

Elementárne výroky a ich negácie

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Logicky uvažovať – čo si pod tým predstavuješ?

Ž: *Že to, čo hovorím, má hlavu a päťu.*

U: A ako to vieš posúdiť?

Ž: *Hm, ... je mi to akosi intuitívne jasné, nemusím sa nad tým zamýšľať.*

U: Veď práve - nemusíš sa nad tým zamýšľať. „Zdravým sedliackym rozumom“ vieš zhodnotiť, čo je správne a čo nie.

Ž: *A odkiaľ sa vzal ten „sedliacky rozum“?*

U: Žiadne čary-máry-fuk. Trvalo dosť dlho, kým sa zmýšľanie ľudí sformovalo do dnešnej podoby. V dejinách sa proces vzniku logických schém odohral v dobe predhistorickej, teda rádovalo niekoľko desiatok rokov pred Kristom. U dieťaťa prebieha v predškolskom veku.

Ž: *Napríklad pri čítaní rozprávok?*

U: Presne tak. Pomocou nich sa dieťa naučí rozlišovať dobro a zlo s etickou implikáciou, že dobro plodí dobro.

Ž: *O tom by sa dalo polemizovať. Čo napríklad taká rozprávka o žabom princovi, kde princezná „šmarí“ s odporom žabu o stenu, a tá sa premení na krásneho princa?*

U: Uznávam, takých príkladov by sa našlo viac. V istom zmysle ide o amorálne rozprávky. Ak to zhrnieme, môžeme povedať, že **logika sa snaží zachytiť práve to, čo nám je intuitívne jasné pri posudzovaní správnosti uvažovania.**

Ž: *To znie zaujímavo.*

U: Skôr, než sa do toho pustíme, chcem podotknúť, že logika, ktorú tu budeme prezentovať, nebude čisto formálna.

Ž: *Čo to znamená?*

U: Vo výrokovej logike nás nezaujíma, o čom výroky hovoria, zaujíma nás len, či sú, alebo nie sú pravdivé. No, aby sme lepšie pochopili, prečo sú pravidlá výrokovej logiky také, aké sú, z času na čas sa budeme zaujímať aj o zmysel výrokov.

Ž: *A čo je to vlastne výrok?*

U: Najprv si povedzme, ako vznikol názov „logika“. Pochádza z gréckeho slova **logos**, čo znamená **slovo**. Je to preto, lebo logika sa zaoberá slovom, myšlienkou, myslením.

logika \longleftrightarrow logos \longleftrightarrow slovo

U: A teraz poďme k výroku. Jeho presná definícia je zložitým problémom, no pre naše účely si postačíme s nasledujúcim chápaním výroku.

Výrokom V rozumieme oznamovaciu vetu, ktorá vyjadruje niečo, čo je buď pravdivé alebo nepravdivé. Pravdivosť a nepravdivosť výroku považujeme za pravdivostné hodnoty výrokov.

Ž: To znie rozumne.

U: Uvedme si zopár príkladov a ty sa pokús rozhodnúť, či sú alebo nie sú výroky:

A : Bratislava je hlavné mesto Slovenska.

B : $2 + 2 = 5$

C : Ako sa máš?

D : Choď preč!

E : Táto veta je nepravdivá.

F : Chrám Matky Božej v Paríži.

G : Vo vesmíre existujú iné formy života.

H : $x + 5 = 6$

Ž: A je výrok, dokonca pravdivý. Hlavné mesto Slovenska je naozaj Bratislava. B je tiež výrok, no nepravdivý: $2 + 2$ sa predsa rovná číslu 4, nie 5.

U: Ideš na to dobre. Ešte dodajme, že pravdivostná hodnota „pravdivý“ sa zvykne označovať číslom 1 alebo písmenom p . Pravdivostná hodnota „nepravdivý“ sa zvykne označovať číslom 0 alebo písmenom n . No a **pravdivostnú hodnotu výroku V (vyjadrenú číslom 0 alebo 1) budeme označovať $p(V)$.**

Ž: Podľa toho môžem napísať:

$$p(A) = 1,$$

$$p(B) = 0.$$

U: Správne. Čo príklad C , je to výrok?

Ž: To je otázka, nedá sa povedať, či je táto veta pravdivá alebo nepravdivá. Takže veta

C : Ako sa máš?

nie je výrokom.

U: OK. Pokračujme príkladom

D : Choď preč!

Ž: To je rozkazovacia veta, nie oznamovacia, preto tiež nie je výrokom.

U: No ale príklad

E : Táto veta je nepravdivá.

už je oznamovacou vetou.

Ž: Potom to bude výrok.

U: No neviem, neviem, ... Skús zistiť jeho pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Hm, ... to neviem.*

U: Veď práve... Ak by bola táto veta pravdivá, znamenalo by to, že je nepravdivá. No a ak by bola nepravdivá, znamenalo by to, že: „Táto veta je pravdivá.“. Je tu spor. Táto veta nie je ani pravdivá ani nepravdivá, preto nie je výrokom.

