Logaritmus – definícia a základné vlastnosti

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Zoberme si dve čísla, napríklad 128 a 1 024. Máš ich sčítať a vynásobiť … bez kalkulačky. Čo je jednoduchšie?

Ž: *Jednoznačne sčítanie je jednoduchšie. To viem urobiť aj spamäti:*

$$128 + 1\,024 = 1\,152.$$

Ak ich chcem vynásobiť, musím si čísla napísať pod seba, alebo použiť kalkulačku.

U: V dnešnej dobe počítačov samozrejme nie je žiaden problém sčítať, či vynásobiť aj väčšie čísla. No skús sa vžiť do situácie takého Keplera, ktorý žil na prelome 16. a 17. storočia, teda v dobe, kedy o výpočtovej technike nebolo ani chýru, ani slychu. Jeho astronomické pozorovania boli spojené s počítaním s doslova astronomickými číslami. No a to nebola žiadna zábava.

Ž: *To verím. Zrejme si na to najal nejakých počtárov …*

U: No, to neviem, ale pomohol mu istý pán Jost Bürgi – švajčiarsky matematik, ktorý vytvoril tabuľky. Pomocou nich sa násobenie prevádzalo na sčítanie – ty sám si predsa povedal, že je to jednoduchšie.

Ž: *To si teda neviem predstaviť.*

U: Všimni si nasledujúcu tabuľku.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

n	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
2^n	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072	262 144	$\cdots$

Ž: *V prvom riadku idú za sebou celé čísla od nuly vyššie, v druhom sú …*

U: … sú čísla, ktoré predstavujú číslo 2 umocnené na čísla z prvého riadku. Už v 15. storočí si matematici všimli zaujímavý vzťah medzi týmito dvoma riadkami.

Ž: *Aký?*

U: Sčítaniu v prvom riadku zodpovedá násobenie v riadku druhom. Napríklad

$$\text{súčtu } 2 + 3 = 5 \text{ zodpovedá súčin } 4 \cdot 8 = 32.$$

U: Skús nájsť v tabuľke vyššie spomínané čísla 128 a 1 024 a pomocou nej ich vynásob.

Ž: *OK. Číslu* 128 *zodpovedá číslo* 7*, lebo*

$$128 = 2^7.$$

Číslu $1\,024$ *zodpovedá číslo* 10, *lebo*

$$1\,024 = 2^{10}.$$

Ďalej

$$7 + 10 = 17,$$

preto výsledok spomínaného súčinu bude číslo 2^{17}. *Môžem písať:*

$$128 \cdot 1\,024 = 131\,072.$$

U: Zvládol si to bravúrne. Mohol by si robiť Keplerovi spomínaného počtára. Spomínaný výpočet môžeme zapísať aj takto:

$$128 \cdot 1\,024 = 2^7 \cdot 2^{10} = 2^{7+10} = 2^{17} = 131\,072.$$

Ž: *Jasné. Použili sme pri tom známe pravidlo, podľa ktorého sa pri násobení mocnín s rovnakým základom exponenty spočítajú.*

U: Presne o tom je tá tabuľka. Tabuľka tejto veľmi podobná, ale samozrejme oveľa podrobnejšia, bola základom novej počtárskej techniky. Istý pán Napier jej dal meno ***logaritmická*** z gréckeho ***arithmos tú logú – číslo čísla***.

$$\boxed{\text{logaritmus} \longleftrightarrow \text{arithmos tú logú} \longleftrightarrow \text{číslo čísla}}$$

Ž: *Teda, ak je logaritmus „číslo čísla“, tak podľa tabuľky číslo modrého čísla* 8 *je červené číslo* 3. *Čiže*

logaritmus čísla 8 *je číslo* 3.

U: Presne tak. Len ešte dodajme, že to všetko je pri základe 2. Lebo druhý riadok tabuľky tvoria príslušné mocniny čísla 2. Preto môžeme povedať, že

logaritmus pri základe 2 z čísla 8 je číslo 3.

Symbolicky to zapíšeme nasledovne:

$$\log_2 8 = 3.$$

Platí to preto, lebo

$$2^3 = 8.$$

Povieme si to ešte raz, všímaj si pritom šípky v nasledujúcom rámčeku. Ak umocníme základ 2 na výsledok logaritmu 3, tak dostaneme logaritmované číslo 8.

$$\boxed{\log_2 8 = 3}$$

Ž: *Je to trochu komplikované.*

U: Skrátka, výsledkom logaritmu musí byť exponent mocniny. Logaritmus priradí každému číslu exponent odpovedajúcej mocniny so zvoleným základom.

