Algebraické výrazy s absolútnou hodnotou

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Naučíme sa upravovať také výrazy, ktoré obsahujú absolútnu hodnotu.

Ž: *Mohli by sme si najprv zopakovať, čo to je absolútna hodnota?*

U: Samozrejme.

Ž: *Viem, že napríklad:*

$$|3| = 3 \quad a \quad |-3| = 3.$$

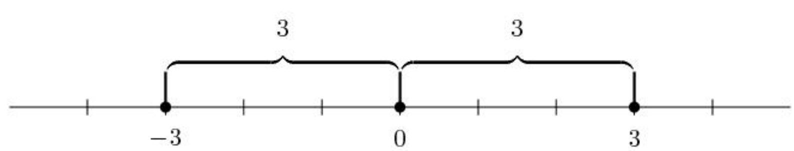
Vždy je to číslo kladné.

U: Pozor, môže to byť aj nula. Teda výsledkom absolútnej hodnoty ľubovoľného čísla je číslo nazáporné.

Ž: *A prečo je to tak?*

U: ***Absolútna hodnota čísla vyjadruje jeho vzdialenosť od nuly na číselnej osi.***

Ž: *Aha. Aj číslo* 3 *aj číslo* -3 *sú na číselnej osi od nuly vzdialené tri jednotky dĺžky.*



U: To bola geometrická interpretácia absolútnej hodnoty. No pre nás bude teraz potrebnejšia definícia absolútnej hodnoty. Skúsme zapísať všeobecne $|x|$ pre ľubovoľné reálne číslo x. Rozdeľme si to na dva prípady:

1. keď je číslo x nezáporné,
2. keď je číslo x záporné.

Ž: *V prvom prípade to bude to isté číslo.*

U: Správne, môžeme teda napísať:

$$\text{pre } x \geqq 0 \text{ je } |x| = x.$$

Ž: *No a v druhom prípade, keď to bude číslo záporné, výsledkom bude číslo kladné ...*

U: No nie hocijaké kladné, ale ***číslo k nemu opačné***. Môžeme teda napísať, že:

$$\text{pre } x < 0 \text{ je } |x| = -x.$$

Ž: *Ale veď absolútna hodnota nemôže byť záporná a tu mám napísané, že je to* $-x$.

U: Pozor. Znamienko mínus v tomto prípade znamené číslo opačné k pôvodnému číslu. Napríklad číslo opačné k číslu -3 je
$$-(-3) = 3.$$
Teda v konečnom dôsledku je to číslo kladné.

Ž: *Jasné.*

> Majme reálne číslo x.
>
> Pre $x \geqq 0$ je $|x| = x$.
>
> Pre $x < 0$ je $|x| = -x$.

U: Teraz sa už venujme výrazom s absolútnou hodnotou. Podľa obtiažnosti ich môžeme rozdeliť na dva prípady:

1. výrazy s jednou absolútnou hodnotou, napr.
$$A(x) = |x - 4| + 5,$$
2. výrazy s viacerými absolútnymi hodnotami, napr.
$$B(x) = |x - 3| + |x + 1|.$$

Ž: *A čo to vlastne znamená upraviť takýto výraz?*

U: Budeme ich chcieť upraviť tak, aby sme sa absolútnej hodnoty zbavili. Ukážeme si to na týchto dvoch výrazoch $A(x)$ a $B(x)$. Začneme prvým z nich. Výraz
$$A(x) = |x - 4| + 5.$$

Ž: *Ten má iba jednu absolútnu hodnotu. Čo s tým?*

U: Využijeme definíciu absolútnej hodnoty. Podľa nej musíme rozlišovať dva prípady:

1. to, čo je v absolútnej hodnote, je nezáporné, čiže $x - 4 \geqq 0$, teda $x \geqq 4$;
2. to, čo je v absolútnej hodnote, je záporné, čiže $x - 4 < 0$, teda $x < 4$.

Ž: *V* **1. prípade** *sa absolútna hodnota nezáporného výrazu rovná tomu istému výrazu, teda*
$$|x - 4| = x - 4.$$
V tomto prípade bude výraz $A(x)$ vyzerať takto:
$$A(x) = x - 4 + 5 = x + 1.$$

U: V ***2. prípade*** máme vyjadriť absolútnu hodnotu záporného výrazu. Bude ňou výraz k nemu opačný, preto
$$|x-4| = -(x-4) = -x+4.$$
Výraz $A(x)$ bude vyzerať takto:
$$A(x) = -x+4+5 = -x+9.$$
Pokús sa to zhrnúť.