Ž: *Je to dobre zamotané. O vete*

F : Chrám Matky Božej v Paríži.

tiež neviem povedať, či je alebo nie je pravdivá. Nemá predsa zmysel sa pýtať:

„Je pravda, že Chrám Matky Božej v Paríži?“

U: Lebo je to nadpis, preto príklad F tiež nie je výrokom. Pokračujme príkladom

G : Vo vesmíre existujú iné formy života.

Ž: *Je to oznamovacia veta, ale neviem, či pravdivá.*

U: No, na rozdiel od príkladu E je určite buď pravdivá alebo nepravdivá.

Ž: *Akurát, že to nevieme určiť.*

U: No a **oznamovacej vete, ktorej pravdivostnú hodnotu nepoznáme, budeme hovoriť hypotéza.**

Ž: *Takže veta G je hypotézou.*

U: Ostáva nám posledný príklad

$$H : x + 5 = 6.$$

Ž: *To je nejaké divné. H môže byť aj pravdivé aj nepravdivé. Podľa toho, čomu sa rovná x . Pre $x = 1$ dostaneme pravdivý výrok*

$$1 + 5 = 6,$$

no pre iné x , napríklad $x = 2$, dostaneme nepravdivý výrok

$$2 + 5 = 6.$$

U: Popísal si to úplne presne. Príklad H tiež nie je výrokom, je to **výroková funkcia**. **Výrokovou funkciou $V(x)$ s premennou x nazývame takú oznamovaciu vetu, ktorá obsahuje premennú x , sama nie je výrokom, no stane sa ním vtedy, keď za premennú x dosadíme konkrétny objekt z vopred danej množiny.**

Ž: *No, neznie to jednoducho.*

U: Zatiaľ si tým nemusíš lámať hlavu, podrobnejšie sa tým budeme zaoberať inde.

U: Ak to zhrnieme, **výrokmi nemôžu byť vety opytovacie, rozkazovacie, zvolacie, ani nadpisy. Výrokmi tiež nemôžu byť oznamovacie vety, ktoré nie sú ani pravdivé ani nepravdivé.**

výroky: $A, B \longleftrightarrow p(A) = 1, p(B) = 0$

hypotéza: $G \longleftrightarrow p(G)$ nepoznáme

výroková funkcia $H \longleftrightarrow p(H)$ závisí od x

U: *Výroky* delíme na

- *elementárne*

a

- *zložené.*

Ž: Podľa ich názvu súdim, že zložené výroky budú zložené z elementárnych. Ale ako?

U: Presne tak. Elementárny výrok je taký, že žiadna jeho časť nie je výrokom. Uvedme si to na príkladoch. Majme tri výroky:

K : Idem do kina.

L : Nie je pravda, že idem do kina.

M : Idem do kina alebo prečítam si knihu.

Skús zistiť, ktoré z nich sú elementárne a ktoré zložené.

Ž: Výrok *K* je zrejme elementárny. Výrok *L* ... jeho časť

„*Idem do kina.*“

je výrokom, takže výrok *L* by mal byť zložený.

U: Správne. Zostávajúca časť „*Nie je pravda, že*“ je logickou spojku. Čo výraz *M*?

Ž: Tu sú dve jeho časti, ktoré môžu byť samostatnými výrokmi:

„*Idem do kina.*“

„*Prečítam si knihu.*“

U: No a medzi nimi je logická spojka „*alebo*“. Preto je to tiež zložený výrok.

Ž: Teda logické spojky spájajú výroky.

U: Áno. V matematike sa zväčša obmedzujeme na päť *základných logických spojok*:

- *nie je pravda, že*;
- *a zároveň*;
- *alebo*;
- *ak, tak*;
- *práve vtedy, keď*;

pričom prvá z nich „nie je pravda, že“ je unárna, zvyšné sú binárne.

Ž: Čo to znamená?

U: *Unárna* (jednoargumentová) spojka sa dáva len pred jeden výrok, *binárne* (dvojargumentové) spojky spájajú dva výroky. Zhrňme si to.

Elementárnym výrokom

nazývame taký výrok, ktorý neobsahuje logické spojky.

Zloženým výrokom

nazývame taký výrok, ktorý obsahuje aspoň jednu logickú spojku.

U: *Zložené výroky* s binárnymi logickými spojkami podrobnejšie rozoberieme inde. Teraz sa budeme venovať zloženému výroku s unárnou logickou spojkou „nie je pravda, že“, ktorý sa volá *negáciou*.

Ž: *Keď niečo negujeme, tak to vlastne popierame.*

U: Presne tak. Preto negácia výroku musí mať opačnú pravdivostnú hodnotu ako pôvodný výrok.

Negáciou výroku V rozumieme výrok „Nie je pravda, že V “

a označujeme ho $\neg V$ (čítame „non vé“) alebo ho označujeme V' .

Ž: *Ak som to pochopil správne, keď pôvodný výrok V je pravdivý, jeho negácia musí byť nepravdivá. No a keď je pôvodný výrok nepravdivý, jeho negácia zase musí byť pravdivá.*

U: To, čo si povedal, môžeme zapísať do nasledujúcej tabuľky. Je to tabuľka pravdivostných hodnôt:

V	$\neg V$
1	0
0	1

Ž: *Hodil by sa nejaký príklad.*

U: V poriadku. Skúsme negovať tieto výroky:

I : Číslo 100 je deliteľné číslom 5.

