Zložené výroky

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Mám pre teba jeden vtip.

Ž: *Sem s ním.*

U: Babička ponúka vnučku – dcéru matematika: „Katuška moja, nože si daj jablko ***alebo*** hrušku.“ A milá Katuška (na babičkin údiv) si vezme oboje.

Ž: *Nepripadá mi to veľmi vtipné. Skôr je vnučka nevychovaná.*

U: Ja si to nemyslím. Záleží na uhle pohľadu. Podľa mňa len bola poučená (zrejme otcom – matematikom), že spojka ***alebo*** sa v matematike ***nechápe vylučovaco***. Ak ju babička ponúkla jablkom alebo hruškou, mohla si vybrať až z troch možností:

- jablko,
- hrušku,
- oboje: jablko aj hrušku.

Ž: *Hm, ... V bežnej reči sa to väčšinou chápe tak, že si vnučka mala vybrať iba jablko, respektíve iba hrušku.*

U: Niekedy sa to ani inak ako vylučovaco nedá chápať. Napríklad spojka „alebo“ vo výroku

Samko skončil na olympiáde prvý alebo druhý.

je jednoznačne vylučovacia.

Ž: *Jasné, Samko nemohol byť prvý aj druhý zároveň.*

U: V bežnej hovorovej reči môžu vzniknúť rôzne nedorozumenia, čo je normálne. Reč sa postupne vyvíja s človekom a ten nie je stroj. Avšak matematika, ako exaktná veda, sa chce rôznym nezrovnalostiam vyhnúť. No a práve ***logika*** sa snaží ***formalizovať hovorovú reč***. Preto výroková logika nenarába s hocijakými vetami, ale len s ***výrokmi***. Tie delíme na ***elementárne výroky*** a ***zložené výroky***. My sa teraz budeme zaoberať zloženými výrokmi.

Ž: *Ak si dobre pamätám,*

zložené výroky sú tie, ktoré obsahujú nejakú logickú spojku.

U: Správne. ***Logické spojky*** poznáme

- ***unárne*** a
- ***binárne***.

Ž: *To sú aké?*

U: ***Unárna*** (v preklade jednoargumentová) spojka sa dáva len pred jeden výrok, ***binárne*** (v preklade dvojargumentové) spojky spájajú dva výroky.

Ž: *Binárnou spojkou môže byť naše „alebo“ z úvodného príkladu. Ale aká je to unárna spojka?*

U: Tou je spojka ***nie je pravda, že***. Výrok, ktorý ju obsahuje sa nazýva ***negáciou***. No o tom hovorí iná téma.

Ž: *Koľko existuje binárnych spojok?*

U: V matematike sa zväčša obmedzujeme na štyri základné ***binárne logické spojky***:

- ***a zároveň*** (má značku $\wedge$);
- ***alebo*** (má značku $\vee$);
- ***ak, tak*** (má značku $\Rightarrow$);
- ***práve vtedy, keď*** (má značku $\Leftrightarrow$).

Ž: *Chcelo by to nejaký príklad.*

U: Zoberme si dva elementárne výroky

$$A : \text{Samo vie po anglicky.}$$

$$B : \text{Samo vie po francúzsky.}$$

Skúsme postupne medzi ne dať prvé dve spojky.

U: Začnime logickou spojkou „a zároveň“. Dajme ju medzi výroky A a B.

Ž: *Takýto zložený výrok bude znieť:*

$A \wedge B$: *Samo vie po anglicky* **a zároveň** *Samo vie po francúzsky.*

U: V bežnej reči sa spojka „a zároveň“ jednoducho zamení za spojku „a“. Predchádzajúci výrok potom bude znieť prirodzenejšie:

$A \wedge B$: Samo vie po anglicky ***a*** po francúzsky.

Môžeme už prejsť k definícii.

Ž: *Sem s ňou.*

U: ***Nech A, B sú ľubovoľné dva výroky. Zložený výrok „A a zároveň B“ nazývame konjunkciou výrokov A a B. Označujeme ho $A \wedge B$.***

Ž: *Je to dosť ťažké slovo „konjunkcia“.*

U: Pochádza z latinčiny a znamená spájanie, združovanie.

Ž: *Aha, to akože spájame dva výroky . . .*

U: Presne tak. Ešte nám ostáva povedať, kedy je konjunkcia dvoch výrokov pravdivá a kedy nepravdivá.