Ž: *Takže logaritmus súvisí s mocninou?*

U: Samozrejme. Presnejšie: ***logaritmická funkcia*** s predpisom $y = \log_a x$ je funkciou inverznou ku funkcii exponenciálnej s predpisom $y = a^x$, pričom základ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Ž: *Uf, ...*

U: Poďme už konečne na definíciu logaritmu.
Logaritmom kladného reálneho čísla u ***pri základe*** $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ***nazývame také reálne číslo*** v***, pre ktoré platí:*** $a^v = u$***. Zapisujeme:***

$$\log_a u = v.$$

Ešte zopár pojmov:

- a nazývame ***základ logaritmu***,
- u je ***logaritmované číslo***,
- v je ***logaritmus***.

Ž: *Ak som to pochopil správne, základ logaritmu môže byť iba kladné číslo okrem čísla 1, logaritmovať môžem iba kladné číslo, no výsledkom logaritmu môže byť ľubovoľné reálne číslo. Ale prečo je to tak?*

U: Súvisí to s definičným oborom a oborom hodnôt logaritmickej funkcie. Presnejšie, logaritmované číslo u súvisí s definičným oborom, ktorý je

$$D = \mathbb{R}^+.$$

Výsledok logaritmu v zase súvisí s oborom hodnôt, ktorý u logaritmickej funkcie je

$$H = \mathbb{R}.$$

Ž: *A prečo sa základ a nesmie rovnať číslu 1?*

U: Skúsme napísať logaritmus so základom 1, vyzeral by takto:

$$\log_1 u = v.$$

Podľa definície by platilo:

$$1^v = u.$$

Ž: *Jedna na hocičo je vždy jedna.*

U: Presne tak. Dostali by sme

$$1 = u.$$

Ž: *Znamená to, že by sme vedeli vypočítať iba logaritmus z čísla 1, teda*

$$\log_1 1.$$

U: Ani to nie. Ten by mal veľa výsledkov. Napríklad:

$$\log_1 1 = 1, \text{ lebo } 1^1 = 1,$$

$$\log_1 1 = 2, \text{ lebo } 1^2 = 1,$$

$$\log_1 1 = 3, \text{ lebo } 1^3 = 1,$$

atď.

Ž: *To je naozaj lepšie vylúčiť číslo* 1*.*

$$\log_a u = v \iff a^v = u$$

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad v \in \mathbb{R}$$

Ž: *Ešte stále mi to nie je úplne jasné. Môžeme si uviesť nejaké príklady?*

U: Samozrejme. Môžeme si ich rozdeliť na tri časti podľa toho, či ***chceme vypočítať***

- ***logaritmus***,
- ***logaritmované číslo*** alebo
- ***základ logaritmu***.

Ž: *Jasné. Tak začnime* **výpočtom logaritmu***.*

U: Zvoľme úplne jednoduchý príklad, skús vypočítať

$$\log_2 16 = \dots$$

Ž: *Ak som to pochopil správne, tak číslu* 16 *logaritmus priradí exponent mocniny so základom* 2*.*

U: Presne tak. Môžeme sa opýtať: „2 na čo sa rovná 16?"

Ž: *Takže*

$$2^4 = 16,$$

preto

$$\log_2 16 = 4.$$

U: Správne. Ešte raz si všimni rámček. Šípky v ňom nám naznačujú smer vyjadrenia mocniny. Teda základ 2 na výsledok logaritmu sa rovná logaritmovanému číslu 16.

$$\boxed{\log_2 16 = 4}$$

Ž: *To nám vyšlo pekne. Ale čo keby som chcel vypočítať taký* $\log_2 17$*? Dá sa to vôbec?*

U: Správna pripomienka. Tu nám pomôžu tabuľky alebo kalkulačka. No nepôjde to tak hladko. Musíme si zaviesť nové pojmy, a to ***dekadický logaritmus*** a ***prirodzený logaritmus***. No o tom hovorí iná téma.

U: Teraz si uveďme príklad na ***výpočet logaritmovaného čísla***. Skús vypočítať, čomu sa rovná logaritmované číslo $u \in \mathbb{R}^+$, ak $\log_3 u = 4$.