J : Dnes je streda.

Ž: *Začnem výrokom I . Ak sa budem pridržiavať definície negácie, tak negácia výroku I bude vyzerať takto:*

$\neg I$: **Nie je pravda, že** číslo 100 je deliteľné číslom 5.

U: Správne. No, ak negáciu výroku budeme chápať trochu voľnejšie, môžeme to preformulovať aj ináč, napríklad:

$\neg I$: Číslo 100 **nie je** deliteľné číslom 5.

Alebo aj takto:

$\neg I$: Číslo 100 **dáva** po delení číslom 5 **nenulový zvyšok**.

Ž: *Jasné, všetky tri formulácie negácie výroku I hovoria predsa to isté, len inými slovami.*

U: Skús určiť pravdivostné hodnoty výrokov I a $\neg I$.

Ž: *To nie je ťažké. Výrok I je pravdivý, preto:*

$$p(I) = 1.$$

Potom

$$p(\neg I) = 0,$$

lebo výrok $\neg I$ je nepravdivý.

U: Správne. Teraz neguj výrok

J : Dnes je streda.

Ž: *Takže:*

$\neg J$: **Nie je pravda, že** dnes je streda.

Pri voľnejšom chápaní negácie môže negácia výroku J vyzerať aj takto:

$\neg J$: Dnes **nie je** streda.

Alebo

$\neg J$: Dnes **je pondelok**.

U: No, s tou poslednou negáciou si dovoľím nesúhlasiť. Ty tvrdíš, že veta „Dnes nie je streda.“ znamená to isté, čo veta „Dnes je pondelok.“

Ž: *Aha, ... neznamená. Ak dnes nie je streda, tak môže byť hocijaký iný deň v týždni. Takže správne by to malo byť takto:*

$\neg J$: Dnes **je pondelok alebo utorok alebo štvrtok alebo piatok
alebo sobota alebo nedeľa.**

U: Týmto príkladom sme chceli ukázať, že *ak výrok V vyjadruje jednu z viacerých možností, ktoré môžu nastať, tak jeho negácia $\neg V$ musí zahŕňať všetky ostatné možnosti.*

$$\text{Ak } p(V) = 1, \text{ tak } p(\neg V) = 0.$$

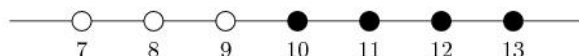
$$\text{Ak } p(V) = 0, \text{ tak } p(\neg V) = 1.$$

U: Trochu viac sa budeme venovať negáciám výrokov, ktoré hovoria o počte niečoho. Pôjdeme na to postupne. Najprv skús negovať výrok

K : V triede *je aspoň desať* dievčat.

Ž: V triede je teda *desať alebo jedenásť alebo dvanásť alebo viac* dievčat.

U: Presne tak. Na číselnej osi to môžeme znázorniť takto:



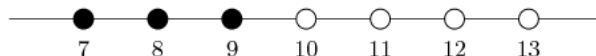
U: Nezabudni, že negácia má zahŕňať všetky ostatné možnosti.

Ž: *Potom negácia*

$\neg K$: **Nie je pravda, že** v triede *je aspoň desať* dievčat.

musí zahŕňať, že v triede je deväť alebo osem alebo sedem alebo ... alebo jedno alebo žiadne dievča.

U: Veľmi dobre. Na číselnej osi to môžeme znázorniť takto:



U: Sformuluj to.

Ž: *Teda*

$\neg K$: V triede **je najviac deväť** dievčat.

U: OK. Negácia môže znieť aj takto:

$\neg K$: V triede **je menej ako desať** dievčat.

Ž: *Jasné. Ak poviem „menej ako desať“, tak počet desať do toho nezapadá. No ak poviem „najviac deväť“, tak deväť môže byť.*

U: Dobre si to pochopil. Všeobecné zhrnutie si poriadne pozri v rámečku.

výrok \longrightarrow negácia výroku

aspoň $n \dots$ je $\dots \longrightarrow$ najviac $(n - 1) \dots$ je \dots

aspoň $n \dots$ je $\dots \longrightarrow$ menej ako $n \dots$ je \dots

n je prirodzené číslo, $n > 1$

U: Pokračujme negáciou ďalšieho výroku:

L : **Aspoň jeden** z vás **má** domácu úlohu.

Ž: *To znamená, že domácu úlohu má jeden alebo dvaja alebo traja, atď. z nás.*

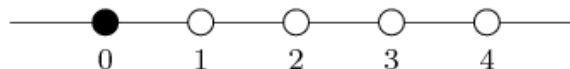
U: Opäť to znázorníme na číselnej osi:



Ž: *Tak negácia bude zahŕňať iba možnosť, že*

$\neg L$: **Nula** z vás **má** domácu úlohu.

Vidíme to aj na číselnej osi.



U: Lepšie povedané

$\neg L$: **Nikto** z vás **nemá** domácu úlohu.