Ž: *Spojka „a zároveň“ už sama o sebe hovorí, že* **výrok $A \wedge B$ je pravdivý iba vtedy, ak sú pravdivé oba výroky A aj B.**

U: V našom príklade je výrok

$$A \wedge B : \text{Samo vie po anglicky } \textbf{\textit{a zároveň}} \text{ vie po francúzsky.}$$

pravdivý iba vtedy, keď Samo ovláda oba jazyky. Zapíšme to do tabuľky ***pravdivostných hodnôt***:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ž: *Trochu pomalšie ... prečo má tabuľka štyri riadky?*

U: Každý z výrokov A, B má dve možnosti: buď je pravdivý alebo nepravdivý. Teda môže mať jednu z dvoch pravdivostných hodnôt: 1 alebo 0. No a pre pravdivostné hodnoty dvojice výrokov A, B máme štyri možnosti:

- buď sú oba výroky pravdivé, čo zachytáva prvý riadok ... 1, 1;
- alebo je prvý výrok pravdivý, druhý nepravdivý, viď druhý riadok ... 1, 0;
- ďalej môže byť prvý výrok nepravdivý a druhý pravdivý, viď tretí riadok ... 0, 1;
- no a ešte ostáva možnosť, keď sú oba výroky nepravdivé, viď posledný riadok 0, 0.

Ž: *Jasné. No a v poslednom stĺpci je číslo* 1 *len v prvom riadku, kde sú oba výroky A, B pravdivé.*

U: Keď hoci len jeden z výrokov A, B je nepravdivý, tak už celá ich konjunkcia je nepravdivá. Preto vo zvyšných riadkoch posledného stĺpca sú nuly.

$$\boxed{\text{konjunkcia: } A \wedge B}$$

U: Teraz dajme medzi výroky A a B spojku „alebo“. Vyslov takýto zložený výrok z našich pôvodných príkladov výrokov A, B.

Ž: *To nebude zložité:*

$$A \vee B : \textit{Samo vie po anglicky } \textbf{alebo} \textit{ Samo vie po francúzsky.}$$

U: ***Ak medzi dva výroky A, B dáme spojku „alebo“, hovoríme o disjunkcii (alebo alternatíve) výrokov A a B. Takýto zložený výrok označujeme $A \vee B$.***

Ž: *Ak konjunkcia znamená spájanie, tak logicky disjunkcia bude znamenať rozpájanie. Nie?*

U: Tak nejako. Nie je však vhodné sa toho vysvetlenia až tak striktne držať. Trochu to súvisí s tým, kedy je výrok $A \vee B$ pravdivý. Zoberme si náš konkrétny príklad.

Ž: *No, výrok*

$$A \vee B : \textit{Samo vie po anglicky } \textbf{alebo} \textit{ po francúzsky.}$$

bude pravdivý vtedy, keď bude Samo ovládať jeden z tých dvoch jazykov, teda francúzsky alebo anglicky.

U: A čo keď bude vedieť aj po anglicky aj po francúzsky?

Ž: *Tiež bude zložený výrok $A \vee B$ pravdivý.*

U: No práve. V bežnej reči sa spojka „alebo“ chápe vo vylučovacom zmysle.

Ž: *Aha, o tom bol ten vtip na začiatku.*

U: Presne tak. ***Matematické „alebo“ sa chápe nevylučovaco.***

Ž: *Ak tomu rozumiem správne, výrok $A \vee B$ je pravdivý až v troch prípadoch:*

- *pravdivé sú oba výroky A aj B;*
- *pravdivý je iba výrok A;*
- *pravdivý je iba výrok B.*

U: Môžeme to zapísať do nasledujúcej tabuľky pravdivostných hodnôt:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ž: *Jasné. Výrok $A \vee B$ nie je pravdivý vtedy, ak nie je pravdivý ani výrok A ani výrok B. O tom hovorí posledný, štvrtý, riadok tabuľky.*

disjunkcia: $A \vee B$

U: Pokračujme ďalšou logickou spojkou „ak, tak“. Ako príklad uveďme nasledujúci zložený výrok:

Ak budeš mať dobré vysvedčenie, ***tak*** dostaneš bicykel.

Je to sľub, ktorý dal istý otec svojmu synovi.

Ž: *Štedrý otec . . .*

U: Z ktorých dvoch výrokov je spomínaný výrok zložený?

Ž: *Prvým je výrok za spojkou „ak“, druhým výrok za spojkou „tak“.*

U: OK. Ten prvý označme symbolom C. Druhý označme symbolom D. Zapíš ich.

Ž: *Výrok C znie*

$$C : \textit{Budeš mať dobré vysvedčenie.}$$

Výrok D je

$$D : \textit{Dostaneš bicykel.}$$

U: Skúsme to zovšeobecniť. ***Ak dva výroky C, D spojíme spojkou „ak, tak“, dostaneme zložený výrok, ktorý je implikáciou výroku D výrokom C. Označujeme ho $C \Rightarrow D$.*** Čítame to jedným z nasledujúcich spôsobov:

- ak C, tak D;
- keď C, potom D;
- C implikuje D;
- z C vyplýva D.

Prvý výrok C z implikácie nazývame ***predpokladom***.

Druhý výrok D z implikácie voláme ***záverom***.