Ž: *Teda*
$$A(x) = |x-4|+5 = \begin{cases} -x+9 & \textit{pre } x < 4, \\ x+1 & \textit{pre } x \geqq 4. \end{cases}$$

U: Teraz nás čaká druhý výraz:
$$B(x) = |x-3| + |x+1|.$$

Ž: *Tu sú až dve absolútne hodnoty. Ako to mám teraz rozlíšiť?*

U: Skôr, než budeme riešiť samotnú úlohu, povedzme si najprv niečo o možných spôsoboch jej riešenia. 1. spôsob bude vychádzať priamo z otázky, ktorú si teraz položil. Bude logicky jasný, no trochu zdĺhavý. 2. spôsob bude kratší a prehľadnejší. Ten budeme preferovať aj v riešených príkladoch.

Ž: *Prečo potom nezačneme hneď 2. spôsobom?*

U: Myslím si, že ho lepšie pochopíš po pochopení 1. spôsobu.

Ž: *OK. Tak poďme na to.*

U: Každý z výrazov v absolútnej hodnote, teda výrazy $x-3$ a $x+1$, môže byť buď nezáporný (kladný alebo nulový) alebo záporný. Koľko máme všetkých možností, ako to skombinovať?

Ž: *No, . . .*

- *buď sú oba výrazy nezáporné, teda* $x-3 \geqq 0$ *a zároveň* $x+1 \geqq 0$*;*
- *alebo prvý výraz je nezáporný a druhý záporný, teda* $x-3 \geqq 0$ *a zároveň* $x+1 < 0$*;*
- *alebo prvý výraz je záporný a druhý nezáporný, teda* $x-3 < 0$ *a zároveň* $x+1 \geqq 0$*;*
- *alebo sú oba výrazy záporné, teda* $x-3 < 0$ *a zároveň* $x+1 < 0$*.*

To máme štyri možnosti.

U: Tak ich poďme postupne rozdiskutovať. Začneme ***1. možnosťou***. Keďže sú oba výrazy nezáporné:

$$x - 3 \geqq 0 \quad \text{a zároveň} \quad x + 1 \geqq 0,$$

ich absolútne hodnoty budú tie isté:

$$|x - 3| = x - 3 \quad \text{a} \quad |x + 1| = x + 1.$$

Preto môžeme písať:

$$B(x) = |x - 3| + |x + 1| = (x - 3) + (x + 1) = 2x - 2.$$

Ž: *Môžeme už ísť na 2. možnosť.*

U: Nie tak celkom. Ešte sme nezistili, pre aké x to bude vyhovovať. Na to musíme vyriešiť vyššie spomínané nerovnice:

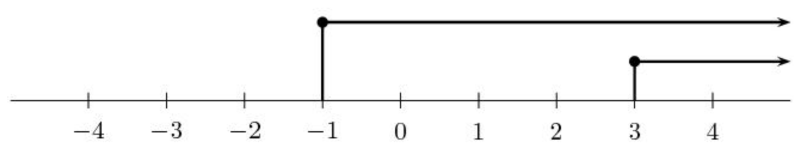
$$x - 3 \geqq 0 \quad \text{a zároveň} \quad x + 1 \geqq 0.$$

Ž: *To nie je zložité:*

$$x \geqq 3 \quad \textit{a zároveň} \quad x \geqq -1,$$

nakreslím si to na číselnú os a vidím, že obe nerovnosti platia pre

$$x \geqq 3.$$



U: Zhrnieme 1. možnosť:

pre $x \in \langle 3, \infty)$ je $B(x) = 2x - 2$.

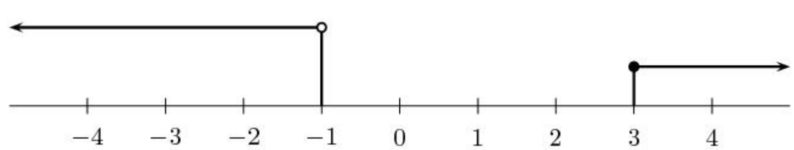
Ž: *Teraz už konečne môžeme ísť na* **2. možnosť**. *Tu je prvý výraz nezáporný a druhý záporný, teda musí platiť:*

$$x - 3 \geqq 0 \quad \textit{a zároveň} \quad x + 1 < 0.$$

To platí práve vtedy, keď

$$x \geqq 3 \quad \textit{a zároveň} \quad x < -1.$$

Nakreslím si to na číselnú os:



U: Vidíme, že obe nerovnosti naraz nemôžu platiť, teda

$$x \in \emptyset.$$

Takže túto možnosť vylúčime.