Tu sa ukázala špecialita slovenského jazyka, a to dvojité zápor. Nepovieme predsa „Nikto z vás má domácu úlohu.“ Opäť si zovšeobecnenie pozri v rámečku.

výrok \longrightarrow negácia výroku

aspoň jeden \dots je $\dots \longrightarrow$ nikto \dots nie je \dots

U: Ďalší výrok na negovanie znie:

M : **Najviac dvaja** žiaci **sú** chorí.

Ž: Znamená to, že dvaja, jeden alebo nula žiakov je chorých.

U: Áno, vidíme to znázornené aj na číselnej osi.



Ž: Preto negácia bude znieť takto:

$\neg M$: **Aspoň traja** žiaci **sú** chorí.

Tiež to vidíme znázornené na číselnej osi.



U: Alebo aj takto:

$\neg M$: **Viac ako dvaja** žiaci **sú** chorí.

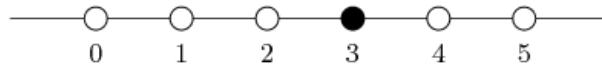
Zovšeobecnenie si opäť pozri v tabuľke.

<p>výrok \longrightarrow negácia výroku</p> <p>najviac $n \dots$ je $\dots \longrightarrow$ aspoň $(n + 1) \dots$ je \dots</p> <p>najviac $n \dots$ je $\dots \longrightarrow$ viac ako $n \dots$ je \dots</p> <p>n je prirodzené číslo</p>

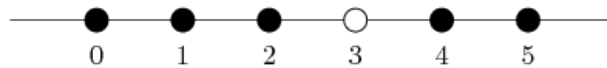
U: Už sme negovali výroky, v ktorých vystupovali slová „najviac“ a „aspoň“. Teraz tu bude slovo „práve“. Výrok znie:

N : **Práve traja** žiaci **sú** u riaditeľa.

Situáciu sme znázornili na číselnej osi. Pokús sa to znegovať.



Ž: *Negácia má zahrnúť všetky ostatné možnosti. Teda v negovanom výroku majú byť v riaditeľni nula alebo jeden alebo dvaja alebo štyria alebo piati alebo viacerí žiaci. Vid' číselná os.*



U: Presne tak, vynechali sme len počet „tri“. Sformulujme to jednoduchšie:

$\neg N$: **Najviac dvaja alebo aspoň štyria žiaci sú** u riaditeľa.

Alebo tiež

$\neg N$: **Menej alebo viac ako traja žiaci sú** u riaditeľa.

Zovšeobecnenie si skús urobiť sám.

U: Ešte sa pohrajme trochu so slovami „každý“ (resp. „všetci“) a „nikto“ (resp. „žaden“). Najprv skús negovať výrok

O : **Každý** žiak triedy **má** domácu úlohu.

Skrátka, preformuluj nasledujúci výrok:

$\neg O$: **Nie je pravda, že** každý žiak triedy má domácu úlohu.

Ž: *Negácia tohto výroku musí hovoriť o tom, že sa v triede nájde jeden alebo dvaja alebo viacerí, ktorí domácu úlohu nemajú urobiť.*

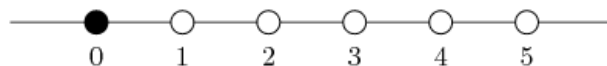
U: Presne tak. Môžeme to sformulovať takto:

$\neg O$: **Aspoň jeden** žiak triedy **nemá** domácu úlohu.

No a ukončme to negáciou výroku:

P : **Nikto** v triede **nemá** vši.

Ž: *Čiže v triede má nula ľudí vši. Na číselnej osi to znázorníme takto:*

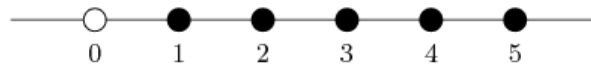


U: OK. Teraz povedz jednoduchšie nasledujúci negovaný výrok:

$\neg P$: **Nie je pravda, že** nikto v triede nemá vši.

Ž: *Teda sa musí nájsť niekto (jeden, dvaja alebo viacerí), kto tie vši má.*

U: Situáciu znázorníme takto:



Ž: *Negácia potom znie:*

$\neg P$: **Aspoň jeden** v triede **má** *vši*.

U: Správne. Obe zovšeobecnené situácie si pozri v tabuľke.

výrok \rightarrow negácia výroku

každý ... má ... \rightarrow aspoň jeden ... nemá ...

nikto ... nemá ... \rightarrow aspoň jeden ... má ...

Príklad 1: Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky, určte ich pravdivostnú hodnotu:

- a) Potraviny.
- b) Všetky vnútorné uhly rovnostranného trojuholníka majú veľkosť 60° .
- c) Ako sa máš?
- d) Všetky prvočísla sú nepárne.
- e) Číslo b je deliteľné číslom 5.
- f) V triede je 30 žiakov.

Ž: Ak si dobre pamätám, tak výrokom rozumieme oznamovaciu vetu, ktorá je buď pravdivá alebo nepravdivá.

U: Pamätáš si to správne. Tak poďme na to.

Ž: Začnem úlohou **a)**

„Potraviny.“

... to je nejaká divná veta.

U: Je to názov, to vlastne ani nie je veta. Rozhodne sa o nej nedá povedať, či je pravdivá alebo nie.