Ž: *Nakreslím si šípky a idem podľa nich.*

$$\boxed{\log_3 u = 4}$$

Ž: *Základ* 3 *umocnený na výsledok logaritmu, t.j. číslo* 4*, sa rovná logaritmovanému číslu* u*. Tak dostanem*

$$u = 3^4 = 81.$$

U: Ostáva nám ***výpočet základu***. Skús vypočítať základ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, ak

$$\log_a 81 = 2.$$

Ináč povedané: „Pri akom základe priradí logaritmus číslu 81 exponent 2?“
Ešte inými slovami povedané (všímaj si pri tom šípky v rámčeku): „Čo na druhú je 81?“

$$\boxed{\log_a 81 = 2}$$

Ž: *No predsa* $9^2 = 81$*. Takže základ* $a = 9$*.*

U: V podstate máš pravdu, i keď menšie nezrovnalosti tu sú. Skúsme to poriadne zapísať. Základ a musíme umocniť na výsledok logaritmu 2, tak dostaneme logaritmované číslo 81. Môžeme písať:

$$a^2 = 81.$$

Môžeš vyriešiť túto kvadratickú rovnicu.

Ž: *To nie je zložité. Celú rovnicu odmocním a dostanem*

$$a = \sqrt{81},$$

z čoho

$$a = 9.$$

Opäť som dostal ten istý výsledok.

U: No, ... výsledok je správny, ale ten postup nie je v poriadku. Vo všeobecnosti platí, že

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Preto správne riešenie bude vyzerať takto:

$$a^2 = 81,$$

$$|a| = 9,$$

$$a = \pm 9.$$

Ž: *Takže za základ môžeme zobrať aj číslo* 9 *aj číslo* -9*?*

U: To zase nie. Z definície vyplýva, že základ a môže byť iba kladné reálne číslo okrem čísla 1, čiže

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

A tomu vyhovuje iba číslo 9. Zhrň výsledok do odpovede.

Ž: *Teda*

$$\log_a 81 = 2 \text{ pre } a = 9.$$

U: Namieste je zhrnutie základných vlastností logaritmov.
Pre každé $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$***, pre každé*** $u \in \mathbb{R}^+$ ***a pre každé*** $x \in \mathbb{R}$ ***platí:***

1. $\log_a a = 1$***;***

2. $\log_a 1 = 0$***;***

3. $\log_a a^x = x$***;***

4. $a^{\log_a u} = u$***.***

Ž: *Prvá vlastnosť je jasná. Keď základ a umocním na prvú (čo je výsledok logaritmu), dostanem opäť a. Teda*

$$\log_a a = 1, \text{ lebo } a^1 = a.$$

U: Ako to bude s druhou vlastnosťou?

Ž: *Hocičo na nultú je vždy jedna. Preto základ a umocnený na nultú (čo je výsledok logaritmu) je rovný číslu* 1*, čo je logaritmovné číslo. Aj to sedí. Môžem písať:*

$$\log_a 1 = 0, \text{ lebo } a^0 = 1.$$

U: Čo tretia vlastnosť?

Ž: *Základ a umocníme na výsledok logaritmu* x *a dostaneme* a^x*, čo je logaritmované číslo. Aj toto je v poriadku. Čiže*

$$\log_a a^x = x, \text{ lebo } a^x = a^x.$$

U: Ostáva nám posledná štvrtá vlastnosť.

Ž: *Tu som bezradný. Neviem, čo sa ňou chce povedať.*

U: Ak základ umocníme na logaritmus s tým istým základom, dostaneme logaritmované číslo.

Ž: *Hm, . . . ale platnosť toho mi veľmi nie je zrejmá.*

U: Označme si $\log_a u$ ako v. Teda

$$\log_a u = v \quad \Longleftrightarrow \quad a^{v} = u$$

Teraz za v v exponente dosadíme príslušný logaritmus (tak, ako nám to ukazuje šípka) a dostaneme to, čo sme chceli:

$$a^{\log_a u} = u.$$

Ž: *Už je to jasnejšie.*

Príklad 1: *Určte, ktoré z daných výrazov majú zmysel. Ak sa to dá, vypočítajte ich:*

a) $\log_3(-9)$;

b) $\log_5(-5)^2$;

c) $\log_5 1$;

d) $\log_8 0$;

e) $\log_1 8$;

f) $\log_{-3} 9$.