Ž: *Pokračujeme* **3. možnosťou**. *V tomto prípade je prvý výraz záporný a druhý nezáporný, teda:*

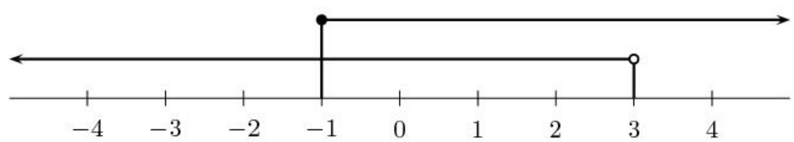
$$x - 3 < 0 \quad \textit{a zároveň} \quad x + 1 \geqq 0.$$

Odtiaľ dostanem:

$$x < 3 \quad \textit{a zároveň} \quad x \geqq -1.$$

Obe nerovnosti teda platia pre

$$x \in \langle -1, 3).$$



U: V tomto prípade je absolútna hodnota prvého záporného výrazu výraz k nemu opačný. Absolútna druhého nezáporného výrazu je ten istý výraz:

$$|x - 3| = -(x - 3) \quad \text{a} \quad |x + 1| = x + 1.$$

Preto môžeme písať:

$$B(x) = |x - 3| + |x + 1| = -(x - 3) + (x + 1) = 4.$$

Zhrň túto tretiu možnosťou.

Ž:

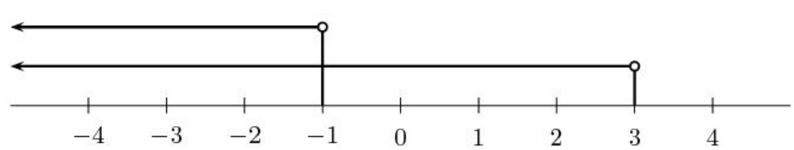
$$\textit{Pre } x \in \langle -1, 3) \textit{ je } B(x) = 4.$$

U: Ostáva nám posledná ***4. možnosť***. Tu sú oba výrazy v absolútnych hodnotách záporné, preto môžeme písať:

$$x - 3 < 0 \quad \text{a zároveň} \quad x + 1 < 0.$$

Ž: *To platí práve vtedy, keď*

$$x < 3 \quad \textit{a zároveň} \quad x < -1.$$



Ž: *Po zakreslení na číselnú os vidím, že obe nerovnosti platia súčasne pre*

$$x < -1.$$

U: No a absolútne hodnoty oboch záporných výrazov budú výrazy k nim opačné:

$$|x-3| = -(x-3) \quad \text{a} \quad |x+1| = -(x+1).$$

Preto môžeme písať:

$$B(x) = |x-3| + |x+1| = -(x-3)-(x+1) = -x+3-x-1 = -2x+2.$$

Zhrň túto možnosť.

Ž:

$$\textit{Pre } x \in (-\infty, -1) \textit{ je } B(x) = -2x+2.$$

U: Celé zhrnutie vidíme zapísané v rámčeku.

$$\boxed{B(x) = |x-3| + |x+1| = \begin{cases} -2x+2 & \text{pre } x \in (-\infty, -1), \\ 4 & \text{pre } x \in \langle -1, 3), \\ 2x-2 & \text{pre } x \in \langle 3, \infty). \end{cases}}$$

Ž: *Teraz by sme si mohli ukázať to kratšie riešenie.*

U: Tak poďme na to. Použijeme ***metódu nulových bodov***. Všimnime si body, kde sa mení zápis algebraického výrazu.

Ž: *To sú tie nulové body? Ale prečo majú práve taký názov: „nulové“?*

U: ***Nulové body sú tie, v ktorých sa absolútne hodnoty (nachádzajúce sa v algebraickom výraze) rovnajú nule.***

Ž: *Aha. A zároveň sa v nich zmení aj zápis výrazov.*

U: Presne tak. V našom prípade to sú body -1 a 3. Tie nám celú množinu reálnych čísel rozdelia na tri intervaly:

$$(-\infty, -1\rangle, \quad \langle -1, 3\rangle, \quad \langle 3, \infty).$$

Krajné body sme zaradili do oboch možných intervalov. Nič zlé sme tým neurobili.

Ž: *Ale veď na každom intervale bude zápis výrazu iný. Mám to chápať tak, že pre každý nulový bod -1 a 3 môžu byť dva rôzne zápisy toho istého výrazu?*

U: Áno. Dôležité je, aby ***ich hodnoty boli v danom bode rovnaké***.

Ž: *Už trochu tuším, prečo je to tak. No, žeby mi to bolo úplne jasné, to sa nedá povedať.*

U: OK. Vrátime sa k tomu po vyriešení úlohy.

Ž: *Dobre.*

U: Vieme, že na každom z týchto troch intervaloch bude daný výraz vyzerať ináč. Ale ako zistíme tie zápisy?

Ž: *Netuším.*

U: Začnime prvým intervalom $(-\infty, -1\rangle$. Chceme zistiť, či budú hodnoty výrazov v absolútnych hodnotách na danom intervale nezáporné alebo záporné. Najjednoduchšie to zistíme tak, že si zoberieme ľubovoľné číslo z daného intervalu ...

Ž: *... napríklad* -2 ...