Ž: Preto veta v úlohe a) **nie je výrokom.**

U: Pokračujme úlohou **b)**

„Všetky vnútorné uhly rovnostranného trojuholníka majú veľkosť 60° .“

Ž: To je oznamovacia veta, dokonca pravdivá. Preto **je výrokom.**

U: Čo úloha **c)**?

„Ako sa máš?“

Ž: Nie je to oznamovacia veta, rozhodne nemá zmysel sa na ňu pýtať otázkou

„Je pravda, že ako sa máš?“

U: To teda nemá zmysel, preto tiež „nie je výrokom“. Nasleduje úloha **d)**

„Všetky prvočísla sú nepárne.“

Ž: Je to oznamovacia veta a dá sa na ňu opýtať otázkou

„Je pravda, že všetky prvočísla sú nepárne?“

Preto **je výrokom.**

U: Skús určiť jej pravdivostnú hodnotu.

Ž: No, ... nie je pravda, že všetky prvočísla sú nepárne. Číslo 2 je tiež prvočíslo a je párne. Čiže je to nepravdivý výrok.

U: Som zvedavý, ako si poradiš s úlohou **e)**

„Číslo b je deliteľné číslom 5.“

Ž: *Je to tiež oznamovacia veta a má zmysel sa opýtať*

„Je pravda, že číslo b je deliteľné číslom 5?“

Takže by mala byť výrokom.

U: Tak si skús odpovedať, či číslo b je deliteľné piatimi.

Ž: *Hm, ... to bude ťažšie. Neviem, čo je to za číslo. Ak za b dosadím napríklad jedno z čísel 5, 10, 15, atď, tak je daná veta pravdivá. No pre b rovné napríklad číslu 2 či 17 je spomínaná veta nepravdivá.*

U: Teda **pravdivosť** vety

„Číslo b je deliteľné číslom 5.“

závisí od toho, čomu sa rovná číslo b . No a takémuto tvrdeniu hovoríme **výroková funkcia** (niekde aj výroková forma).

U: Ukončme to úlohou **f)**

„V triede je 30 žiakov.“

Ž: *Je to normálna oznamovacia veta, takže je výrokom.*

U: No ... je aj nie je. Skús určiť jej pravdivostnú hodnotu.

Ž: *To je ťažšie, lebo neviem o akej triede je reč.*

U: Presne si popísal, v čom je problém: nevie sa o akej triede je reč. Ak je z kontextu jasné, o ktorej triede hovoríme, jednoznačne vieme povedať, či je tvrdenie pravdivé alebo nie. Vtedy hovoríme o výroku.

Ž: *A keď nevieme, o ktorej triede sa hovorí?*

U: Vtedy si za triedu môžeme zvoliť ľubovoľnú triedu. A pravdivostná hodnota závisí od zvolenej triedy.

Ž: *To bude zrejme výroková funkcia.*

U: Správne.

Úloha 1: *Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky, určte ich pravdivostnú hodnotu:*

a) *Číslo 365 je štvorciferné.*

b) *Prší?*

c) *Škola má 856 žiakov.*

d) *Ovocie-zelenina.*

Výsledok: a) *áno, nepravdivý; b) nie; c) nie (lebo nie je jasné, o akej škole je reč), je to výroková funkcia; d) nie*

Príklad 2: V bežnej hovorovej reči používame na určenie alebo odhad počtu osôb či vecí mnoho rôznych slov. V nasledujúcich výpovediach ich nahraďte niektorým zo slov: *aspoň, najviac, práve, každý, nijaký*.

- a) *Nieкто to vyriešil.*
- b) *Peter má sotva osemnásť rokov.*
- c) *Ktokoľvek by to zvládol.*
- d) *Nikto nefajčí.*

U: Začneme úlohou **a)**:

Nieкто to vyriešil.

Ž: Slovo „nieкто“ mám nahradiť niektorým zo slov: *aspoň, najviac, práve, každý, nijaký*. Nevieť sa rozhodnúť medzi slovami: *aspoň jeden a práve jeden*.

U: Ak poviem, že nieкто to vyriešil, nevyklúčujem, že to nemohli byť aj viacerí.

Ž: *Tak potom to bude znieť takto:*

Aspoň jeden to vyriešil.

U: Pokračujme úlohou **b)**:

Peter má *sotva* osemnásť rokov.

Ž: *To znamená, že len-len že má osemnásť rokov, teda môže mať aj menej. Preto slovo „sotva“ nahradím slovom „najviac“. Potom výrok bude znieť takto:*

Peter má najviac osemnásť rokov.

U: Výrok v úlohe **c)** znie takto:

Ktokoľvek by to zvládol.

Ž: *Teda nech vyberiem hocikoho, zvládne to. Slovo „ktokoľvek“ nahradím slovom „každý“. Preto výrok bude znieť:*

Každý by to zvládol.

U: Výborne.

U: Výrok **d)** znie:

Nikto nefajčí.

Ž: *Čo tu treba meniť, prosto „nikto nefajčí“.*

U: To je problém dvojitého záporu v slovenčine. Uznaj, že nasledujúca formulácia znie trochu divne:

Každý nefajčí.

