  $C \Rightarrow D$  vyzerá takto:

$$C \wedge \neg D.$$

Slovne povedané: **Negácia implikácie výrokov  $A, B$  sa dá vyjadriť konjunkciou výroku  $A$  a negácie výroku  $B$ .** Korektný dôkaz pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt nájdeš opäť medzi príkladmi inej témy.

**Ž:** *Asi opäť bude niečo tautológiou.*

**U:** Dobrá dedukcia. Dokážeme tam, že výrok

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

je **tautológiou**.

negáciou implikácie  $C \Rightarrow D$  je konjunkcia  $C \wedge \neg D$

**U:** Ostáva nám negácia **ekvivalencie**. Tu si pomôžme tým, že ekvivalenciu zapíšme ako konjunkciu dvoch implikácií.

**Ž:** *Pomalšie. Padlo tu veľa cudzích slov.*

**U:** Skrátka, ekvivalenciu  $A \Leftrightarrow B$  môžeme zapísať pomocou dvoch implikácií  $A \Rightarrow B$  a  $B \Rightarrow A$ , medzi ktoré dáme spojku „a zároveň“. Teda

$$A \Leftrightarrow B \text{ znamená to isté, čo } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

**Ž:** *Aha, ... Keď chcem negovať ekvivalenciu  $A \Leftrightarrow B$ , tak budem negovať výrok  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ .*

**U:** Správne. Skús to. Najprv začni negovať konjunkciu.

**Ž:** *Spojku „a zároveň“ zmeníme za spojku „alebo“, pričom oba výroky  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$  negujeme.*

**U:** Veľmi dobre. Tak dostaneme:

$$\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A).$$

Ostáva negovať jednotlivé implikácie. Pokús sa o to.

**Ž:** *Negáciou implikácie  $A \Rightarrow B$  je výrok  $A \wedge \neg B$ . Negáciou implikácie  $B \Rightarrow A$  je výrok  $B \wedge \neg A$ . Potom negácia ekvivalencie  $A \Leftrightarrow B$  vyzerá takto:*

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A).$$

**U:** Aplikujme to na negáciu výroku:

Bicykel dostaneš **práve vtedy, keď** budeš mať dobré vysvedčenie.

**Ž:** *Pokúsím sa.*

*Buď dostanem bicykel, no nebudem mať dobré vysvedčenie,*

*alebo budem mať dobré vysvedčenie a napriek tomu nedostanem bicykel.*

**U:** Výborne.

negáciou ekvivalencie  $A \Leftrightarrow B$  je výrok  $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

**Príklad 1:** Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“):

a) Veronika má bábiku, no Riško nemá autíčko.

b) Nie som smädný ani hladný.

c) Táto rovica má aspoň jeden záporný a aspoň jeden kladný koreň.

**U:** Začnime úlohou **a)**:

Veronika má bábiku, no Riško nemá autíčko.

Najprv skúsme zistiť, aká logická spojka je v spomínanom výroku.

**Ž:** Povedal by som, že „a zároveň“.

**U:** Správne. Výrok môžeme preformulovať aj takto:

Veronika má bábiku **a zároveň** Riško nemá autíčko.

Ako sa neguje konjunkcia  $A \wedge B$ ?

**Ž:** Ak si dobre pamätám,

negáciou výroku  $A \wedge B$  je výrok  $\neg A \vee \neg B$ .

**U:** Pamätáš si to správne. Ako bude teda znieť negácia pôvodného výroku?

**Ž:** Negujem výroky:

Veronika má bábiku.

aj

Riško nemá autíčko.

No a medzi ne dám spojku „alebo“. Tak negácia pôvodného výroku znie:

Veronika **nemá** bábiku, **alebo** Riško **má** autíčko.

**U:** Správne. Pokračujme úlohou **b)**, kde máme negovať výrok:

Nie som smädný ani hladný.

**Ž:** Aj v tomto výroku sa skrýva spojka „a zároveň“:

Nie som smädný **a zároveň** nie som hladný.

**U:** Áno. Teda aj tu budeme negovať konjunkciu podľa rovnakého pravidla, ako v úlohe a).

**Ž:** Čiže

**Nie je pravda, že** nie som smädný ani hladný.

znamená to isté, čo výrok:

**Som** smädný **alebo som** hladný.

**U:** Správne. Ostáva výrok **c**):

Táto rovnica má aspoň jeden záporný a aspoň jeden kladný koreň.