U: ... áno, a určíme znamienka hodnôt výrazov $x-3$ a $x+1$ v tomto bode. Skús to urobiť.

Ž: *Teda:*

$$-2-3=-5, \text{ preto } x-3<0, \text{ z čoho } |x-3|=-(x-3).$$

Ďalej

$$-2+1=-1, \text{ preto } x+1<0, \text{ z čoho } |x+1|=-(x+1).$$

U: Správne. To všetko je zapísané v červenom stĺpci tabuľky na konci. Výsledný zápis pre výraz $B(x)$ je potom nasledovný:

$$B(x)=|x-3|+|x+1|=-(x-3)-(x+1)=-2x+2.$$

Ž: *V ďalších dvoch intervaloch zrejme postupujem obdobne.*

U: Presne tak. Z druhého intervalu $\langle -1, 3\rangle$ zoberieme napríklad číslo 1.

Ž: *Hodnoty výrazov* $x-3$ *a* $x+1$ *vypočítam ja. Takže*

$$1-3=-2, \text{ preto } x-3<0, \text{ z čoho } |x-3|=-(x-3);$$

$$1+1=2, \text{ preto } x+1>0, \text{ z čoho } |x+1|=x+1.$$

U: OK. Výsledný výraz $B(x)$ potom vyzerá takto:

$$B(x)=|x-3|+|x+1|=-(x-3)+(x+1)=4.$$

Je to zapísané v modrom stĺpci tabuľky.

Ž: *Nakoniec z tretieho intervalu* $\langle 3, \infty)$ *môžeme zobrať napríklad číslo* 4. *Hodnoty výrazov* $x-3$ *a* $x+1$ *sú takéto:*

$$4-3=1, \text{ preto } x-3>0, \text{ z čoho } |x-3|=x-3;$$

$$4+1=5, \text{ preto } x+1>0, \text{ z čoho } |x+1|=x+1.$$

U: Výsledný výraz

$$B(x)=|x-3|+|x+1|=(x-3)+(x+1)=2x-2.$$

Je to zapísané v zelenom stĺpci tabuľky.

Ž: *Výsledok je ten istý. A navyše je to naozaj kratšie riešenie.*

x	$(-\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 3\rangle$	$\langle 3, \infty)$
$\lvert x-3\rvert$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$B(x)$	$-2x+2$	4	$2x-2$

U: Vráťme sa ešte k nie úplne zodpovedanej otázke: „Prečo sa nulové body môžu nachádzať až v dvoch intervaloch?“ Ukážme si to na nulovom bode -1. Ten patrí do intervalu $(-\infty, -1\rangle$ aj do intervalu $\langle -1, 3\rangle$. Podľa tabuľky zisťujeme, že

$$\text{na intervale } (-\infty, -1\rangle \text{ je výraz } B(x) = -2x + 2,$$

$$\text{na intervale } \langle -1, 3\rangle \text{ je výraz } B(x) = 4.$$

Skús zistiť hodnoty oboch výrazov v bode -1.

Ž: *Za premennú x dosadím číslo -1, preto*

$$\textit{na intervale } (-\infty, -1\rangle \textit{ je } B(-1) = -2 \cdot (-1) + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Na druhom intervale $\langle -1, 3\rangle$ nie je čo dosadzovať. Tu sa

$$B(-1) = 4.$$

U: Čo môžeš povedať o oboch hodnotách?

Ž: *Sú rovnaké.*

U: Presne tak. A o to ide. Zápisy môžu byť rôzne, ale hodnoty musia byť rovnaké.

Ž: *Už je to jasné.*

Príklad 1: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$C(x) = |x - 1| - x.$$

U: Je tu iba jedna absolútna hodnota. Čiže máme iba jeden bod, v ktorom je absolútna hodnota rovná nule. Máme teda jeden nulový bod, a to

NB: 1.

U: Pri jednej absolútnej hodnote nie je potrebné upravovať daný výraz pomocou nulových bodov. Ale, keď ti to viacej vyhovuje, aj tak sa dá.

Ž: *Dokončím to už týmto spôsobom. Nulový bod* 1 *nám rozdelí celú množinu reálnych čísel na dva intervaly:*

$$(-\infty, 1\rangle \quad a \quad \langle 1, \infty).$$

U: Číslo 1 máš zahrnuté v oboch intervaloch, ale to nie je na škodu veci. Pokračuj ďalej.

Ž: *Teda z prvého intervalu* $(-\infty, 1\rangle$ *si vezmem napríklad číslo* -1*. Aby som určil znamienko výrazu* $x - 1$*, tak dané číslo dosadím doň:*

$$-1 - 1 = -2, \text{ preto } x - 1 < 0, \text{ z čoho } |x - 1| = -(x - 1).$$

U: Ako bude vyzerať výraz $C(x)$ na tomto intervale?