Ž: *No, ale v podstate znamená to isté. Dá sa to ešte povedať aj takto:*

Práve nula ľudí fajčí.

Úloha 1: *V bežnej hovorovej reči používame na určenie alebo odhad počtu osôb či vecí mnoho rôznych slov. V nasledujúcich výpovediach ich nahradte niektorým zo slov: aspoň, najviac, práve, každý, nijaký.*

- a) *Nieкто to rád horúce.*
- b) *Vierka má sotva 300 korún.*
- c) *Hocikto to urobí.*
- d) *Paľo nenašiel nič. (Udajte počet vecí.)*

Výsledok: a) *Aspoň jeden to rád horúce.* b) *Vierka má najviac 300 korún.* c) *Každý to urobí.* d) *Paľo našiel nula vecí.*

Príklad 3: *Odôvodnite, prečo dve nasledujúce tvrdenia nie sú výrok a jeho negácia.*

A : Aspoň 8 z 35 žiakov triedy nosí okuliare.

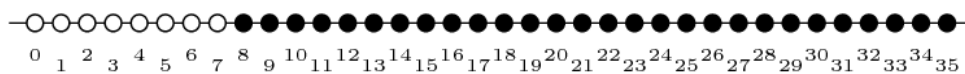
B : Aspoň 8 z 35 žiakov triedy nenosí okuliare.

Posúďte pravdivosť oboch výrokov, ak je pravda, že okuliare nosí práve 12 žiakov.

U: Skús povedať, čo vyjadruje výrok *A*.

Ž: *Znamená to, že v triede nosí okuliare 8 alebo 9 alebo 10 alebo ... alebo všetkých 35 žiakov.*

U: Na číselnej osi to môžeme znázorniť nasledovne:



U: Aká je jeho pravdivostná hodnota?

Ž: *Výrok *A* je pravdivý, keďže v triede je práve 12 žiakov nosiacich okuliare. Teda*

$$p(A) = 1.$$

U: Teraz urč pravdivostnú hodnotu výroku *B*.

Ž: *Najprv určím, koľko žiakov v triede nenosí okuliare. Teda odčítam: počet všetkých žiakov mínus počet žiakov nosiacich okuliare, čiže:*

$$35 - 12 = 23.$$

U: Ideš na to správne. No a výrok *B* hovorí, že

Aspoň 8 z 35 žiakov triedy **nenosí** okuliare.

Znamená to, že okuliare **nenosí** 8 alebo 9 alebo ... alebo všetkých 35 žiakov.

Ž: *Do toho spadá aj počet 23. Preto aj výrok *B* je pravdivý, čiže*

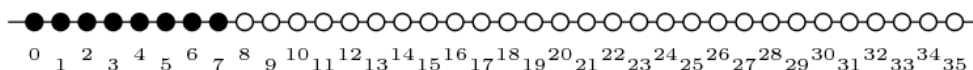
$$p(B) = 1.$$

U: Už len stačí odpovedať na pôvodnú otázku: „Prečo výroky *A* a *B* nie sú výrok a jeho negácia?“

Ž: *Tak to je jasné, nemajú opačnú pravdivostnú hodnotu.*

U: Správne. Keď sme už pri tom, skús povedať negáciu výroku *A*.

Ž: *Ak si dobre pamätám, negácia má zahŕňať všetky ostatné možnosti, ktoré nezahŕňa pôvodný výrok. Preto negácia musí hovoriť o tom, že v triede nosí okuliare 0 alebo 1 alebo ... alebo 7 žiakov.*



U: Skrátené

$\neg A$: Najviac 7 z 35 žiakov triedy nosí okuliare.

Úloha 1: *Odôvodnite, prečo dve nasledujúce tvrdenia nie sú výrok a jeho negácia.*

A : Najviac 20 z 30 žiakov triedy sú dievčatá.

B : Najviac 20 z 30 žiakov triedy sú chlapci.

Posúďte pravdivosť obidvoch výrokov, ak je pravda, že v triede je práve 12 dievčat.

Výsledok: $p(A) = 1$, $p(B) = 1$

Príklad 4: *Negujte nasledujúce výroky a určte pravdivostné hodnoty pôvodných aj negovaných výrokov.*

$$A : 4\sqrt{5} > \sqrt{80};$$

$$B : 2\sqrt{3} = \sqrt{13}.$$

U: Začni výrokom *A*. Urč jeho negáciu.

Ž: *Znamienko > zmením na opačné, teda <. Negovaný výrok bude znieť takto:*

$$\neg A : 4\sqrt{5} < \sqrt{80}.$$

U: No, neviem, neviem, ... Skús určiť pravdivostné hodnoty oboch výrokov a potom sa uvidí.

Ž: *Zoberiem kalkulačku ...*

U: Skúsme to bez kalkulačky.

Ž: *No dobre. Tak $4\sqrt{5}$ upravím tak, že dám číslo 4 pod odmocninu. Potom dostanem:*

$$4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}.$$

Aha ... čísla $4\sqrt{5}$ a $\sqrt{80}$ sa rovnajú.

U: No vidíš. Pôvodný výrok *A* aj tvoja vyššie uvedená negácia $\neg A$ sú preto nepravdivé. *A* to predsa nemôže byť. Výrok a jeho negácia musia mať predsa opačnú pravdivostnú hodnotu.