**Ž:** *Tu máme spojku „a“, čo v matematike môžeme nahradiť opäť spojku „a zároveň“. Preto výrok môže znieť aj takto:*

*Táto rovnica má aspoň jeden záporný **a zároveň** má aspoň jeden kladný koreň.*

**U:** Teda použijeme opäť tú istú šablónu, znegujeme oba jednoduché výroky a spojku „a zároveň“ zameníme za spojku „alebo“. Pokús sa o to.

**Ž:** *Dostanem:*

*Táto rovnica **nemá** aspoň jeden záporný, **alebo nemá** aspoň jeden kladný koreň.*

**U:** Súhlasím. No ešte ti nedám pokoj. Pokús sa túto negáciu ešte trochu preformulovať tak, aby to bolo ľahšie stráviteľné. Ako môžeme jednoduchšie povedať „nemá aspoň jeden“?

**Ž:** *„Nemá aspoň jeden“ znamená, že „nemá ani jeden, ani dva, ani tri, . . . , ani viac“.*

**U:** Výborne. Ostáva nám iba možnosť „má nula“.

**Ž:** *Môže byť, . . . Preto preformulovaná negácia znie:*

*Táto rovnica **má nula** záporných, **alebo má nula** kladných koreňov.*

**U:** No a ešte krajšie povedané:

*Táto rovnica **nemá žiaden** záporný, **alebo nemá žiaden** kladný koreň.*

To je ten dvojitý zápor v slovenčine.

**Úloha 1:** *Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“):*

a) *Veronika nemá bábiku, no Riško má autíčko.*

b) *Nie som smädný, ale som hladný.*

c) *Táto rovnica nemá žiaden záporný koreň a má aspoň jeden kladný koreň.*

**Výsledok:**

a) *Veronika má bábiku, alebo Riško nemá autíčko.*

b) *Som smädný, alebo nie som hladný.*

c) *Táto rovnica má aspoň jeden záporný koreň, alebo nemá žiaden kladný koreň.*

**Príklad 2:** Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“):

a) Vypijem kávu alebo čaj.

b) Zostrojený trojuholník je pravouhlý, alebo aspoň jeden jeho vnútorný uhol je väčší ako  $60^\circ$ .

**Ž:** Ak sa dobre pozerám, v oboch výrokoch sa nachádza spojka „alebo“.

**U:** Dobrý postreh. Ako negujeme disjunkciu  $A \vee B$ ?

**Ž:**

Negáciou výroku  $A \vee B$  je výrok  $(\neg A \wedge \neg B)$ .

**U:** Výborne. Pokús sa o to. Začneme výrokom **a**):

Vypijem kávu alebo čaj.

**Ž:** Negujem oba výroky:

Vypijem kávu.

Vypijem čaj.

A medzi ne dám spojku „a zároveň“. Tak dostanem:

**Nevypijem kávu a zároveň nevypijem čaj.**

**U:** Respektíve:

Nevypijem kávu **ani** čaj.

Pokračujme úlohou **b**):

Zostrojený trojuholník je pravouhlý,

alebo aspoň jeden jeho vnútorný uhol je väčší ako  $60^\circ$ .

**Ž:** Úplne analogicky dostanem negáciu:

Zostrojený trojuholník **nie je** pravouhlý

**a zároveň** aspoň jeden jeho vnútorný uhol **nie je** väčší ako  $60^\circ$ .

**U:** Pozrime sa, ako si negoval druhý výrok:

Aspoň jeden jeho vnútorný uhol je väčší ako  $60^\circ$ .

**Ž:** No predsa:

Aspoň jeden jeho vnútorný uhol **nie je** väčší ako  $60^\circ$ .

**U:** No a s tým nesúhlasím. Poďme na to pomaly. Čo hovorí výrok:

**Aspoň jeden** jeho vnútorný uhol **je** väčší ako  $60^\circ$ .

**Ž:** Buď jeden, alebo dva, alebo všetky tri vnútorné uhly trojuholníka sú väčšie ako  $60^\circ$ .

**U:** No a negácia musí popisovať všetky zvyšné možnosti. Ktoré sú to?



Ž: *Hm ...*

**žiaden** vnútorný uhol trojuholníka **nie je** väčší ako  $60^\circ$ .

U: Správne. To je tá správna negácia. Tá zvyšná možnosť bola už len jediná, keď

**nula** vnútorných uhlov trojuholníka **je** väčších ako  $60^\circ$ .

Ty si to povedal krajšie, jazykovedný ústav by mal radosť. Pokús sa ešte sformulovať celú negáciu zloženého výroku:

Zostrojený trojuholník je pravouhlý,

alebo aspoň jeden jeho vnútorný uhol je väčší ako  $60^\circ$ .