Ž: *To je logické: z predpokladu vyplýva záver.*

U: Ďalej sa budeme pýtať, kedy je implikácia pravdivá a kedy je nepravdivá. Ináč povedané: kedy otec splní, čo sľúbil a kedy otec svojho syna oklame?

Ž: *Otec dodrží svoj sľub, ak mu kúpi bicykel za dobré vysvedčenie.*

U: Správne. Zapíšme to cez pravdivostné hodnoty. Syn dostane dobré vysvedčenie, teda

$$p(C) = 1,$$

a dostane bicykel, čiže

$$p(D) = 1.$$

Tým otec splní svoj sľub:

$$p(C \Rightarrow D) = 1.$$

Skrátka,

ak ***predpoklad*** aj ***záver sú pravdivé***, tak aj celá ***implikácia je pravdivá***.

U: Pokračujme ďalej. Kedy otec syna oklame?

Ž: *Keď mu nekúpi bicykel, hoci syn dostane dobré vysvedčenie.*

U: Výborne. Zapíšme to cez pravdivostné hodnoty. Syn dostane dobré vysvedčenie, teda

$$p(C) = 1.$$

Nedostane bicykel, čiže

$$p(D) = 0.$$

Tým ho otec oklame, teda

$$p(C \Rightarrow D) = 0.$$

Ak je ***predpoklad pravdivý*** a ***záver nepravdivý***, tak ***implikácia je nepravdivá***.

U: Obe doteraz rozobraté možnosti majú niečo spoločné. Vieš čo?

Ž: *Hm, ...*

U: V oboch prípadoch sú predpoklady splnené, teda $p(C) = 1$.

Ž: *Aha, syn dostal dobré vysvedčenie.*

U: Ako to však bude s pravdivosťou otcovho výroku, ak predpoklad C nebude splnený?

Ž: *Keď syn nedostane dobré vysvedčenie?*

U: Presne tak. Oklame syna otec, ak mu za zlé vysvedčenie predsa len kúpi bicykel?

Ž: *O klamstve nemôže byť ani reči. Syn môže byť rád, že ten bicykel dostal.*

U: No a keďže ho neoklamal, musel hovoriť pravdu. V dvojhodnotovej logike inú možnosť nemal.

Ž: *Existuje aj iná ako dvojhodnotová logika?*

U: Áno. V reálnom svete nie je všetko také jednoznačné. Nie o každom tvrdení vieš povedať, či je to pravda alebo lož. No tým sa tu zaoberať nebudeme.

Ž: *Škoda, mohlo by to byť dosť zaujímavé.*

U: Súhlasím, no ostaňme v našej dvojhodnotovej logike. Skúsme to zapísať pomocou pravdivostných hodnôt. Syn nedostane dobré vysvedčenie, teda

$$p(C) = 0.$$

Napriek tomu mu otec kúpi bicykel, čiže

$$p(D) = 1.$$

Otec ho tým však neoklamal, teda hovoril pravdu. Preto

$$p(C \Rightarrow D) = 1.$$

Ak je ***predpoklad nepravdivý*** a ***záver pravdivý***, tak ***implikácia je pravdivá***.

U: Ostala nám posledná možnosť.

Ž: *Keď syn nedostal dobré vysvedčenie a otec mu nekúpil bicykel.*

U: Oklamal ho tým otec?

Ž: *To nie. On mu sľúbil bicykel len za dobré vysvedčenie.*

U: Keďže ho neoklamal, tak hovoril pravdu. Opäť to zapíšme pomocou pravdivostných hodnôt. Syn nedostal dobré vysvedčenie, teda

$$p(C) = 0.$$

Otec mu nekúpil bicykel, čiže

$$p(D) = 0.$$

Otec ho tým neoklamal, takže hovoril pravdu. Preto

$$p(C \Rightarrow D) = 1.$$

Ž: *Znie to rozumne.*

U: Máme:

ak je ***predpoklad nepravdivý*** aj ***záver je nepravdivý***, tak ***implikácia je pravdivá***.

U: Zhrňme to do nasledujúcej tabuľky pravdivostných hodnôt:

$p(C)$	$p(D)$	$p(C \Rightarrow D)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ž: *Aj tak sú tie posledné dva riadky divné.*

U: Tabuľka odráža naše uvažovanie. Pri správnom uvažovaní (teda pri pravdivej implikácii) ***z pravdivého predpokladu*** môžeme dostať len ***pravdivý záver***. No ***z nepravdivého predpokladu*** môžeme dospieť k hocičomu, teda ***aj k pravde aj k nepravde***.

$$\boxed{\text{implikácia: } C \Rightarrow D}$$

U: Vo vyššie uvedenom texte sľúbil otec synovi za dobré vysvedčenie bicykel a sformuloval to takto:

Ak budeš mať dobré vysvedčenie, ***tak*** dostaneš bicykel.