Ž: *Takže tá negácia nie je dobrá.*

U: Negácia musí zahŕňať všetky ostatné možnosti. Preto ak negujeme znamienko $>$, dostaneme \leq .

Ž: *Jasné. Teda správna negácia výroku *A* vyzerá takto:*

$$\neg A : 4\sqrt{5} \leq \sqrt{80}.$$

Pravdivostné hodnoty oboch výrokov sú

$$p(A) = 0, p(\neg A) = 1.$$

U: Takže negovať výrok

$$B : 2\sqrt{3} = \sqrt{13}$$

už pre teba nebude problém.

Ž: *Ak negujem =, dostanem znamienko \neq . Preto negovaný výrok znie:*

$$\neg B : 2\sqrt{3} \neq \sqrt{13}.$$

U: OK. Ešte urč ich pravdivostné hodnoty.

Ž: Na prvý pohľad nevidím, či sa tie čísla naozaj rovnajú alebo nie. Takže v čísle $2\sqrt{3}$ dám číslo 2 pod odmocninu a dostanem:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

A to je menej ako $\sqrt{13}$, preto platí

$$2\sqrt{3} < \sqrt{13}.$$

U: Správne. Zhrňme to. Výrok B je nepravdivý, jeho negácia $\neg B$ platí. Čiže

$$p(B) = 0, p(\neg B) = 1.$$

Úloha 1: Negujte nasledujúce výroky a určte pravdivostné hodnoty pôvodných aj negovaných výrokov.

$$A : 3\sqrt{7} > \sqrt{63};$$

$$B : 5\sqrt{2} = \sqrt{60}.$$

Výsledok:

$$\neg A : 3\sqrt{7} \leq \sqrt{63}, p(A) = 0, p(\neg A) = 1;$$

$$\neg B : 5\sqrt{2} \neq \sqrt{60}, p(B) = 0, p(\neg B) = 1$$

Príklad 5: *Pani Nováková sa chválila susedke: „Všetky moje deti ovládajú aspoň tri cudzie jazyky.“ Neskôr susedka zistila, že pani Nováková nehovorila pravdu. Čo z toho možno usúdiť? Vyberte si jednu z nasledujúcich možností:*

A : Žiadne dieťa pani Novákovej neovláda viac ako dva cudzie jazyky.

B : Všetky deti pani Novákovej ovládajú menej ako tri cudzie jazyky.

C : Aspoň jedno dieťa pani Novákovej ovláda iba dva cudzie jazyky.

D : Aspoň jedno dieťa pani Novákovej ovláda najviac dva cudzie jazyky.

Ž: *Pani Nováková hovorí, že **všetky** jej deti niečo zvládajú. Nevie, koľko má detí ...*

U: No, to až tak nevedí.

Ž: *Takže negácia musí hovoriť o tom, že **niektoré** jej dieťa to **neovláda**. Teda:*

Niektoré dieťa pani Novákovej **neovláda** aspoň tri cudzie jazyky.

U: Preformuluj slovo „niektoré“ matematicky jasnejšie.

Ž: *Tak, hádam:*

Jedno dieťa pani Novákovej **neovláda** aspoň tri cudzie jazyky.

U: Slovo „jedno“ sa väčšinou chápe v zmysle **práve jedno**. No negácia musí zahŕňať všetky ostatné možnosti. Čo keď to boli dve deti, ktoré to nezvládali?

Ž: *Aha, takže skôr takto:*

Aspoň jedno dieťa pani Novákovej **neovláda aspoň tri** cudzie jazyky.

U: Výborne.

Ž: *Teda možnosti A a B vylučujem, vyberám si z možností C a D.*

U: Skús tvoju formuláciu „neovláda aspoň tri“ preštylizovať tak, aby tam bolo slovo „ovláda“.

Ž: *Teda neovláda tri, štyri, päť, ... cudzích jazykov ... no môže **ovládať menej ako tri**, teda dva, jeden alebo žiaden cudzí jazyk. Takže negácia pôvodného tvrdenia môže znieť aj takto:*

*Aspoň jedno dieťa pani Novákovej **ovláda menej ako tri** cudzie jazyky.*

U: Ktorú z možností C a D si vyberáš?

Ž: *Možnosť C hovorí, že*

*Aspoň jedno dieťa pani Novákovej **ovláda iba dva** cudzie jazyky.*

To nie je ono, čo keď ovláda iba jeden cudzí jazyk ... Ostáva možnosť D. Tam je slovné spojenie „aspoň tri“ nahradené spojením „najviac dva“. A to je v tomto prípade to isté.

U: OK. Ak Pani Nováková nehovorila pravdu, tak z toho možno usúdiť, že

Aspoň jedno dieťa pani Novákovej **ovláda najviac dva** cudzie jazyky.

Úloha 1: *Pán Dežko povedal: „Všetky moje deti hrajú na nejakom hudobnom nástroji.“ Neskôr jeho kolega zistil, že pán Dežko nehovoril pravdu. Čo z toho možno usúdiť? Vyberte si jednu z nasledujúcich možností:*

A : Žiadne dieťa pána Dežka nehrá na nijakom hudobnom nástroji.