U: Skôr, než začneme riešiť danú úlohu, pripomeňme si niečo z teórie. Majme

$$\log_a u.$$

Z akej množiny môže byť základ logaritmu a a z akej množiny môže byť logaritmované číslo u?

Ž: *Ak si dobre pamätám, musia to byť kladné čísla. Dokonca ani nula tam nemôže byť.*

U: Pamätáš si to správne. No pozabudol si ešte na jednu podmienku, základ sa nemôže rovnať ani číslu 1. V úlohe e) si ukážeme, prečo je to tak. Skús to zhrnúť.

Ž: *Čiže pre* $\log_a u$ *platí*

$$\text{základ } a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \text{ logaritmované číslo } u \in \mathbb{R}^+.$$

U: Poďme na samotné úlohy. Začnime úlohou ***a)***.

Ž: *Vo výraze*

$$\log_3(-9)$$

je logaritmované číslo -9 *záporné. Z neho sa logaritmus nedá vypočítať, lebo* 3 *na akékoľvek číslo je vždy väčšie ako nula. Preto daný výraz nemá zmysel.*

U: Správne. Pokračuj úlohou ***b)***.

Ž: *Tu logaritmujeme záporné číslo, ktoré je umocnené na druhú, čiže kladné číslo. To by sa malo dať urobiť.*

U: Áno. Skús to.

Ž: *Teda*

$$\log_5 (-5)^2 = \log_5 25 = \dots$$

U: Teraz číslu 25 má logaritmus priradiť exponent mocniny so základom 5. Ináč povedané (ako nám ukazujú šípky v rámčeku): „5 na čo sa rovná 25?"

$$\boxed{\log_5 25 = ?}$$

Ž: *No predsa*

$$5^2 = 25, \text{ preto } \log_5 25 = 2.$$

U: V poriadku. Výsledok je

$$\log_5(-5)^2 = 2.$$

Pokračujme úlohou ***c)***. Vypočítaj

$$\log_5 1.$$

Ž: *Tu sú aj základ aj logaritmované číslo kladné. No, ... logaritmované číslo je* 1 ...

U: To nevadí. Základ nesmie byť rovný 1 a ten nie je.

Ž: *Aha. Takže sa pýtam tak, ako nám ukazujú šípky v rámčeku: „5 na čo sa rovná* 1*?“*

$$\boxed{\log_5 1 = ?}$$

U: Veľmi dobre sa pýtaš. Odpovedz si.

Ž: *Myslím, že hocičo na nultú je jedna. Teda*

$$\log_5 1 = 0, \text{ lebo } 5^0 = 1.$$

U: Výborne. V úlohe ***d)*** máme vypočítať

$$\log_8 0 = \dots$$

Ž: *Takže sa pýtam podľa šípok v rámčeku: „8 na čo je nula?“*

$$\boxed{\log_8 0 = ?}$$

Ž: *No ... neviem si odpovedať.*

U: Lebo správna odpoveď je, že sa to nedá.

Ž: *Jasné ... logaritmované číslo musí byť kladné. Teda nesmie byť ani nula. Čiže daný výraz nemá zmysel.*

U: Pokračujme úlohou ***e)***, kde máme vypočítať

$$\log_1 8.$$

Ž: *Tu je v základe číslo* 1*, a to nesmie byť.*

U: Správne. Povedzme si to ešte raz po lopate, prečo je to tak. Šípky v rámčeku nám znázorňujú, ako by sme sa mali pýtať. Otázka teda znie: „1 na čo je 8?“

$$\boxed{\log_1 8 = ?}$$

Ž: *No vieme, že* 1 *na hocičo je vždy* 1*. Teda nikdy to nemôže byť* 8.

U: Odpovedal si si sám. Ani tento výraz preto nemá zmysel. V úlohe ***f)*** máme

$$\log_{-3} 9.$$

Ž: *Tu je základ* -3*, teda záporný. Čo nemôže byť. Výraz preto nemá zmysel.*

Úloha 1: *Určte, ktoré z daných výrazov majú zmysel. Ak sa dá, vypočítajte ich:*

a) $\log_7(-7)$*;*

b) $\log_3 1$*;*

c) $\log_1 6$*;*

d) $\log_8 0$*;*

e) $\log_{-3} 8$*.*

Výsledok*: a) nemá zmysel; b)* 0*; c) nemá zmysel; d) nemá zmysel; e) nemá zmysel*

Príklad 2: *Vypočítajte nasledujúce logaritmy:*

a) $\log_2 \sqrt{2}$;

b) $\log_2 \sqrt[4]{8}$;

c) $\log_5 0{,}2$;

d) $\log_{0{,}2} 125$.

