Logaritmus – operácie s logaritmami, dekadický a prirodzený logaritmus

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Najprv si zopakujme, ako znie ***definícia logaritmu***.

Ž: *Ja si pamätám, že logaritmus súvisí s mocninou, základ logaritmu je základom mocniny s ktorou súvisí. Postupovať môžeme podľa šípok v rámčeku …*

$$\boxed{\log_a u = v}$$

Ž: *… a dostaneme*

$$\log_a u = v \textit{ práve vtedy, keď } a^v = u.$$

U: Pamätáš si to správne. Ešte dodajme, že

$$\text{základ } a \in \mathbb{R}^+ - \{1\},$$

$$\text{logaritmované číslo } u \in \mathbb{R}^+,$$

$$\text{logaritmus } v \in \mathbb{R}.$$

Ináč povedané: logaritmus priradí logaritmovanému číslu u exponent mocniny v s príslušným základom a.

U: Teraz si ukážeme, čo všetko sa dá s logaritmami robiť. Aby to bolo lepšie pochopiteľné a zapamätateľné, začneme príkladmi. Najprv vypočítaj, čomu sa rovná

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 100.$$

Ž: *To nebude ťažké.*

$$\log_{10} 10 = 1, \textit{ lebo } 10^1 = 10.$$

Ďalej

$$\log_{10} 100 = 2, \textit{ lebo } 10^2 = 100.$$

Preto

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3.$$

U: Správne. Teraz skús vypočítať, čomu sa rovná

$$\log_{10} 50 + \log_{10} 20.$$

Ž: *To je už ťažší oriešok. To sa nedá tak pekne vypočítať, lebo neviem zistiť „10 na čo sa rovná 50“, ani „10 na čo sa rovná 20“.*

$$\log_{10} 50 = ?, \text{ lebo } 10^{?} = 50$$

$$\log_{10} 20 = ?, \text{ lebo } 10^{?} = 20$$

U: Skúsme na to použiť kalkulačku. No musíme podotknúť, že na kalkulačke nevieme vypočítať logaritmus s hocijakým základom. Môžeme použiť len dva základy. Jeden z nich je 10, druhý si spomenieme zachvíľu.

Logaritmus so základom 10 nazývame dekadický logaritmus.

Základ 10 tam nemusíme písať, teda

$$\log_{10} u = \log u.$$

Ž: *Takže do kalkulačky nahodím*

$$\log 50 + \log 20 \text{ a dostanem číslo } 3.$$

Výsledok je naozaj pekné číslo.

U: Dajme si dokopy oba príklady, ktoré sme vypočítali:

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 3,$$

$$\log_{10} 50 + \log_{10} 20 = 3$$

a pridajme k nim ešte jeden:

$$\log_{10} 1000 = 3.$$

Ž: *Vidím v tom akurát to, že všetky majú rovnaký výsledok, a to číslo* 3.

U: Nie je to náhoda. Skús zistiť nejakú súvislosť medzi modro znázornenými logaritmovanými číslami z prvých dvoch príkladov s logaritmovaným číslom z tretieho príkladu.

Ž: *Teda zisťujem, ako súvisia čísla* 10 *a* 100*, prípadne* 50 *a* 20 *s číslom* 1000*?*

U: Presne tak.

Ž: *No, ak sa nemýlim, ich súčinom je číslo* 1000*, teda*

$$10 \cdot 100 = 1000,$$

$$50 \cdot 20 = 1000.$$

U: Správne. Skutočne platí, že

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 100 = \log_{10}(10 \cdot 100) = \log_{10} 1000 = 3,$$

$$\log_{10} 50 + \log_{10} 20 = \log_{10}(50 \cdot 20) = \log_{10} 1000 = 3.$$

Povedané slovne: súčet logaritmov s tým istým základom sa rovná logaritmu súčinu. Respektíve naopak:

logaritmus súčinu sa rovná súčtu logaritmov s tým istým základom.