Ž: *Skúsim:*

$$C(x) = |x - 1| - x = -(x - 1) - x = -x + 1 - x = -2x + 1.$$

U: V tabuľke to charakterizuje červený stĺpec. Pokračuj druhým intervalom $\langle 1, \infty)$. Ten bude v tabuľke zaznačený v modrom stĺpci.

Ž: *Z neho si vezmem napríklad číslo* 2*. Po dosadení do výrazu v absolútnej hodnote dostanem:*

$$2 - 1 = 1, \text{ preto } x - 1 > 0, \text{ z čoho } |x - 1| = x - 1.$$

U: Urč výraz $C(x)$ na tomto intervale.

Ž: *OK. Dostanem:*

$$C(x) = |x - 1| - x = x - 1 - x = -1.$$

x	$(-\infty, 1\rangle$	$\langle 1, \infty)$
$\|x - 1\|$	$-(x - 1)$	$x - 1$
$C(x)$	$-2x + 1$	-1

U: V poriadku. Ja by som predsa len bol za to, aby sme si zapísali aj druhý spôsob riešenia. Bez použitia nulových bodov. Je to v podstate to isté, len trochu ináč zapísané. Teda využijeme definíciu absolútnej hodnoty. Podľa nej musíme rozlišovať dva prípady:

1. to, čo je v absolútnej hodnote, je nezáporné, čiže $x - 1 \geqq 0$, teda $x \geqq 1$;
2. to, čo je v absolútnej hodnote, je záporné, čiže $x - 1 < 0$, teda $x < 1$.

Ž: *V* **1. prípade** *sa absolútna hodnota nezáporného výrazu rovná tomu istému výrazu, teda*

$$|x-1| = x-1.$$

V tomto prípade bude výraz $C(x)$ vyzerať takto:

$$C(x) = x-1-x = -1.$$

U: V ***2. prípade*** máme vyjadriť absolútnu hodnotu záporného výrazu. Bude ňou výraz k nemu opačný, preto

$$|x-1| = -(x-1) = -x+1.$$

Výraz $C(x)$ bude vyzerať takto:

$$C(x) = -x+1-x = -2x+1.$$

Pokús sa to zhrnúť.

Ž: *Čiže*

$$C(x) = |x-1| - x = \begin{cases} -2x+1 & \textit{pre } x \in (-\infty, 1\rangle, \\ -1 & \textit{pre } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Ako si tak porovnávam výsledky z oboch spôsobov riešenia, nie sú rovnaké. Líšia sa v jednom intervale. V prvom riešení vyšiel polouzavretý interval $\langle 1, \infty)$. V druhom riešení vyšiel interval otvorený $(1, \infty)$.

U: To je v poriadku. Nulový bod môže patriť aj do oboch intervalov. Dôležité je, aby hodnota oboch výrazov v danom bode bola rovnaká. Skús to overiť.

Ž: *OK. Na intervale $(-\infty, 1\rangle$ má výraz $C(x)$ tvar*

$$C(x) = -2x+1.$$

Preto jeho hodnota v bode 1 je

$$C(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -2 + 1 = -1.$$

Na intervale $\langle 1, \infty)$ je

$$C(x) = -1,$$

preto aj

$$C(1) = -1,$$

Sedí to, hodnota je tá istá.

Úloha 1: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$D(x) = |x| - x.$$

Výsledok: $D(x) = |x| - x = \begin{cases} -2x & \textit{pre } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ 0 & \textit{pre } x \in (0, \infty) \end{cases}$

Príklad 2: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$E(x) = |x-3| + |x+4|.$$

U: Všimnime si body, kde sa mení zápis algebraického výrazu.

Ž: *Zrejme máte na mysli nulové body. Sú to*

$$\textit{NB: } 3 \ \textit{a} \ -4.$$

U: Áno, sú to nulové body výrazov v absolútnej hodnote. Tie nám celú množinu reálnych čísel rozdelia na tri intervaly:

$$(-\infty, -4\rangle, \quad \langle -4, 3\rangle, \quad \langle 3, \infty).$$

Ž: *Na každom z týchto troch intervaloch bude zrejme daný výraz vyzerať ináč.*

U: Začnime prvým intervalom $(-\infty, -4\rangle$. Chceme zistiť, či budú hodnoty výrazov v absolútnych hodnotách na tomto intervale nezáporné alebo záporné. Najjednoduchšie to zistíme tak, že si zoberie ľubovoľné číslo z daného intervalu.

Ž: *Vezmime napríklad číslo* -5.

U: Ďalej určíme znamienka hodnôt výrazov $x-3$ a $x+4$ v tomto bode.