B : Všetky deti pána Dežka nehrajú na nijakom hudobnom nástroji.

C : Aspoň jedno dieťa pána Dežka nehrá na nijakom hudobnom nástroji.

D : Aspoň jedno dieťa pána Dežka hrá na jednom hudobnom nástroji.

Výsledok: *C*

Príklad 6: *Negujte nasledujúce výroky (výrokové funkcie) bez použitia slovného spojenia „Nie je pravda, že“:*

A : Škola má najviac 500 žiakov.

B : V triede je menej ako 20 žiakov.

C : Aspoň jeden z vás nemá domácu úlohu.

D : Každý žiak triedy má krátke vlasy.

E : Prihlásili sa práve šiesti žiaci.

F : Nikto neprišiel.

U: Začnime výrokom

*A : Škola **má najviac 500** žiakov.*

Ž: *Neviem síce o akej škole je reč ...*

U: To nebude problém. Práve to nás musí nabádať k tomu, že negácia má zahŕňať všetky ostatné možnosti.

Ž: *Takže slovné spojenie „najviac 500“ znamená, že tých žiakov môže byť 500, 499, 498, atď.*

U: Ako to bude s negáciou?

Ž: *Tá bude zahŕňať zvyšné počty, teda 501, 502, 503, ...*

U: Sformuluj to.

Ž:

*$\neg A$: Škola **má aspoň 501** žiakov.*

U: Pokračujme negáciou výroku

*B : V triede **je menej ako 20** žiakov.*

Ž: *To znamená, že ich **je najviac 19**, teda 19, 18, 17, ... Negácia má zahŕňať všetky ostatné možnosti, teda možnosti, keď žiakov v triede je 20, 21, 22, ...*

U: Správne. Slovné spojenie „je menej ako 20“ nahradíme spojením „je aspoň 20“.

Ž: *Negácia potom znie:*

*$\neg B$: V triede **je aspoň 20** žiakov.*

U: Výrok *C* znie:

*C : **Aspoň jeden** z vás **nemá** domácu úlohu.*

Ž: *To znamená, že domácu úlohu nemá jeden, dvaja, ... alebo aj všetci žiaci. Opak toho je, že*

***Nula** z vás **nemá** domácu úlohu.*

Respektíve

***Nikto** z vás **nemá** domácu úlohu.*

U: Ináč povedané

$\neg C$: **Všetci** z vás **majú** domácu úlohu.

U: Nasleduje výrok

D : **Každý** žiak triedy **má** krátke vlasy.

Ž: *Negácia bude hovoriť o tom, že:*

Nie každý žiak triedy **má** krátke vlasy.

Teda

$\neg D$: **Nejaký** žiak triedy **nemá** krátke vlasy.

U: Správne. Slovo „nejaký“ môžeme nahradiť matematicky korektnejším slovným spojením „aspoň jeden“. Potom negácia výroku D bude

$\neg D$: **Aspoň jeden** žiak triedy **nemá** krátke vlasy.

U: Výrok E znie:

Prihlásili sa **práve šiesti** žiaci.

Ž: *Negácia musí zahrnúť všetky ostatné možnosti, teda mohol sa prihlásiť ľubovoľný iný počet žiakov, len nie práve šesť. Čiže menej alebo viac ako šesť. Preto negácia môže znieť:*

$\neg E$: *Prihlásilo sa* **menej alebo viac ako šesť** žiakov.

U: Ak použijeme slová „najviac“ a „aspoň“, tak negáciu môžeme preformulovať aj takto:

$\neg E$: *Prihlásilo sa* **najviac päť alebo aspoň sedem** žiakov.

U: Ostáva nám posledný výrok

F : **Nikto neprišiel.**

Opäť tu máme slovenskú špecialitu, a to dvojité zápor. Skús tento výrok preformulovať tak, aby hovoril o počte ľudí, ktorí prišli.

Ž: *Žeby takto:*

F : **Nula ľudí prišlo.**

U: Máš pravdu. Teraz už jeho negácia nebude pre teba žiaden problém.

Ž: *Negácia musí zahrnúť všetky ostatné možnosti, teda mohol prísť jeden, dvaja, ... alebo viacej ľudí. Skrátka*

$\neg F$: **Nieкто prišiel.**

U: Alebo

$\neg F$: **Aspoň jeden človek prišiel.**

Úloha 1: *Negujte nasledujúce výroky (výrokové funkcie) bez použitia slovného spojenia „Nie je pravda, že“:*

A: Vierka má najviac 30 rokov.

B: Mišo má menej ako 20 rokov.

C: Aspoň jeden z vás nemá modré oči.

D: Všetci sú doma.

E: Na stretnutie prišli práve traja.

F: Nikto to nevie.

Výsledok:

$\neg A$: *Vierka má aspoň 31 rokov.*

$\neg B$: *Mišo má aspoň 20 rokov.*

$\neg C$: *Všetci majú modré oči.*

$\neg D$: *Niektor nie je doma.*

$\neg E$: *Na stretnutie prišli najviac dvaja alebo aspoň štyria.*

$\neg F$: *Niektor to vie.*