Ž: *A nie je to náhoda? Vyšlo by nám to aj v iných príkladoch?*

U: Veľmi dobrá otázka. Samozrejme, najlepšou odpoveďou na ňu je dôkaz, môžeš sa oň pokúsiť. Vo všeobecnosti teda ***pre každé*** $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, ***pre každé*** u, $v \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v.$$

Pripomeňme si, že jedným z dôvodov zavedenia logaritmu do matematiky, bola práve vyššie uvedená vlastnosť. Pán Kepler potreboval pri svojich astronomických výskumoch počítať so skutočne atronomickými číslami. Keďže sčítanie je jednoduchšie ako násobenie, potreboval násobenie previesť na sčítanie. No a logaritmus bol na to priam stvorený.

U: Ako to bude vyzerať, keď budeme logaritmovať podiel?

Ž: *Analogicky by to mohlo súvisieť s odčítaním.*

U: Presne tak. Keď logaritmus súčinu sa rovná súčtu logaritmov, tak

logaritmus podielu sa bude rovnať rozdielu logaritmov s tým istým základom.

Môžeme teda napísať, že ***pre každé*** $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, ***pre každé*** u, $v \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v.$$

Ž: *A ako to bude s logaritmom súčtu, respektíve rozdielu? Čiže čomu sa rovná*

$$\log_a(u+v) \text{ prípadne } \log_a(u-v)\,?$$

U: Tu ťa sklamem. Na to vzorce nie sú.

Ž: *Ak to zhrniem, zatiaľ sme si povedali vzorce pre logaritmus súčinu a podielu, vzorce pre logaritmus súčtu a rozdielu neexistujú a ako to bude s logaritmom mocniny? Ako to bude vyzerať napríklad s*

$$\log_a u^n\,?$$

U: Najprv si to vysvetlíme pre prípad, že exponent mocniny je prirodzené číslo, teda $n \in \mathbb{N}$. Nezabúdajme, že základ logaritmu $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a základ logaritmovanej mocniny $u \in \mathbb{R}^+$. Mocninu u^n môžeme napísať ako súčin n u-čiek.

Ž: *To je jasné:*

$$\log_a u^n = \log_a(\underbrace{u \cdot u \cdot \dots \cdot u}_{n}) = \dots$$

U: Teraz použijeme vzorec pre logaritmus súčinu, ktorý sa rovna súčtu logaritmov a dostaneme

$$\ldots = \underbrace{\log_a u + \log_a u + \cdots + \log_a u}_{n} = \ldots$$

Ž: *No a keď n-krát spočítame ten istý logaritmus, tak dostaneme:*

$$\ldots = n \cdot \log_a u.$$

U: Výsledný vzorec potom vyzerá takto:

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u.$$

Ž: *Teda exponent mocniny n dám pred logaritmus.*

U: Aj tak sa to dá povedať. Toto pravidlo však platí nie len pre prirodzený exponent, ale aj pre reálny exponent. Môžeme teda napísať, že ***pre každé*** $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, ***pre každé*** $u \in \mathbb{R}^+$ a ***pre každé*** $n \in \mathbb{R}$ platí:

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u.$$

Ž: *To sú už všetky vzorce pre logaritmy?*

U: Ostáva nám ešte posledný. Už sme si spomenuli, že na kalkulačke vieme vypočítať len logaritmy s dvoma základmi:

- ak je ***základ*** rovný číslu 10, hovoríme o ***dekadickom logaritme***,
- ak je ***základ*** rovný Eulerovmu číslu e, hovoríme o ***prirodzenom logaritme***.

Ž: *O Eulerovom čísle som už niečo počul. Je to nejaká konštanta, no neviem aká.*

U: Eulerovo číslo e je, popri Ludolfovom čísle π, asi najdôležitejšou matematickou konštantou. Jeho približná hodnota je

$$e \doteq 2,718.$$

No za popularitou čísla π značne zaostáva. A treba povedať, že neprávom. Keď sa človek okolo seba rozhliadne, takmer určite zavadí o niečo, v čom hrá úlohu číslo e. Súvisí so zloženým úrokom, rastom baktérií, elektrickým kondezátorom či s prieskumom verejnej mienky.