Ž: *Teda:*

$$-5-3 = -8, \textit{ preto } x-3 < 0, \textit{ z čoho } |x-3| = -(x-3).$$

Ďalej

$$-5+4 = -1, \textit{ preto } x+4 < 0, \textit{ z čoho } |x+4| = -(x+4).$$

U: Správne. To všetko je zapísané v červenom stĺpci tabuľky. Výsledný zápis pre výraz $E(x)$ je potom nasledovný:

$$E(x) = |x-3| + |x+4| = -(x-3) - (x+4) = -x+3-x-4 = -2x-1.$$

Ž: *V ďalších dvoch intervaloch zrejme postupujem obdobne.*

U: Presne tak. Z druhého intervalu $\langle -4, 3\rangle$ zoberieme napríklad číslo 1.

Ž: *Hodnoty výrazov* $x-3$ *a* $x+4$ *vypočítam ja. Takže*

$$1-3 = -2, \textit{ preto } x-3 < 0, \textit{ z čoho } |x-3| = -(x-3);$$

$$1+4 = 5, \textit{ preto } x+4 > 0, \textit{ z čoho } |x+4| = x+4.$$

U: OK. Výsledný výraz $E(x)$ potom vyzerá takto:

$$E(x) = |x-3| + |x+4| = -(x-3) + (x+4) = -x+3+x+4 = 7.$$

Je to zapísané v modrom stĺpci tabuľky.

Ž: *Nakoniec z tretieho intervalu* $\langle 3, \infty)$ *môžeme zobrať napríklad číslo* 4. *Hodnoty výrazov* $x-3$ *a* $x+4$ *sú takéto:*

$$4-3 = 1, \textit{ preto } x-3 > 0, \textit{ z čoho } |x-3| = x-3;$$

$$4+4 = 8, \textit{ preto } x+4 > 0, \textit{ z čoho } |x+4| = x+4.$$

U: Výsledný výraz

$$E(x) = |x-3| + |x+4| = (x-3) + (x+4) = x - 3 + x + 4 = 2x + 1.$$

Je to zapísané v zelenom stĺpci tabuľky. Výsledok môžeme zapísať aj takto:

$$E(x) = |x-3| + |x+4| = \begin{cases} -2x-1 & \text{pre } x \in (-\infty, -4\rangle, \\ 7 & \text{pre } x \in \langle -4, 3\rangle, \\ 2x+1 & \text{pre } x \in \langle 3, \infty). \end{cases}$$

x	$(-\infty,-4\rangle$	$\langle -4,3\rangle$	$\langle 3,\infty)$
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$
$\|x+4\|$	$-(x+4)$	$x+4$	$x+4$
$E(x)$	$-2x-1$	7	$2x+1$

Úloha 2: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$F(x) = 2 \cdot |x+3| - 3 \cdot |5-x|.$$

Výsledok: $F(x) = 2|x+3| - 3|5-x| = \begin{cases} x-21 & \textit{pre } x \in (-\infty, -3\rangle, \\ 5x-9 & \textit{pre } x \in \langle -3, 5), \\ -x+21 & \textit{pre } x \in \langle 5, \infty) \end{cases}$

Príklad 3: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$G(x) = |x^2| + 3|2 - x|.$$

Ž: *Mám tu dve absolútne hodnoty, takže dostanem dva nulové body. Teda body, v ktorých sa výrazy v absolútnych hodnotách rovnajú nule.*

U: Skús sa chvíľu nad úlohou zamyslieť. Môžeš si tým podstatne zjednodušiť riešenie. V prvej absolútnej hodnote máme iba druhú mocninu. Kedy môže byť tá záporná?

Ž: *No, ... vlastne nikdy. Aj druhá mocnina zo záporného čísla je kladná*

$$\textit{(napríklad } (-2)^2 = 4\textit{)}.$$

U: No vidíš. Zmenia sa nejako hodnoty výrazu $|x^2|$, ak v ňom absolútnu hodnotu jednoducho zrušíme?

Ž: *Vlastne ... ani nie. Naozaj platí:*

$$|x^2| = x^2.$$

U: Tak sa náš pôvodný výraz zjednoduší a platí:

$$G(x) = |x^2| + 3|2 - x| = x^2 + 3|2 - x| = \dots$$

Ž: *Jasné, tu máme iba jednu absolútnu hodnotu, tým pádom aj jeden nulový bod.*

U: Dokonca to jednoducho vyriešime bez použitia nulových bodov. Stačí rozdiskutovať možnosti, kedy

1. výraz, ktorý je v absolútnej hodnote, je nezáporný, čiže $2 - x \geqq 0$, z čoho $2 \geqq x$, teda $x \leqq 2$, resp. $x \in (-\infty, 2\rangle$;

2. výraz, ktorý je v absolútnej hodnote, je záporný, čiže $2 - x < 0$, z čoho $2 < x$, teda $x > 2$, resp. $x \in (2, \infty)$.