Ž: *Najprv si musím ozrejmiť, čo to je logaritmus.*

U: V poriadku. Majme

$$\log_a u = v.$$

Logaritmus priradí logaritmovanému číslu u exponent mocniny so základom a. Ukazujú nám to šípky v rámčeku.

$$\boxed{\log_a u = v}$$

Ž: *Jasné: základ a umocnený na výsledok logaritmu v sa rovná logaritmovanému číslu u. Symbolicky zapísané:*

$$a^v = u.$$

U: Presne tak. Poďme už ku konkrétnym príkladom. Začnime úlohou ***a)***. Tu máme vypočítať $\log_2 \sqrt{2}$.

$$\boxed{\log_2 \sqrt{2} = ?}$$

Ž: *Teda, ako nám ukazujú šípky: „Základ 2 na čo je $\sqrt{2}$?“*

U: Správne. Uvedom si preto, že odmocnina sa dá napísať ako ***mocnina s racionálnym exponentom***.

Ž: *Teda*

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dots$$

U: V krajšom tvare si to už ani nemohol mať napísané. Vieme, že logaritmus priradí číslu $2^{\frac{1}{2}}$ exponent mocniny so základom 2. No a aký je exponent mocniny $2^{\frac{1}{2}}$?

Ž: *No predsa $\frac{1}{2}$. Takže to je výsledok.*

U: Áno. Pre názornosť si to ešte raz pozri zapísané šípkami.

$$\boxed{\log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}}$$

Ž: *Jasné. Základ 2 umocnený na výsledok logaritmu $\frac{1}{2}$ je naozaj $2^{\frac{1}{2}}$, čo je logaritmované číslo.*

U: Pokračujme úlohou ***b)***. V nej máme vypočítať $\log_2 \sqrt[4]{8}$.

Ž: *Teda $\sqrt[4]{8}$ zapíšem ako mocninu s racionálnym exponentom. Tak dostanem:*

$$\log_2 \sqrt[4]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{4}} = \dots$$

U: Najlepšie by bolo, keby to bola mocnina dvoch.

Ž: *To nie je problém. Číslo 8 napíšem ako 2^3. Potom sa predchádzajúci výraz rovná výrazu*

$$\dots = \log_2 \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} = \log_2 2^{3\cdot\frac{1}{4}} = \log_2 2^{\frac{3}{4}} = \dots$$

U: Vidím, že zvládaš prácu s mocninami. Správne si pri umocnení mocniny exponenty vynásobil. Stačí už napísať len výsledok.

Ž: *Takže otázka znie: „2 na čo sa rovná $2^{\frac{3}{4}}$?“ Odpoveď je jasná. Sú to*

$$\dots = \frac{3}{4}.$$

U: Nasleduje úloha ***c)***. Tu máme vypočítať $\log_5 0{,}2$. Čo urobíme s logaritmovaným číslom 0,2?

Ž: *Najlepšie by bolo napísať ho ako mocninu čísla 5, keďže základom logaritmu je práve číslo 5.*

U: Tak to skús. Najprv desatinné číslo prepíš na zlomok.

Ž: *Jasné. Dostanem:*

$$\log_5 0{,}2 = \log_5 \frac{1}{5} = \dots$$

U: Teraz zlomok $\frac{1}{5}$ prepíš tak, aby tam bola ***mocnina s celočíselným exponentom***.

Ž: *Ak si dobre pamätám, keď dám číslo z menovateľa do čitateľa, tak $\frac{1}{5^1}$ sa zmení na 5^{-1}.*

U: Pamätáš si to veľmi dobre.

Ž: *Dostaneme tak výraz:*

$$\dots = \log_5 5^{-1} = \dots$$

Tým pádom výsledok je

$$\dots = -1.$$

Lebo základ 5 umocnený na -1, čo je výsledok logaritmu, je rovný logaritmovanému číslu 5^{-1}.