Ž: *Znie to naozaj veľmi zaujímavo, tuším si o tom niečo zistím.*

U: Vráťme sa k nášmu prirodzenému logaritmu. Namiesto zápisu

$$\log_e u,$$

je zaužívaný skrátený zápis

$$\ln u,$$

z latinského „logaritmus naturalis“, teda prirodzený logaritmus.

$$\boxed{\log_e u = \ln u}$$

Ž: *OK. Ak sa dobre pozerám na kalkulačku, je tu tlačidlo* log *na výpočet dekadického logaritmu a tlačidlo* ln *na výpočet prirodzeného logaritmu. Ale ako vypočítam napríklad*

$$\log_2 5\,?$$

U: Na to nám poslúži posledný vzorec pomocou ktorého môžeme meniť základ logaritmu. ***Pre každé*** a**,** $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, ***pre každé*** $u \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$

Ž: *Aha, na pravej strane vzorca mám iný základ* b*. V čitateli zlomku logaritmujem pôvodné logaritmované číslo* u *a v menovateli zlomku logaritmujem pôvodný základ* a*.*

U: Skús teraz vypočítať $\log_2 5$.

Ž: *Použijem kalkulačku. No najprv si daný logaritmus prepíšem pomocou vzorca na dekadický logaritmus:*

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{\log 5}{\log 2} \doteq \frac{0,69897}{0,30103} \doteq 2,322.$$

U: Na záver ešte zhrňme najčastejšie používané vzťahy s logaritmami. Niektoré sme uviedli v tejto téme, iné, keď bola zavedená ***definícia logaritmu***. Poriadne si ich prezri.

Pre a, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, u, $v \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$ platí:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^n = n$$

$$a^{\log_a u} = u$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u$$

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$

$$\log_{10} u = \log u$$

$$\log_e u = \ln u$$

Príklad 1: *Vypočítajte:*

a) $\log_5 10 + \log_5 12{,}5$;

b) $4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12$.

Ž: *Začnem úlohou* **a)***:*

$$\log_5 10$$

neviem určiť spamäti, lebo neviem

$$5 \textit{ na čo sa rovná } 10.$$

Takže použijem kalkulačku.

U: Neunáhli sa. Ani to by nebolo také jednoduché, lebo na kalkulačke vieš vypočítať iba dekadický alebo prirodzený logaritmus, teda logaritmus so základom 10 alebo e. No ty máš základ 5. Musel by si použiť vzorec na zmenu základu. Skúsme sa však zaobísť bez kalkulačky.

Ž: *Už mi ťuklo: súčet logaritmov sa rovná logaritmu súčinu.*

U: Áno, ak majú rovnaké základy, a to majú. Tak poďme na to.

Ž: *Čiže:*

$$\log_5 10 + \log_5 12{,}5 = \log_5(10 \cdot 12{,}5) = \log_5 125 = \dots$$

U: Tento logaritmus už hravo vypočítaš z hlavy:

$$5 \text{ na } \textbf{\textit{čo}} \text{ sa rovná } 125?$$

Ž:

$$5^3 = 125,$$

preto výsledok logaritmu je

$$= 3.$$

U: Pokračujme úlohou ***b)***.

Ž: *Tu mám tiež súčet a rozdiel logaritmov.*

U: Nie tak celkom. Dva logaritmy sú vynásobené číslom. Preto najprv použi vzorec pre logaritmus mocniny.

Ž: *Ak si dobre pamätám, tak vyzerá nejako takto:*

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u.$$

Exponent mocniny dám pred logaritmus.