Ž: *V* **1. možnosti** *sa absolútna hodnota nezáporného výrazu rovná tomu istému výrazu, teda*

$$|2 - x| = 2 - x.$$

V tomto prípade bude výraz $G(x)$ vyzerať takto:

$$G(x) = x^2 + 3|2 - x| = x^2 + 3(2 - x) = x^2 + 6 - 3x = x^2 - 3x + 6.$$

U: V ***2. možnosti*** máme vyjadriť absolútnu hodnotu záporného výrazu. Bude ňou výraz k nemu opačný, preto

$$|2 - x| = -(2 - x) = -2 + x.$$

Výraz $G(x)$ bude vyzerať takto:

$$G(x) = x^2 + 3|2 - x| = x^2 + 3(-2 + x) = x^2 - 6 + 3x = x^2 + 3x - 6.$$

Pokús sa to zhrnúť.

Ž: *Teda*

$$G(x) = |x^2| + 3|2 - x| = \begin{cases} x^2 - 3x + 6 & \textit{pre } x \in (-\infty, 2\rangle, \\ x^2 + 3x - 6 & \textit{pre } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Úloha 3: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$H(x) = |(x-1)^2| - 2|1-x|.$$

Výsledok: $H(x) = |(x-1)^2| - 2|1-x| = \begin{cases} x^2 - 1 & \textit{pre } x \in (-\infty, 1\rangle, \\ x^2 - 4x + 3 & \textit{pre } x \in (1, \infty) \end{cases}$

Príklad 4: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$K(x) = |2x + 1| - 4|x + 3| + |2x + 6|.$$

Ž: *Sú tu tri absolútne hodnoty, tak dostanem tri nulové body.*

U: No, nie tak rýchlo. Skús ten výraz najprv trochu upraviť. Nedá sa nič vyňať z niektorej absolútnej hodnoty?

Ž: *Hm ... z poslednej číslo 2. Tak dostanem:*

$$K(x) = |2x + 1| - 4|x + 3| + |2x + 6| =$$

$$= |2x + 1| - 4|x + 3| + |2(x + 3)| =$$

$$= |2x + 1| - 4|x + 3| + 2|x + 3| =$$

$$= |2x + 1| - 2|x + 3| = \dots$$

A už tu máme tu len dve absolútne hodnoty.

U: No vidíš. Urč nulové body výrazov v absolútnych hodnotách.

Ž: *Na to musím vyriešiť rovnice:*

$$2x + 1 = 0, \quad x + 3 = 0.$$

Tak dostanem:

$$NB\!: -3, \ -\tfrac{1}{2}.$$

U: Tie nám celú množinu reálnych čísel rozdelia na tri intervaly:

$$(-\infty, -3\rangle, \quad \langle -3, -\frac{1}{2}\rangle, \quad \langle -\frac{1}{2}, \infty).$$

Krajné body sme zaradili do oboch možných intervalov.

Ž: *A museli sme?*

U: Nie, nebolo to nutné, no ani sme tým nič nepokazili.

Ž: *Teraz zrejme zistíme, ako vyzerá daný výraz na jednotlivých intervaloch.*

U: Začnime prvým intervalom $(-\infty, -3\rangle$. Chceme zistiť, či budú hodnoty výrazov v absolútnych hodnotách na tomto intervale nezáporné alebo záporné. Najjednoduchšie to zistíme tak, že si zoberieme ľubovoľné číslo z daného intervalu. Skús to.

Ž: *Napríklad* -4.

U: Áno. Ďalej určíme znamienka hodnôt výrazov $2x + 1$ a $x + 3$ v tomto bode.

Ž: *Teda:*

$$2 \cdot (-4) + 1 = -7, \ \textit{preto}\ 2x + 1 < 0, \ \textit{z čoho}\ |2x + 1| = -(2x + 1).$$

Ďalej

$$-4 + 3 = -1, \ \textit{preto}\ x + 3 < 0, \ \textit{z čoho}\ |x + 3| = -(x + 3).$$

U: Správne. To všetko je zapísané v červenom stĺpci tabuľky. Výsledný zápis pre výraz $K(x)$ je potom nasledovný:

$$K(x) = |2x+1| - 2|x+3| = -(2x+1) - 2[-(x+3)] = -2x - 1 + 2x + 6 = 5.$$

Ž: *V ďalších dvoch intervaloch zrejme postupujem obdobne.*

U: Presne tak. Z druhého intervalu $\langle -3, -\frac{1}{2})$ zoberieme napríklad číslo -2.

Ž: *Takže teraz vypočítam hodnoty výrazov* $2x+1$ *a* $x+3$ *pre* $x = -2$*:*

$$2(-2) + 1 = -3, \textit{ preto } 2x+1 < 0, \textit{ z čoho } |2x+1| = -(2x+1);$$

$$-2 + 3 = 1, \textit{ preto } x+3 > 0, \textit{ z čoho } |x+3| = x+3.$$

U: OK. Výsledný výraz $K(x)$ potom vyzerá takto:

$$K(x) = |2x+1| - 2|x+3| = -(2x+1) - 2(x+3) = -2x - 1 - 2x - 3 = -4x - 4.$$

Je to zapísané v modrom stĺpci tabuľky.