U: Zvládol si to výborne.

U: Ostáva nám úloha ***d)***.

Ž: *Tu je základ desatinné číslo. To môže byť?*

U: Prečo nie. Základ môže byť predsa z množiny $\mathbb{R}^+ - \{1\}$. Skús si ho napísať ako zlomok. S tým sa lepšie pracuje.

Ž: *Tak dostanem:*

$$\log_{0,2} 125 = \log_{\frac{1}{5}} 125 = \ldots$$

Teraz by som chcel zapísať logaritmované číslo 125 *ako mocninu základu* $\frac{1}{5}$. *No ako?*

U: Takto:

$$125 = 5^3.$$

Teraz 5^3 chceme dať z čitateľa do menovateľa, preto exponent 3 zmeníme na číslo k nemu opačné, teda -3. Tak dostaneme

$$5^3 = \frac{1}{5^{-3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}.$$

Ž: *OK. Predchádzajúci výraz sa potom rovná výrazu:*

$$\ldots = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3.$$

U: Správne.

Úloha 2: *Vypočítajte nasledujúce logaritmy:*

a) $\log_2 \sqrt[3]{2}$;

b) $\log_3 \sqrt[3]{9}$;

c) $\log_2 0{,}5$;

d) $\log_{0,5} 16$.

Výsledok: *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* -1; *d)* -4.

Príklad 3: *Vypočítajte*

$$\log_4(\log_4 4) + \frac{\log_2 16 - 3^{\log_5 5}}{\log_{0{,}1} 10}.$$

Ž: *Tu ale tých logaritmov je ...*

U: Nie je to také zložité, ako sa zdá. Poďme na to pekne postupne. Najprv by sme mohli vypočítať $\log_4 4$, a z toho budeme musieť počítať logaritmus ešte raz.

$$\boxed{\log_4 4 = ?}$$

Ž: *Šípky na obrázku mi ukazujú, ako daný logaritmus vypočítam. Otázka teda znie:*

„4 na čo sa rovná 4?“

Odpoveď je jednoduchá:

$$4^1 = 4, \textit{ preto } \log_4 4 = 1.$$

U: Výborne. Preto môžeme písať:

$$\log_4(\log_4 4) + \frac{\log_2 16 - 3^{\log_5 5}}{\log_{0{,}1} 10} =$$

$$= \log_4 1 + \frac{\log_2 16 - 3^{\log_5 5}}{\log_{0{,}1} 10} = \dots$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Teraz tu mám štyri logaritmy, ktoré je potrebné vypočítať. Začnem prvým:*

$$\log_4 1 = 0, \textit{ lebo } 4^0 = 1.$$

U: Správne, pokračuj ďalej.

Ž: *Potom*

$$\log_2 16 = 4, \textit{ lebo } 2^4 = 16;$$

$$\log_5 5 = 1, \textit{ lebo } 5^1 = 5;$$

$$\log_{0{,}1} 10 = \dots$$

No, neviem 0,1 *na čo sa rovná* 10.

U: Skús si základ 0,1, ktorý je v tvare desatinného čísla, prepísať na zlomok. Potom logaritmované číslo 10 tiež vhodne prepíš.

Ž: *Takže*

$$\log_{0{,}1} 10 = \log_{\frac{1}{10}} 10 = \dots$$

U: No a číslo 10 môžeme napísať ako $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$.

Ž: *Trochu pomalšie. Prečo je to tak?*

U: Súvisí to s tým, ako je definovaná ***mocnina s celočíselným exponenetom***. Záporný exponent môžeme nahradiť opačným k nemu, teda kladným vtedy, keď celú mocninu dáme do menovateľa zlomku. Respektíve, keď v zlomku zameníme čitateľa za menovateľa.

Ž: *Ak som to pochopil správne, v našom prípade tak dostaneme:*

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{10}{1}\right)^{1} = 10.$$

U: Presne tak. Takže vráťme sa k nášmu $\log_{\frac{1}{10}} 10$. Ten sa rovná:

$$\ldots = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = -1,$$

lebo

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}.$$

Ž: *Takže už máme vypočítané všetky potrebné logaritmy na to, aby sme sa mohli vrátiť späť k upravovanému výrazu.*

U: Áno. Pripomeňme si, ako vyzeral:

$$\ldots = \log_4 1 + \frac{\log_2 16 - 3^{\log_5 5}}{\log_{0,1} 10} = \ldots$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Po dosadení dostanem:*

$$\ldots = 0 + \frac{4 - 3^1}{-1} = \frac{4-3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

A to je už výsledok.