Ako to bude s dodržaním sľubu, keď svoj sľub sformuluje nasledovne:

Bicykel dostaneš ***práve vtedy, keď*** budeš mať dobré vysvedčenie.

Ž: *Mne sa zdá, že tá druhá formulácia je pre syna menej výhodná. Spojka „práve vtedy, keď“ znamená, že iba vtedy a inokedy nie. Teda tentokrát by syn dostal bicykel naozaj len za dobrá vysvedčenie, za zlé ho už určite nedostane. Kým v prvej formulácii (v tvare implikácie) nebolo povedané, čo sa bude diať, keď syn dostane zlé vysvedčenie. Aj za zlé vysvedčenie mal ešte nádej, že bicykel dostane.*

U: Presne tak. No a ***výroku, ktorý je zložený z dvoch výrokov D a C spojených spojkou „práve vtedy, keď“, hovoríme ekvivalencia výrokov D a C. Označujeme ju $D \Leftrightarrow C$.***

Ž: *Slovo „ekvivalencia“ som už počul. Čo to presne znamená?*

U: Slovo „ekvivalencia“ v preklade znamená „rovnaká hodnota“ („ekvi“ je „rovnaký“ a „valencia“ znamená „hodnota“). Teda ***výroky D a C*** na oboch stranách spojky „práve vtedy, keď“ musia mať ***rovnakú hodnotu***, aby výsledná ***ekvivalencia $D \Leftrightarrow C$ bola pravdivá*** (viď červené riadky v nižšie uvedenej tabuľke pravdivostných hodnôt). Ak majú ***výroky D a C rôzne pravdivostné hodnoty***, výsledná ***ekvivalencia $D \Leftrightarrow C$ je nepravdivá*** (viď modré riadky v nižšie uvedenej tabuľke pravdivostných hodnôt).

$p(D)$	$p(C)$	$p(D \Leftrightarrow C)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

U: Ešte raz si vysvetlime uvedenú tabuľku na našom príklade, kde otec sľúbil synovi

Bicykel dostaneš ***práve vtedy, keď*** budeš mať dobré vysvedčenie.

Kedy otec syna oklame? Ináč povedané, kedy bude mať ekvivalencia $D \Leftrightarrow C$ ***pravdivostnú hodnotu*** 0?

Ž: *Keď syn dostane dobré vysvedčenie, teda keď*

$$p(C) = 1,$$

no napriek tomu mu otec nekúpi bicykel, čiže

$$p(D) = 0.$$

U: Áno, odráža to tretí riadok v tabuľke. No tiež ho oklame, keď mu za zlé vysvedčenie

$$p(C) = 0$$

kúpi bicykel

$$p(D) = 1.$$

To je zapísané v druhom riadku tabuľky.

Ž: *Ja by som také klamstvo bral . . .*

U: No nič to nemení na fakte, že to klamstvom ostáva, aj keby bolo v danej chvíli pre syna výhodnejšie. Kedy otec dodrží svoj sľub? Respektíve, kedy má ***ekvivalencia*** $D \Leftrightarrow C$ ***pravdivostnú hodnotu*** 1?

Ž: *Ak synovi za dobré vysvedčenie*

$$p(C) = 1$$

otec kúpi bicykel

$$p(D) = 1.$$

U: Viď prvý riadok tabuľky. No tiež, keď synovi za zlé vysvedčenie

$$p(C) = 0$$

otec bicykel nekúpi

$$p(D) = 0.$$

Viď posledný riadok tabuľky.

ekvivalencia: $D \Leftrightarrow C$

U: Ešte treba dodať, že ekvivalenciu

$$D \Leftrightarrow C$$

môžeme zapísať ako konjunkciu dvoch implikácii $D \Rightarrow C$ a $C \Rightarrow D$.

Ž: *Je to dosť zložito povedané.*

U: Skrátka obe implikácie musia platiť ***zároveň***. Teda

$$(D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D).$$

Ž: *Asi preto je tam aj tá obojstranná šípka* $\Leftrightarrow$.

U: Presne tak. Ak to chceme povedať ešte trochu zložitejšie, výroky

$$D \Leftrightarrow C \text{ a } (D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D)$$

majú vždy ronaké pravdivostné hodnoty, preto môžeme medzi ne dať spojku „práve vtedy, keď“. No a úplne zložito povedané: výrok

$$(D \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow ((D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D))$$

je ***tautológia***.

Ž: *A to je čo?*

U: Zatiaľ sa tým netrápme, o tom bude reč inde. Len ti nadškrtávam, že ešte je o čom hovoriť.

$$D \Leftrightarrow C \ldots (D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D)$$

U: Na záver dodajme, že nami zvolené príklady boli také, aby sme ľahko pochopili tabuľky pravdivostných hodnôt jednotlivých logických spojok. Veď formálna logika sa snaží zachytiť, ako uvažujeme. V bežnom živote nám tiež môže pomôcť zrozumiteľnejšie rozprávať. Avšak formálna logika sa nezaoberá obsahom výrokov, ale len ich pravdivostnými hodnotami. Preto sa môže zdať ťažkopádne, že nasledujúca implikácia je pravdivá:

Ak $2 + 2 = 5$, tak hlavným mestom Anglicka je Londýn.