U: My ho však musíme použiť obrátene. Teda zo súčinu čísla a logaritmu urobíme logaritmus mocniny. Tak dostaneme:

$$4 \cdot \log_6 3 + 5 \cdot \log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 3^4 + \log_6 2^5 - \log_6 12 = \dots$$

Ž: *Teraz z toho urobím jeden logaritmus, a to logaritmus zlomku:*

$$\ldots = \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{12} = \ldots$$

U: Správne, keďže od prvých dvoch logaritmov sme tretí odpočítali, musel tam byť logaritmus podielu, respektíve zlomku.

Ž: *Teraz to už len upravím, pričom číslo* 12 *prepíšem na súčin čísel* 4 *a* 3. *Tak dostanem:*

$$\ldots = \log_6 \frac{3^4 \cdot 2^5}{2^2 \cdot 3} = \log_6(3^3 \cdot 2^3) = \ldots$$

Ostáva vynásobiť $3^3 \cdot 2^3$.

U: To by bolo zbytočné. Obe mocniny majú rovnaký exponent, preto predchádzajúci logaritmus môžeme napísať ako

$$\ldots = \log_6(3 \cdot 2)^3 = \log_6 6^3 = \ldots$$

Už sa len opýtame:

6 na ***čo*** sa rovná 6^3?

Ž: *Odpoveď je jasná:*

$$6^3 = 6^3,$$

preto výsledok logaritmu je

$$= 3.$$

U: Správne.

Úloha 1: *Vypočítajte:*

a) $\log_2 10 + \log_2 6{,}4$;

b) $5 \cdot \log 5 + 6 \cdot \log 2 - \log 20$.

Výsledok: *a)* 6; *b)* 4

Príklad 2: *Zistite, či je daný výraz kladný:*

$$\log_2 6 + \log_2 0{,}8 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 25.$$

Ž: *Jednotlivé logaritmy neviem vypočítať z hlavy, nie sú to pekné čísla.*

U: Tak to všetko upravme na jeden logaritmus. Použijeme pri tom tri vzorce, a to: pre logaritmus mocniny, logaritmus súčinu a logaritmus zlomku.

Ž: *Ale veď v úlohe sa nič z toho nevyskytuje.*

U: To preto, lebo ich použijeme v opačnom poradí, teda:

$$n \cdot \log_a u = \log_a u^n,$$

$$\log_a u + \log_a v = \log_a (u \cdot v),$$

$$\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v},$$

pričom $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, u, $v \in \mathbb{R}^+$.

Ž: *Aha, . . . Takže najprv z posledného logaritmu urobím logaritmus mocniny. Tak dostanem:*

$$\log_2 6 + \log_2 0{,}8 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 25 = \log_2 6 + \log_2 0{,}8 - \log_2 25^{\frac{1}{2}} = \ldots$$

U: Pripomeňme si, ako je definovaná mocnina so zlomkom v exponente, teda ***mocnina s racionálnym exponentom***.

Ž: *Ak si dobre pamätám, tak to nejak súvisí s odmocninou.*

U: Presne tak:

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25} = 5.$$

Ž: *Predchádzajúci výraz sa potom rovná*

$$\ldots = \log_2 6 + \log_2 0{,}8 - \log_2 5 = \ldots$$

U: Teraz tu máme súčet a rozdiel logaritmov s tým istým základom. Môžeme z toho urobiť jeden logaritmus, a to:

$$\ldots = \log_2 \frac{6 \cdot 0{,}8}{5} = \log_2 \frac{4{,}8}{5} = \ldots$$

Ž: *Nepáči sa mi to desatinné číslo v čitateli, preto celý zlomok rozšírim číslom* 10 *a dostanem:*