Úloha 3: *Vypočítajte*

$$\log_2(\log_2 4) + \frac{\log_3 \frac{1}{3} - 3^{\log_5 1}}{\log_{0,1} 0{,}01} = \ldots$$

Výsledok: 0

Príklad 4: *Určte všetky logaritmované čísla $u \in \mathbb{R}^+$, pre ktoré platí:*

a) $\log_{10} u = -2$;

b) $\log_{0,2} u = 0$;

c) $\log_{100} u = -0{,}5$.

Ž: *Najprv si musím ozrejmiť, čo to je logaritmus.*

U: V poriadku. Majme

$$\log_a u = v.$$

Logaritmus priradí logaritmovanému číslu u exponent mocniny so základom a. Ukazujú nám to šípky.

$$\boxed{\log_a u = v}$$

Ž: *Jasné: základ a umocnený na výsledok logaritmu v sa rovná logaritmovanému číslu u. Symbolicky zapísané:*

$$a^v = u.$$

U: Presne tak. Poďme už ku konkrétnym príkladom. Začnime úlohou ***a)***. Platí, že $\log_{10} u = -2$.

$$\boxed{\log_{10} u = -2}$$

Ž: *To nie je ťažké. Šípky nám to ukazujú:*

$$10^{-2} = u.$$

U: Pripomeňme si, ako je definovaná ***mocnina so záporným exponentom***. Záporný exponent môžeme nahradiť opačným k nemu, teda kladným vtedy, keď celú mocninu dáme do menovateľa zlomku.

Ž: *Takže potom dostaneme:*

$$u = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}.$$

U: Správne. Pokračujme úlohou ***b)***, kde $\log_{0,2} u = 0$.

$$\boxed{\log_{0,2} u = 0}$$

Ž: *Šípky nám opäť ukazujú, že*

$$0{,}2^0 = u.$$

Ak si dobre pamätám, tak hocičo na nultú je jedna.

U: Pamätáš si to správne, len to „hocičo“ nesmie byť nula.

Ž: *Náš prípad to nie je, takže*

$$u = 1.$$

U: Výborne, ostáva nám posledná úloha ***c)***, kde $\log_{100} u = -0{,}5$.

$$\boxed{\log_{100} u = -0,5}$$

Ž: *Opäť sledujem šípky:*

$$100^{-0{,}5} = u.$$

U: V tejto úlohe sa nachádza ***mocnina s racionálnym exponentom***. Preto sa najprv zbavme záporného znamienka v exponente.

Ž: *To už sme mali, záporné znamienko v exponente zameníme za kladné tak, že celú mocninu dáme do menovateľa zlomku. Tak dostaneme:*

$$u = \frac{1}{100^{0{,}5}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \dots$$

U: Zlomku v exponente sa zase zbavíme tak, že ho nahradíme odmocninou. Tak dostaneme zlomok:

$$\dots = \frac{1}{\sqrt[2]{100}} = \frac{1}{10}.$$

Úloha 4: *Určte všetky $u \in \mathbb{R}^+$, pre ktoré platí:*

a) $\log_2 u = -3$;

b) $\log_4 u = 0$;

c) $\log_8 u = -\frac{1}{3}$.

Výsledok: *a)* $\frac{1}{8}$; *b)* 1; *c)* $\frac{1}{2}$

Príklad 5: *Určte všetky základy logaritmov $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, pre ktoré platí:*

a) $\log_a 64 = 3$;

b) $\log_a 2 = 0{,}5$.

U: Zopakujme si najprv, čo to je logaritmus. Majme

$$\log_a u = v.$$

Logaritmus priradí logaritmovanému číslu u exponent mocniny so základom a. Ukazujú nám to šípky.

$$\boxed{\log_a u = v}$$

Ž: *Jasné: základ a umocnený na výsledok logaritmu v sa rovná logaritmovanému číslu u. Symbolicky zapísané:*

$$a^v = u.$$

U: Poďme už ku konkrétnym príkladom. Začnime úlohou ***a)***. Tu $\log_a 64 = 3$.

$$\boxed{\log_a 64 = 3}$$

Ž: *Takže podľa šípok môžem písať:*

$$a^3 = 64.$$

Odtiaľ

$$a = \sqrt[3]{64},$$

teda

$$a = 4.$$

U: OK. Ešte overme, či $a = 4$ patrí do množiny $\mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Ž: *Sedí to.*

U: Pokračujme úlohou ***b)***, kde $\log_a 2 = 0{,}5$.

$$\boxed{\log_a 2 = 0,5}$$

Ž: *Opäť sledujem šípky:*

$$a^{0{,}5} = 2.$$

Čo s tým?