Ž: *Negovaný výrok znie:*

Zostrojený trojuholník **nie je** pravouhlý

**a zároveň žiaden** jeho vnútorný uhol **nie je** väčší ako  $60^\circ$ .

U: Správne.

**Úloha 1:** *Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“):*

a) *Zjem chlieb alebo rožok.*

b) *Zostrojený trojuholník je pravouhlý, alebo žiaden z jeho vnútorných uhlov nie je väčší ako  $60^\circ$ .*

**Výsledok:**

a) *Nezjem ani chlieb ani rožok.*

b) *Zostrojený trojuholník nie je pravouhlý a zároveň aspoň jeden z jeho vnútorných uhlov je väčší ako  $60^\circ$ .*

**Príklad 3:** Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“). V úlohe a) číslo  $n$  označuje konkrétne prirodzené číslo.

a) Ak je číslo  $n$  deliteľné číslom 4, tak je párne.

b) Ak budem mať voľno, tak pôjdem do kina alebo do divadla.

**Ž:** Oba výroky a), b) majú tvar implikácie.

**U:** Dobrý postreh. Zopakujme si preto, ako sa neguje implikácia  $A \Rightarrow B$ .

**Ž:** Hm, ... ak si dobre pamätám, bolo to trochu zložitejšie. Viem, že tam nebola žiadna implikácia, ako by sa na prvý pohľad zdalo.

**U:** Negovať implikáciu  $A \Rightarrow B$  znamená ponechať predpoklad  $A$  a zároveň negovať záver  $B$ . Preto jej negácia vyzerá takto:

$$A \wedge \neg B.$$

**Ž:** Už si spomínam.

**U:** Začnime úlohou **a)**:

**Ak** je číslo  $n$  deliteľné číslom 4, **tak** je párne.

**Ž:** Táto implikácia je vždy pravdivá, bez ohľadu na to, aké  $n$  si vezmeme.

**U:** Máš pravdu, i keď nie na to sme sa pýtali. Ale, keď si to už povedal, vyžime to. Ak je táto implikácia vždy pravdivá, čo musí platiť pre jej negáciu?

**Ž:** Musí mať opačnú pravdivostnú hodnotu, teda musí byť vždy nepravdivá.

**U:** Skúsme teda nájsť jej negáciu.

**Ž:** Podľa toho, čo sme si povedali, predpoklad nechám a zároveň negujem záver. Tak dostanem:

Číslo  $n$  deliteľné číslom 4 **a zároveň** je **nepárne**.

**U:** Dobre si to negoval. A ako je to s jeho pravdivostnou hodnotou?

**Ž:** Každé prirodzené číslo deliteľné štyrmi musí byť párne. Teda nikdy sa nemôže stať, že

je číslo deliteľné číslom 4 **a zároveň** je **nepárne**.

Preto táto negácia je pre hocíjaké prirodzené číslo nepravdivá.

**U:** Sedí to.

**U:** Teraz negujme výrok **b)**:

**Ak** budem mať voľno, **tak** pôjdem do kina alebo do divadla.

**Ž:** Opäť predpoklad nechám a zároveň negujem záver.

**U:** Len pozor, záver:

pôjdem do kina alebo do divadla

je opäť zložený výrok v tvare disjunkcie. Pripomeňme si, ako ju negujeme:

$$\neg(A \vee B) \text{ znamená to isté, čo } (\neg A \wedge \neg B).$$

**Ž:** *Takže negácia záveru bude vyzerat takto:*

**Nepôjdem** do kina **a zároveň** nepôjdem do divadla.

**U:** *Krajšie to znie, ako:*

Nepôjdem do kina ani do divadla.

*Skús teraz sformulovať celú negáciu pôvodného výroku:*

**Ak** budem mať voľno, **tak** pôjdem do kina alebo do divadla.

**Ž:** *To už nebude ťažké:*

*Budem mať voľno **a zároveň** nepôjdem do kina ani do divadla.*

**U:** Výborne.

**Úloha 1:** *Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“). V úlohe b) nech číslo  $n$  označuje konkrétne prirodzené číslo.*

a) *Ak budem v práci, tak nepôjdem ani do kina ani do divadla.*

b) *Ak je číslo  $n$  deliteľné číslom 8, tak je deliteľné aj číslom 4.*

**Výsledok:**

a) *Budem v práci a zároveň pôjdem buď do kina alebo do divadla.*

b) *Číslo  $n$  je deliteľné číslom 8 a zároveň nie je deliteľné číslom 4.*

**Príklad 4:** Vytvorte negáciu nasledujúceho výroku (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“):

*Jablká kúpim práve vtedy, keď kúpim aj hrušky.*

**Ž:** Je to výrok v tvare ekvivalencie. Ak je pravdivý, oba výroky:

*Kúpim jablká.*

*Kúpim hrušky.*

*musia byť naraz buď pravdivé alebo naraz nepravdivé. Teda buď kúpim aj jablká aj hrušky, alebo nekúpim ani jablká ani hrušky.*