Ž: *To je naozaj divné ...*

U: Podrobnejšie si to rozoberieme v jednom z príkladov. No a úplne na koniec si zhrňme tabuľky pravdivostných hodnôt spomínaních logických spojok do jednej. Poriadne si ju ešte raz prezri.

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Príklad 1: *Rozhodnite, či sú nasledujúce výroky pravdivé alebo nie:*

a) Ak $2+2=4$*, tak hlavným mestom Anglicka je Londýn.*

b) Ak $2+2=4$*, tak hlavným mestom Anglicka je Paríž.*

c) Ak $2+2=5$*, tak hlavným mestom Anglicka je Londýn.*

d) Ak $2+2=5$*, tak hlavným mestom Anglicka je Paríž.*

Ž: *To sú nejaké divné výroky. Ako súvisí hlavné mesto Anglicka s tým, či* $2+2$ *je* 4 *alebo* 5*?*

U: Vôbec nijako. V bežnej reči spojka „ak, tak“ naozaj znamená, že z niečoho má vyplývať niečo iné. Preto by mal byť medzi oboma výrokmi nejaký súvis. Ak však prejdeme ku ***formálnej*** logike, tak neprihliadame na samotné výroky. Je úplne jedno, o čom hovoria. Dôležitá je len ich pravdivostná hodnota.

Ž: *To je naozaj formálne.*

U: V matematike sa to stáva pomerne často. Je to daň za to, že sa pokúsiš presne popísať niečo intuitívne. No vráťme sa k nášmu príkladu. Na základe pravdivostných hodnôt výrokov v predpoklade aj v závere urč pravdivostnú hodnotu celej implikácie.

Ž: *V úlohe* **a)** *je v predpoklade pravdivý výrok:*

$$2+2=4.$$

V závere je tiež pravdivý výrok:

Hlavným mestom Anglicka je Londýn.

Čiže z pravdivého výroku vyplýva pravdivý výrok. Preto aj celá implikácia je **pravdivá***.*

U: Výborne. Pokračujme úlohou ***b)***.

Ž: *Tu je v predpoklade opäť pravdivý výrok:*

$$2+2=4.$$

Záver:

Hlavným mestom Anglicka je Paríž.

je však nepravdivý. Teda z pravdy vyplýva nepravda.

U: A to nie je možné. Pri správnom uvažovaní nemôžeme z pravdy dôjsť ku lži. Preto táto implikácia je ***nepravdivá***. Ako to bude s úlohou ***c)***?

Ž: *V predpoklade je nepravdivý výrok:*

$$2+2=5.$$

U: Vieš len na základe tejto informácie určiť pravdivostnú hodnotu celej implikácie?

Ž: *Hm . . . to sa asi nedá.*

U: Predstav si tabuľku pravdivostných hodnôt pre implikáciu:

$p(C)$	$p(D)$	$p(C \Rightarrow D)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

U: ***Z nepravdy môžeme pri správnom uvažovaní dostať hocičo: aj pravdu aj nepravdu.***

Ž: *Teda implikácia v úlohe c) bude určite* **pravdivá***, lebo predpoklad je nepravdivý.*

U: Pre úplnosť dodajme, že záver v úlohe c) je pravdivý. Ukončme to úlohou ***d)***.

Ž: *Tu je tiež predpoklad nepravdivý:* $2+2$ *predsa nie je* 5*. Záver je tiež nepravdivý. Z klamstva vyplynulo klamstvo. Preto celá implikácia je* **pravdivá***.*

U: Správne.

Úloha 1: *Rozhodnite, či sú nasledujúce výroky pravdivé alebo nie:*

a) Ak je 13 *nepárne číslo, tak* $3 \cdot 13$ *je nepárne číslo.*

b) Ak je 13 *nepárne číslo, tak* $3 \cdot 13$ *je párne číslo.*

c) Ak je 13 *párne číslo, tak* $3 \cdot 13$ *je nepárne číslo.*

d) Ak je 13 *párne číslo, tak* $3 \cdot 13$ *je párne číslo.*

Výsledok*: a) pravdivý; b) nepravdivý; c) pravdivý; d) pravdivý*

Príklad 2: *Na večierok pozvali päť osôb: K, L, M, N, P. Ich odpovede na pozvanie sa dajú vyjadriť výrokmi a) až d). Pretože bolo nepriaznivé počasie, neprišiel nikto. Rozhodnite, ktoré z výrokov a) až d) sú v danej situácii pravdivé?*

a) Príde K a príde L.

b) Príde L alebo príde M.

c) Ak príde M, tak príde N.

d) P príde práve vtedy, keď príde M.