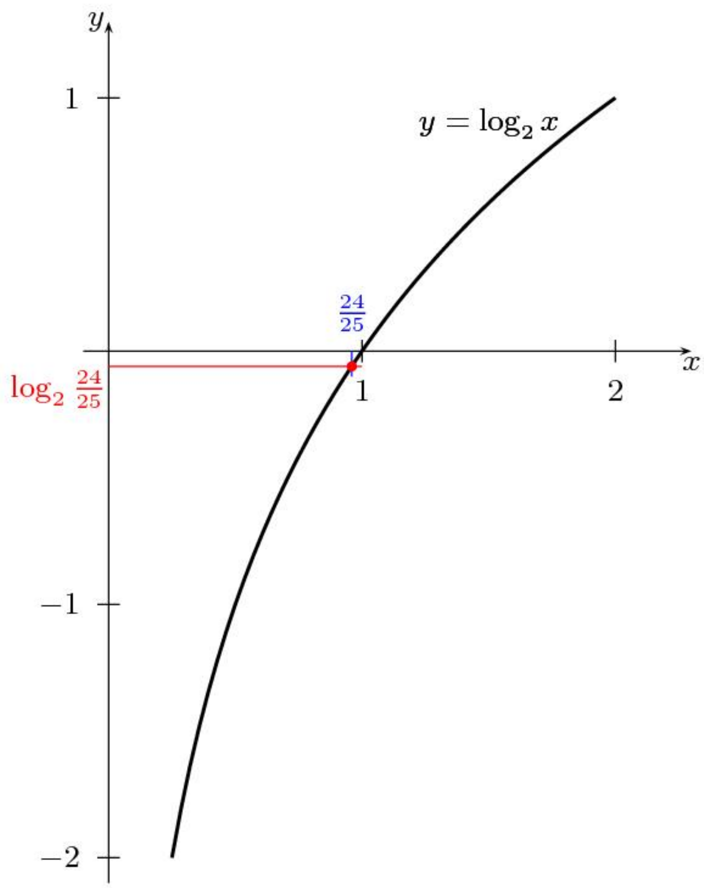
$$\ldots = \log_2 \frac{48}{50} = \log_2 \frac{24}{25} = \ldots$$

To som si veľmi nepomohol, ten logaritmus aj tak neviem vypočítať bez použitia kalkulačky.

U: Nechajme kalkulačku kalkulačkou. Všimni si ešte raz zadanie. Nepotrebujeme vypočítať presnú hodnotu výrazu. Stačí zistiť, či je daný výraz kladný. Pozrime sa na graf funkcie s predpisom

$$y = \log_2 x.$$

Keďže základ 2 je väčší ako číslo 1, ide o rastúcu funkciu.



U: Graf pretína os x v bode $[1, 0]$.

Ž: *Ak sa dobre pozerám, tak logaritmy z čísel väčších ako 1 sú kladné.*

U: Presne tak. My máme logaritmus z čísla $\frac{24}{25}$.

Ž: *No*

$$\frac{24}{25} < 1,$$

preto

$$\log_2 \frac{24}{25} < 0.$$

U: Správne. Vidíme to znázornené aj na grafe. Preto odpoveď znie: výraz zo zadania nie je kladný, je záporný.

Úloha 2: *Zisti, či je daný výraz kladný:*

$$\log_3 25 - \log_3 3 - 3 \cdot \log_3 2.$$

Výsledok: $\log_3 \frac{25}{24} > 0$

Príklad 3: *Vypočítajte:*

a) $\log_6 9$;

b) $\log_3 7 \cdot \log_7 3$.

Ž: *Začnem úlohou* **a)**. *To si vezmem kalkulačku ...*

U: Tak si vezmi. No na nej vieš vypočítať len logaritmy s dvoma základmi, a to 10 a e. Musíš preto previesť tvoj logaritmus so základom 6 na dekadický alebo na prirodzený logaritmus.

Ž: *Na to existuje nejaký vzorec.*

U: Áno. Vyzerá takto:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a},$$

pričom a, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$.

Ž: *Prevediem to na dekadický logaritmus. V čitateli bude logaritmus z logaritmovaného čísla* 9 *a v menovateli logaritmus zo základu* 6*. Tak môžem písať:*

$$\log_6 9 = \frac{\log 9}{\log 6} = \dots$$

U: Teraz už môžeš použiť kalkulačku ...