**U:** Veľmi dobre si to rozdiskutoval. Preto negácia musí zahŕňať zvyšné možnosti. Aké sú to?

**Ž:** Ostávajú nám už iba dve možnosti:

*Buď kúpim **iba** jablká alebo **iba** hrušky.*

**U:** Výborne. Porovnajme si túto tvoju negáciu, na ktorú si pekne prišiel zdravým sedliackym rozumom, s negáciou výroku  $A \Leftrightarrow B$ . Túto ekvivalenciu napíšeme ako konjunkciu dvoch implikácií, teda:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Skús to negovať.

**Ž:** Dostanem:

$$\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A).$$

**U:** Ešte neguj výroky v zátvorkách.

**Ž:** Tak máme:

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A).$$

**U:** Teraz to aplikuj na náš príklad. Môžeme označiť:

$A$  : Kúpim jablká.

$B$  : Kúpim hrušky.

**Ž:** Tak bude negácia znieť:

*Kúpim jablká **a** nekúpim hrušky, **alebo** kúpim hrušky **a** nekúpim jablká.*

**U:** Je to to isté, čo tvoja predchádzajúca negácia? Pripomeniem ti ju:

*Buď kúpim **iba** jablká alebo **iba** hrušky.*

**Ž:** Hm, ... Áno, je. I keď, v tom prvom prípade by som mohla kúpiť ešte aj napríklad banány. Tá druhá negácia mi to neumožňuje.

**U:** V podstate máš pravdu. Ostaňme preto pri tejto negácii:

*Kúpim jablká **a** nekúpim hrušky, **alebo** kúpim hrušky **a** nekúpim jablká.*

**Úloha 1:** *Vytvorte negáciu nasledujúceho výroku (bez použitia slovného spojenia „nie je pravda, že“):*

*Banány kúpim práve vtedy, keď nedostanem pomaranče.*

**Výsledok:** *Buď kúpim banány aj pomaranče, alebo nekúpim banány ani pomaranče.*

**Príklad 5:** *Nech  $A, B, C$ , sú výroky. Negujte nasledujúci zložený výrok:*

$$A \Rightarrow (B \vee \neg C).$$

**Ž:** *Najprv začnem negáciou implikácie. Tú negujeme tak, že ...*

**U:** Pripomením ti to. Negáciou implikácie  $D \Rightarrow E$  je konjunkcia predpokladu  $D$  a negácie záveru  $E$ .

**Ž:** *Trošku zrozumiteľnejšie, prosím ...*

**U:** Skrátka

$$\neg(D \Rightarrow E) \text{ znamená to isté, čo } (D \wedge \neg E).$$

**Ž:** *Už je to jasnejšie. Konjunkcia je, ak medzi výroky dám spojku „a zároveň“. Takže negáciou nášho pôvodného výroku  $A \Rightarrow (B \vee \neg C)$  dostaneme výrok*

$$A \wedge \neg(B \vee \neg C).$$

**U:** Výborne. Ešte neguj výrok v zátvorke.

**Ž:** *Tu spojku „alebo“ zamením za spojku „a zároveň“ a výroky  $B$  aj  $\neg C$  negujem. Tak dostanem:*

$$A \wedge (\neg B \wedge \neg\neg C).$$

**U:** Ešte si uvedomme, že negáciou negácie dostaneme pôvodný výrok, preto namiesto  $\neg\neg C$  môžeme napísať  $C$ . Preto výsledná negácia vyzerá takto:

$$A \wedge (\neg B \wedge C).$$

**Úloha 1:** *Nech  $A, B, C$ , sú výroky. Negujte nasledujúci zložený výrok:*

$$A \Rightarrow (\neg B \wedge C).$$

**Výsledok:**  $A \wedge (B \vee \neg C)$

**Príklad 6:** *Nie je pravda, že ak Platón založil Akadémiu, tak v prípade, že Aristoteles bol jeho žiakom, neštudoval na Akadémii. Rozhodnite, či je možné na základe tejto pravdivej informácie odpovedať na nasledujúce otázky. Ak áno, odpovedzte.*

a) *Založil Platón Akadémiu?*

b) *Bol Aristoteles Platónovým žiakom?*

**Ž:** *Ani som nestihol sledovať, ako to bolo s tým Platónom a Aristotelom.*

**U:** Súhlasím s tebou, je to dosť neprehľadné. Preto si skúsme výrok

Nie je pravda, že ak **Platón založil Akadémiu,**

tak v prípade, že **Aristoteles bol jeho žiakom, neštudoval na Akadémii.**

zapísať pomocou symbolov. Snáď to bude potom prehľadnejšie. Označme si nasledujúce výroky symbolmi  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

**$A$  : Platón založil Akadémiu.**

**$B$  : Aristoteles bol jeho (Platónovým) žiakom.**

**$C$  : Aristoteles neštudoval na Akadémii.**

Pokús sa to zapísať symbolicky.