U: Začnime výrokom ***a)***.

Ž: *Výrok*

Príde K **a** *príde L.*

je zložený z dvoch výrokov spojených spojkou „a“.

U: Ide vlastne o spojku „a zároveň“.

Ž: *Preto výsledný výrok je pravdivý iba vtedy, keď sú pravdivé oba výroky. No z nich ani jeden nie je pravdivý, keďže na stetnutie neprišiel nikto. Preto je výsledný výrok* **nepravdivý**.

U: Pokračujme výrokom v úlohe ***b)***:

Príde L ***alebo*** príde M.

Tu sú dva výroky spojené spojkou „alebo“. Preto aspoň jeden z týchto dvoch výrokov by mal byť pravdivý, aby bol celý zložený výrok (ktorý je disjunkciou) pravdivý.

Ž: *No ani jeden z nich nie je pravdivý. Preto zložený výrok je* **nepravdivý**.

U: Správne. Pokračujme výrokom ***c)***. Ten je v tvare implikácie:

Ak príde M, ***tak*** príde N.

Ž: *Tu tiež žiaden z výrokov, z ktorých je implikácia zložená, nie je pravdivý. Preto celá implikácia je nepravdivá.*

U: No, nie tak rýchlo. Implikácia je nepravdivá iba v jedinom prípade. Je to vtedy, keď predpoklad je pravdivý a záver nepravdivý. Skrátka, z pravdy nemôžeme správnym uvažovaním dospieť ku lži. No z klamstva môžeme pri správnom uvažovaní dospieť k hocičomu: aj ku pravde aj ku lži.

Ž: *Jasné. V našom prípade teda z nepravdy vyplýva nepravda. A to sa pokojne môže stať. Preto táto implikácia je* **pravdivá**. *Ale aj tak je to trochu divné.*

U: Súvisí to čiastočne s tým, že my pracujeme s dvojhodnotovou logikou: daný výrok je buď pravdivý alebo nepravdivý. Iná možnosť nie je. Ak teda niečo nie je lož, musí to byť pravda. Poďme však už ďalej. Ostáva nám posledný výrok ***d)***.

Ž: *Tu sú dva výroky spojené spojkou „práve vtedy, keď“:*

P príde **práve vtedy, keď** *príde M.*

Ide preto o ekvivalenciu.

U: No a ekvivalencia je pravdivá vtedy, keď výroky na oboch stranách majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Naše oba výroky sú nepravdivé. Teda celá ekvivalencia je* **pravdivá**.

U: Správne.

Úloha 1: *Na večierok pozvali päť osôb: K, L, M, N, P. Ich odpovede na pozvanie sa dajú vyjadriť výrokmi a) až d). Na večierok neprišli P a N. Ostatní prišli. Rozhodnite, ktoré z výrokov a) až d) sú v danej situácii pravdivé?*

a) Príde K a príde L.

b) Príde L alebo príde M.

c) Ak príde M, tak príde N.

d) P príde práve vtedy, keď príde M.

Výsledok: *a) pravdivý; b) pravdivý; c) nepravdivý; d) nepravdivý*

Príklad 3: *Rozhodnite, či som bol v kine, ak som poumýval riad a nasledujúce výroky sú pravdivé:*

a) Ak poumývaš riad, tak pôjdeš do kina.

b) Poumývaš riad a nepôjdeš do kina.

c) Ak nepoumývaš riad, tak nepôjdeš do kina.

d) Poumývaš riad, alebo pôjdeš do kina.

U: Začnime výrokom ***a)***:

Ak poumývaš riad, ***tak*** pôjdeš do kina.

Ž: *Riad som poumýval, takže predpoklad je splnený.*

U: Zo zadania príkladu vieme, že celá implikácia je pravdivá.

Ž: *To teda znamená, že ak je splnený predpoklad, musí byť splnený aj záver. Čiže musí platiť, že*

pôjdem do kina.

U: To nebolo zložité, pokračujme úlohou ***b)***:

Poumývaš riad ***a*** nepôjdeš do kina.

Spojku „a“ môžeme pre lepšiu predstavu zameniť za spojku „a zároveň“.

Ž: *Nie je o čom rozmýšľať. Musím splniť oba príkazy (lebo to tak znie). Musím*

poumývať riad.

To som už urobil. No a

nepôjdem do kina.

U: Výrok ***c)*** je v tvare implikácie:

Ak nepoumývaš riad, ***tak*** nepôjdeš do kina.

Ž: *Ale ja som riad umyl. Čo teraz? Tak pôjdem do kina.*

U: Tento výrok nehovorí nič o tom, čo sa stane, keď umyješ riad. Len o tom, čo sa stane, keď riad nepoumývaš. Potom nepôjdeš do kina. No ak ho poumývaš, predpoklad v našej implikácii nie je splnený.