Ž: *... a dostanem zlomok:*

$$\doteq \frac{0,954}{0,778} \doteq 1,732.$$

U: OK.

Ž: *V úlohe* **b)** *prevediem tiež oba logaritmy na dekadické. Použijem ten istý vzorec. Tak dostanem:*

$$\log_3 7 \cdot \log_7 3 = \frac{\log 7}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 7} = \dots$$

U: Tentokrát sa zaobídeš aj bez kalkulačky. Stačí skrátiť „červený“ logaritmus s „červeným“ a „modrý“ s „modrým“. Výsledok bude potom rovný číslu

$$= 1.$$

Úloha 3: *Vypočítajte:*

a) $\log_3 5$;

b) $\log_2 5 \cdot \log_5 4$.

Výsledok: *a)* 1,176; *b)* 2

Príklad 4: *Čomu sa rovná*

$$\log_5 \frac{5^2 \cdot 2}{2^5},$$

ak $\log_5 2 = p$*?*

Ž: *Použijem vzorce pre logaritmus súčinu a logaritmus podielu ...*

U: Najprv skús upraviť logaritmovaný zlomok.

Ž: *Aha, dá sa krátiť číslom* 2*. Tak dostanem:*

$$\log_5 \frac{5^2 \cdot 2}{2^5} = \log_5 \frac{5^2}{2^4} = \dots$$

U: Takže stačí použiť vzorec pre logaritmus podielu, ktorý sa rovná rozdielu logaritmov s tým istým základom.

Ž: *Predchádzajúci logaritmus sa potom bude rovnať*

$$\dots = \log_5 5^2 - \log_5 2^4 = \dots$$

U: Vidíme tu dva logaritmy mocniny, preto použijeme vzorec:

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u,$$

pričom $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$.

Ž: *Čiže dostaneme:*

$$\dots = 2 \cdot \log_5 5 - 4 \cdot \log_5 2 = \dots$$

U: A už sme takmer v cieli. Stačí si uvedomiť, že

$$\log_5 5 = 1, \text{ lebo } 5^1 = 5,$$

$$\log_5 2 = p, \text{ podľa zadania.}$$

Ž: *Tak môžem písať, že predchádzajúci výraz sa rovná výrazu:*

$$\dots = 2 - 4p.$$

A to je už výsledok.

Úloha 4: *Čomu sa rovná*

$$\log_3 \frac{5^2 \cdot 3^5}{3^3},$$

ak $\log_3 5 = p$*?*

Výsledok: $2p + 2$

Príklad 5: *Vypočítajte:*

$$\log_2 3 \cdot \log_{27} 16.$$

Ž: *Ja by som použil kalkulačku.*

U: Skúsme sa zaobísť bez nej. No aj keby si kalkulačku použil, musel by si tie dva logaritmy previesť na dekadické, prípadne prirodzené logaritmy. Skrátka, zmeň oba logaritmy na logaritmy s rovnakým základom.

Ž: *S hocijakým?*

U: V podstate áno.

Ž: *Tak ich prepíšem na dekadické logaritmy.*

U: Použijeme pri tom vzorec:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a},$$

pričom a, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$.

Ž: *Tak dostanem:*

$$\log_2 3 \cdot \log_{27} 16 = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 16}{\log 27} = \dots$$

Ale teraz už musím použiť kalkulačku.

U: Daj pokoj s tou kalkulačkou. Prepíš čísla 16 a 27 na mocniny.

Ž: *OK. Tak dostanem:*

$$\dots = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 2^4}{\log 3^3} = \dots$$

U: Teraz sa priam núka použiť vzorec pre logaritmus mocniny, ktorý vyzerá takto:

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u,$$

pričom $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$.