**Ž:** „Nie je pravda, že“ sa zrejme vzťahuje na celý ďalší výrok.

**U:** Áno. Čo ďalej?

**Ž:** *Máme tam spojku „ak, tak“, preto tam bude implikácia. V predpoklade bude výrok*

$A$  : Platón založil Akadémiu.

*V závere, ... to nie je také jednoduché.*

**U:** Skús vo výroku

V prípade, že **Aristoteles bol jeho žiakom, neštudoval na Akadémii.**

nájsť nejakú logickú spojku.

**Ž:** *Hm, ... vyzerá to opäť na implikáciu:*

Ak **Aristoteles bol jeho žiakom, tak neštudoval na Akadémii.**

**U:** Veľmi dobre. Teda v závere implikácie máme opäť implikáciu  $B \Rightarrow C$ . Zapíš symbolicky už celý výrok. Nezabudni na počiatočné „nie je pravda, že“.

**Ž:** *Mohlo by to vyzeráť takto:*

$$\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)).$$

**U:** Vidiš, že si to zvládol. Poďme konečne k otázke **a)**:

**Založil Platón Akadémiu?**

Ináč povedané: je výrok **A** pravdivý? Zo zadania pritom vieme, že

výrok  $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$  je pravdivý.

**Ž:** Potom vyššie uvedený výrok bez negácie musí byť nepravdivý.

**U:** Správne. Teda

výrok  $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  je nepravdivý.

**Ž:** Hm, ... Ale ako mám zistiť pravdivosť výroku  $A$ , ak implikácia  $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  je nepravdivá.

**U:** Myslím, že to nebude také ťažké. Skús si predstaviť tabuľku pravdivostných hodnôt implikácie. Kedy je implikácia nepravdivá?

$p(A)$	$p(Z)$	$p(A \Rightarrow Z)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

**Ž:** Iba v jedinom prípade: keď je predpoklad pravdivý a záver nepravdivý.

**U:** Presne tak. Z pravdy pri správnom uvažovaní nikdy nemôžeme dôjsť k nepravde. Takže už vieš odpoveď na otázku, či je výrok  $A$  pravdivý.

**Ž:** Keďže  $A$  je v predpoklade nepravdivej implikácie, musí byť **pravdivý**.

**U:** Výborne. Odpoveď teda znie: **Platón založil Akadémiu**.

**U:** Ostáva nám ešte odpovedať na otázku **b)**:

**Bol Aristoteles Platónovým žiakom?**

Ináč povedané: je výrok **B** pravdivý?

**Ž:** Zrejme opäť využijem fakt, že

výrok  $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  je nepravdivý.

**U:** Áno. Opäť využijúc tabuľku pravdivostných hodnôt implikácie zisťujeme, že implikácia  $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  je nepravdivá iba vtedy, keď je pravdivý predpoklad  $A$  a, čo je pre nás teraz dôležitejšie, keď je nepravdivý záver  $(B \Rightarrow C)$ . A teraz použi ešte raz tú istú úvahu na výrok  $(B \Rightarrow C)$ .

**Ž:** Mám zistiť pravdivosť výroku  $B$ , ak je

výrok  $B \Rightarrow C$  nepravdivý.

*Táto implikácia je nepravdivá iba v jedinom prípade, a to vtedy, keď je predpoklad  $B$  pravdivý a záver  $C$  nepravdivý.*



**U:** Správne. Takže odpoveď na otázku b) je: **áno, Aristoteles bol Platónovým žiakom.**

**Úloha 1:** *Nie je pravda, že ak Platón založil Akadémiu, tak v prípade, že Aristoteles bol jeho žiakom, neštudoval na Akadémii. Rozhodnite, či je možné na základe tejto pravdivej informácie odpovedať na nasledujúcu otázku. Ak áno, odpovedzte:*

*Študoval Aristoteles na Akadémii?*

**Výsledok:** *Áno, Aristoteles študoval na Akadémii.*