Ž: *Jasné. Už si spomínam. Z nepravdy môže vyplývať aj pravda aj nepravda. Takže do kina* **môžem aj nemusím** *ísť.*

U: Správne. V oboch prípadoch by bol výrok c) pravdivý. Ostáva nám úloha ***d)***:

Poumývaš riad, ***alebo*** pôjdeš do kina.

Ž: *Ja som poumýval riad. Takže spomínaný výrok je už pravdivý.*

U: Správne. Je pravdivý bez ohľadu na to, či je pravdivá jeho druhá časť:

Pôjdeš do kina.

Ž: *Takže do kina opäť* **môžem, ale aj nemusím** *ísť.*

U: Presne tak. Spojka „alebo" sa v matematike nechápe vylučovaco, môžu byť splnené aj obe časti výroku.

Úloha 1: *Rozhodnite, či som bol v kine, ak som nepoumýval riad a nasledujúce výroky sú pravdivé:*

a) Ak nepoumývaš riad, tak nepôjdeš do kina.

b) Nepôjdeš do kina a nepoumývaš riad.

c) Pôjdeš do kina alebo poumývaš riad.

Výsledok: *a) nebol v kine; b) nebol v kine; c) bol v kine*

Príklad 4: *Vieme, že výroky A, B sú pravdivé a výrok C je nepravdivý. Rozhodnite, ktorým z nasledujúcich zložených výrokov možno určiť pravdivostné hodnoty a určte ich:*

a) $C \Rightarrow \neg A$;

b) $\neg C \Leftrightarrow \neg A$;

c) $\neg A \wedge C$;

d) $\neg C \Rightarrow (A \vee B)$;

e) $\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)$.

Ž: *Najprv si zapíšem známe pravdivostné hodnoty:*

$$p(A) = 1,\ p(B) = 1,\ p(C) = 0.$$

U: V úlohe ***a)***

$$C \Rightarrow \neg A$$

potrebujeme poznať ešte aj pravdivostnú hodonotu $\neg A$.

Ž: *Tá je*

$$p(\neg A) = 0.$$

Teda z nepravdy vyplýva nepravda. Preto celá implikácia je **pravdivá**.

U: Správne. Z nepravdy môže vyplývať hocičo: pravda aj nepravda. Pokračujme úlohou ***b)***:

$$\neg C \Leftrightarrow \neg A.$$

Ž: *Výrok má tvar ekvivalencie. Platí:*

$$p(\neg C) = 1,\ p(\neg A) = 0.$$

Na oboch stranách spojky „práve vtedy, keď“ sú výroky s rôznou pravdivostnou hodnotou, preto celá ekvivalencia je **nepravdivá**.

U: OK. Ďalej máme úlohu ***c)***. Je to výrok v tvare konjunkcie:

$$\neg A \wedge C.$$

Ž: *Pravdivostné hodnoty výrokov na oboch stranách spojky „a zároveň“ sú*

$$p(\neg A) = 0,\ p(C) = 0.$$

Celý zložený výrok je preto **nepravdivý**.

U: Teraz sa poriadne pozri na výroky ***d)*** a ***e)***:

$$\neg C \Rightarrow (A \vee B),$$

$$\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B).$$

Ž: *Predpoklady sú rovnaké, je to výrok $\neg C$. Závery sú jeden druhému negáciou.*

U: Správne. Pokračuj.

Ž: *Pravdivostná hodnota predpokladu je*

$$p(\neg C) = 1.$$

Ďalej

$$p(A \vee B) = 1,$$

lebo dokonca oba výroky A, B sú pravdivé. V úlohe d) z pravdy vyplýva pravda. Preto aj celá implikácia je **pravdivá**.

U: Výborne. Ukonči to úlohou ***e)***.

Ž: *Pravdivostná hodnota záveru je*

$$p(\neg(A \vee B)) = 0.$$

Z pravdy vyplýva nepravda. A to sa pri správnom uvažovaní nemôže stať, preto je celá implikácia **nepravdivá**.

U: Správne.

Úloha 1: *Vieme, že výroky A, B sú pravdivé a výrok C je nepravdivý. Rozhodnite, ktorým z nasledujúcich zložených výrokov možno určiť pravdivostné hodnoty a určte ich:*

a) $B \Rightarrow \neg A$;

b) $\neg B \Leftrightarrow \neg A$;

c) $\neg B \vee C$;

d) $C \Rightarrow (A \wedge B)$.

Výsledok: *a)* 0; *b)* 1; *c)* 0; *d)* 1

Príklad 5: *Označme:*

J: Pôjde Jano.

K: Pôjde Katka.

M: Pôjde Martin.

Z: Pôjde Zuzka.