U: Prepíšme desatinné číslo 0,5, ktoré je v exponente mocniny, na zlomok $\frac{1}{2}$. Zlomku v exponente sa potom zbavíme tak, že ho nahradíme druhou odmocninou. Preto môžeme písať:

$$a^{\frac{1}{2}} = 2,$$

teda

$$\sqrt{a} = 2.$$

Ž: *Teraz už len obe strany rovnice umocním na druhú, a dostanem výsledok:*

$$a = 4.$$

U: Len dodajme, že sme to mohli urobiť, lebo $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Teda pod odmocninou sme nemohli mať záporné číslo.

Úloha 5: *Určte všetky základy logaritmov $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, pre ktoré platí:*

a) $\log_a 81 = 2$;

b) $\log_a 2 = -0{,}5$.

Výsledok: *a)* 9; *b)* $\frac{1}{4}$

Príklad 6: *Vypočítajte:*

a) $5^{\log_5 25}$;

b) $6^{\log_6 5}$;

c) $8^{1+\log_8 5}$.

U: Začnem úlohou ***a)***, kde máme vypočítať $5^{\log_5 25}$. Najprv vypočítam logaritmus, ktorý je v exponente. Sleduj šípky.

$$\boxed{\log_5 25 = ?}$$

Ž: *Takže otázka znie: „5 na čo je 25?“ Odpoveď je jasná:*

$$5^2 = 25, \text{ preto } \log_5 25 = 2.$$

U: Správne. Teraz dorieš úlohu.

Ž: *Teda*

$$5^{\log_5 25} = 5^2 = 25.$$

U: Poďme na úlohu ***b)***, kde $6^{\log_6 5}$.

Ž: *Opäť sa pokúsim vypočítať najprv logaritmus, ktorý je v exponente.*

$$\boxed{\log_6 5 = ?}$$

U: Som zvedavý, ako to zvládneš.

Ž: *Ak chcem vypočítať* $\log_6 5$*, tak podľa šípok sa pýtam: „6 na čo sa rovná 5?“ No, ... odpovedať si neviem.*

U: To sa ani nečudujem, $\log_6 5$ nemá „pekný“ výsledok, no

$$6^{\log_6 5}$$

sa dá pekne vypočítať.

Ž: *A to ako?*

U: Dôležité je, že ***základ mocniny aj základ logaritmu sú rovnaké***.

Ž: *Aha, je to číslo* 6.

U: Správne. Uvedomme si, že logaritmus priradí logaritmovanému číslu exponent mocniny s príslušným základom. No a keď tento základ umocníme na spomínaný logaritmus, čo je vlastne exponent, tak musíme dostať logaritmované číslo. Hovorí o tom táto vlastnosť logaritmov:

$$a^{\log_a u} = u, \text{ pričom } a \in \mathbb{R}^+ - \{1\},\ u \in \mathbb{R}^+.$$

Ž: *Takže potom*

$$6^{\log_6 5} = 5.$$

To je už výsledok.

U: Výborne. Precvič si to ešte raz v trochu zložitejšej úlohe ***c)***.

Ž: *Mám vypočítať:*

$$8^{1+\log_8 5} = \dots$$

U: Najprv to rozhoď na dve mocniny využijúc pravidlo:

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s, \text{ pre } a \in \mathbb{R}^+,\ r,\ s \in \mathbb{R}.$$

Ž: *Tak dostanem výraz*

$$\dots = 8^1 \cdot 8^{\log_8 5} = 8 \cdot 5 = 40.$$

U: Správne.

Úloha 6: *Vypočítajte:*

a) $3^{\log_3 27}$;

b) $3^{\log_3 7}$;

c) $7^{2+\log_7 2}$.

Výsledok: *a)* 27; *b)* 7; *c)* 98