Ž: *Takže exponenty 4 a 3 dám pred logaritmy. Potom sa predchádzajci výraz rovná výrazu:*

$$\dots = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{4 \cdot \log 2}{3 \cdot \log 3} = \dots$$

U: Ostáva skrátiť všetko, čo sa dá a dostaneme výsledok:

$$\dots = \frac{4}{3}.$$

Úloha 5: *Vypočítajte*

$$\log_2 5 \cdot \log_{25} 8.$$

Výsledok: $\frac{3}{2}$

Príklad 6: *Ak* $\log_2 10 = d$, *čomu sa rovná* $\log_{10} 2$*?*

Ž: *Ak som si dobre všimol, tak v týchto dvoch logaritmoch je zamenené logaritmované číslo za základ a naopak, teda číslo* 2 *za* 10 *a* 10 *za* 2.

U: Správne. Preto $\log_{10} 2$ chceme zapísať pomocou logaritmu so základom 2. Aký vzorec na to použijeme?

Ž: *Vzorec na zmenu základu, ktorý vyzerá takto:*

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$

U: Správne. Pritom a, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$.

Ž: *Tak môžem písať:*

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 10} = \dots$$

U: Čitateľa vieme vypočítať.

Ž: *Áno:*

$$\log_2 2 = 1, \textit{ lebo } 2^1 = 2.$$

Tak sa predchádzajúci podiel rovná

$$\dots = \frac{1}{\log_2 10} = \frac{1}{d}.$$

U: Môžeme preto napísať, že

$$\log_{10} 2 = \frac{1}{d}.$$

Úloha 6: *Ak* $\log_3 6 = d$, *čomu sa rovná* $\log_6 3$*?*
Výsledok: $\frac{1}{d}$

Príklad 7: *Ak* $\log 6 = a$ *a* $\log 3 = b$, *čomu sa rovná* $\log \frac{4}{3}$*?*

Ž: *Základy logaritmov sú všade rovnaké. Preto na úpravu* $\log \frac{4}{3}$ *použijem vzorec pre logaritmus podielu – ten sa rovná rozdielu logaritmov.*

U: Skús.

Ž: *Tak dostanem:*

$$\log \frac{4}{3} = \log 4 - \log 3 = \log 4 - b = ,$$

lebo zo zadania $\log 3 = b$. *No čo mám urobiť s* $\log 4$*?*

U: Keby sme veľmi chceli, môžeme číslo 4 napísať ako mocninu 2^2.

Ž: *A pomôže nám to? Tak dostanem výraz*

$$\ldots = \log 2^2 - b = \ldots$$

U: Ešte môžeme použiť vzorec na logaritmus mocniny:

$$\log_a u^n = n \cdot \log_a u,$$

pričom $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $u \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$. Potom môžeme písať, že predchádzajúci výraz sa rovná výrazu

$$\ldots = 2 \cdot \log 2 - b = \ldots$$

Ž: *Ale stále nám tam ostane* $\log 2$. *A neviem, čo s tým.*

U: Podľa zadania poznáme len logaritmy z čísel 6 a 3. No a nevieme číslo 2 napísať pomocou čísel 6 a 3?

Ž: *Vieme:*

$$2 = \frac{6}{3}.$$

U: A čo ti bráni, aby si to tak urobil?

Ž: *Vlastne nič. Tak dostanem výraz*

$$\ldots = 2 \cdot \log \frac{6}{3} - b = \ldots$$

Opäť použijem vzorec pre logaritmus podielu. Tak dostanem:

$$\ldots = 2 \cdot (\log 6 - \log 3) - b = 2 \cdot (a - b) - b = 2a - 2b - b = 2a - 3b.$$

U: Ak to zhrnieme, môžeme napísať:

$$\log \frac{4}{3} = 2a - 3b.$$

Vidíš, že sme to zvládli.

Úloha 7: *Ak* $\log 10 = a$, $\log 5 = b$, *čomu sa rovná* $\log \frac{4}{5}$*?*

Výsledok: $2a - 3b$