Nasledujúce zložené výroky vyjadrite pomocou symbolov J, K, M, Z a pomocou logických spojok:

a) Zuzka nepôjde bez Martina.

b) Niekto pôjde.

c) Z dievčat ani jedno nepôjde bez druhého.

d) Pôjde aspoň jeden z chlapcov.

U: Začnime úlohou ***a)***:

Zuzka nepôjde bez Martina.

Ž: *To znamená, že*

ak nepôjde Martin, tak nepôjde ani Zuzka.

U: Veľmi dobre. Zapíšeme to ešte symbolicky. Ide o implikáciou:

$$\neg M \Rightarrow \neg Z.$$

Ž: *Úloha* **b)** *hovorí, že*

niekto pôjde.

U: Teda pôjde Jano alebo Katka alebo Martin alebo Zuzka.

Ž: *Alebo aj viacerí z nich ...*

U: To je zahrnuté v tom, čo som povedal. Spojka „alebo“ sa totiž v matematike nechápe vo vylučovacom zmysle.

Ž: *Aha ... Symbolicky to teda môžem zapísať takto:*

$$J \vee K \vee M \vee Z$$

U: Správne. Pokračujme úlohou ***c)***:

Z dievčat ani jedno nepôjde bez druhého.

Ž: *Dievčatá sú dve: Katka a Zuzka. Teda buď obe pôjdu alebo obe nepôjdu.*

U: Túto situáciu presne vystihuje ekvivalencia:

Katka pôjde práve vtedy, keď pôjde Zuzka.

Zapíš to symbolicky.

Ž: *Dostanem:*

$$K \Leftrightarrow Z.$$

U: Ostáva nám úloha ***d)***:

Pôjde aspoň jeden z chlapcov.

Ž: *Čiže*

pôjde Jano alebo Martin.

U: Povedal si to správne ako alternatívu. Ešte to zapíšeme symbolicky:

$$J \vee M.$$

Úloha 1: *Označme:*

J: Pôjde Jano.

K: Pôjde Katka.

M: Pôjde Martin.

Z: Pôjde Zuzka.

Nasledujúce zložené výroky vyjadrite pomocou symbolov J, K, M, Z a pomocou logických spojek:

a) Martin nepôjde bez Katky.

b) Nikto nepôjde.

c) Z chlapcov ani jeden nepôjde bez druhého.

d) Pôjde aspoň jedno z dievčat.

Výsledok: *a)* $\neg K \Rightarrow \neg M$; *b)* $\neg J \wedge \neg K \wedge \neg M \wedge \neg Z$; *c)* $J \Leftrightarrow M$; *d)* $K \vee Z$

Príklad 6: *Mama sa chystá piecť koláče. Ostatní členovia rodiny vyslovili tieto želania:*

Otec: Upeč makovník alebo orechovník.

Syn: Ak upečieš orechovník, tak upeč aj makovník alebo buchty.

Dcéra: Ak upečieš buchty aj makovník, tak nepeč orechovník.

Mama napokon upiekla len orechovník. Komu splnila želanie?

Ž: **Mama splnila otcovo želanie.** *On chcel makovník alebo orechovník ... a mal orechovník.*

U: Ako to bude so synovým želaním:

Ak upečieš orechovník, tak upeč aj makovník alebo buchty.

Ž: *V prípade, že mama upečie orechovník (čo upiekla), syn chcel ešte makovník alebo buchty. No ani jedno z tých dvoch mama už neupiekla. Takže* **synovo želanie nesplnila**.

U: Ostáva nám ešte posúdiť dcérine vyjadrenie:

Ak upečieš buchty aj makovník, tak nepeč orechovník.

Ž: *Tá v prípade, že mama upečie buchty alebo makovník (nič z toho však mama neupiekla), nechcela už orechovník. Ten však mama upiekla.*

U: Vyhovela mama dcére alebo nie?

Ž: *No, nevyhovela by jej iba vtedy, keby upiekla orechovník aj napriek tomu, že upiekla buchty aj makovník. Ona však tie buchty ani makovník neupiekla.*

U: Keďže nie je pravda, že jej nevyhovela, tak jej vyhovela. Teda ***mama*** v podstate ***dcérine želanie splnila***. Z nepravdivého predpokladu (čo je náš prípad) môžeme pri správnom uvažovaní dospieť aj k pravde aj k nepravde. Celá implikácia bude pravdivá.

Ž: *Ak to teda zhrniem,* **mama splnila želanie otcovi a dcére**.

Úloha 1: *Mama sa chystá piecť koláče. Ostatní členovia rodiny vyslovili tieto želania:*

Otec: Upeč makovník alebo orechovník.

Syn: Ak upečieš orechovník, tak upeč aj makovník alebo buchty.

Dcéra: Ak upečieš buchty aj makovník, tak nepeč orechovník.

Mama napokon upiekla makovník a buchty. Komu splnila želanie?

Výsledok: *otcovi, synovi, dcére*