Ž: *Nakoniec z tretieho intervalu* $\langle -\frac{1}{2}, \infty)$ *môžeme zobrať napríklad číslo* 1*. Hodnoty výrazov* $2x+1$ *a* $x+3$ *sú takéto:*

$$2 \cdot 1 + 1 = 3, \textit{ preto } 2x+1 > 0, \textit{ z čoho } |2x+1| = 2x+1;$$

$$1 + 3 = 4, \textit{ preto } x+3 > 0, \textit{ z čoho } |x+3| = x+3.$$

U: Výsledný výraz

$$K(x) = |2x+1| - 2|x+3| = (2x+1) - 2(x+3) = -5.$$

Je to zapísané v zelenom stĺpci tabuľky. Výsledok môžeme zapísať aj takto:

$$K(x) = |2x+1| - 2|x+3| = \begin{cases} 5 & \text{pre } x \in (-\infty, -3\rangle, \\ -4x - 4 & \text{pre } x \in \langle -3, -\frac{1}{2}\rangle, \\ -5 & \text{pre } x \in \langle -\frac{1}{2}, \infty). \end{cases}$$

x	$(-\infty, -3\rangle$	$\langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$	$\langle -\frac{1}{2}, \infty)$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-(2x+1)$	$-(2x+1)$	$2x+1$
$\lvert x+3\rvert$	$-(x+3)$	$x+3$	$x+3$
$K(x)$	5	$-4x-4$	-5

Úloha 4: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$L(x) = |3x-1| + 2|x-1| - |1-x|.$$

Výsledok*:* $L(x) = |3x-1| + 2|x-1| - |1-x| = \begin{cases} -4x + 2 & \textit{pre } x \in (-\infty, \frac{1}{3}\rangle, \\ 2x & \textit{pre } x \in \langle \frac{1}{3}, 1), \\ 4x - 2 & \textit{pre } x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$

Príklad 5: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval odmocninu ani absolútnu hodnotu:*

$$M(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

U: Všimni si výraz pod odmocninou. Nevieš naň použiť nejaký vzorec?

Ž: *Viem* $\ldots a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. *Tak dostanem:*

$$M(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = \ldots$$

U: Presne tak. Pokračuj.

Ž: *Druhá odmocnina a mocnina sa navzájom rušia, tak dostaneme výraz:*

$$\ldots = x - 3.$$

U: No, nie tak rýchlo. Skús vypočítať hodnotu pôvodného aj upraveného výrazu pre $x = 1$.

Ž: *OK. Pôvodný výraz má hodnotu:*

$$M(1) = \sqrt{1^2 - 6 \cdot 1 + 9} = \sqrt{4} = 2.$$

U: Teraz upravený výraz ...

Ž: *Takže do* $x - 3$ *dosadím za* x *číslo* 1 *a dostanem:*

$$1 - 3 = -2.$$

Hm ... tie výsledky sú rôzne, líšia sa v znamienku.

U: Chyba bola vo vete: „Druhá odmocnina a mocnina sa navzájom rušia, ...“ Oni sa síce rušia, ale nie tak hladko. Keďže druhá odmocnina môže byť len číslo nezáporné, musíme ***výsledok*** dať ***do absolútnej hodnoty***. Preto môžeme písať:

$$M(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3| = \ldots$$

Ž: *To už je výsledok, nie?*

U: Mohol by byť, no našou úlohou je zbaviť sa aj absolútnej hodnoty.

Ž: *OK. Takže urobím diskusiu, keď výraz v absolútnej hodnote je nezáporný a keď je záporný.*

U: Správne. Pokračuj.

Ž: *Už spomínané delenie vyzerá potom takto:*

1. *to, čo je v absolútnej hodnote, je nezáporné, čiže* $x - 3 \geqq 0$, *teda* $x \geqq 3$;
2. *to, čo je v absolútnej hodnote, je záporné, čiže* $x - 3 < 0$, *teda* $x < 3$.

U: Rozober ***1. možnosť***.

Ž: *Tu sa absolútna hodnota nezáporného výrazu rovná tomu istému výrazu, teda*

$$M(x) = |x - 3| = x - 3.$$

U: V ***2. možnosti*** máme vyjadriť absolútnu hodnotu záporného výrazu. Bude ňou výraz k nemu opačný, preto

$$M(x) = |x - 3| = -(x - 3) = -x + 3.$$

Pokús sa to zhrnúť.

Ž: *Čiže*

$$M(x) = |x - 3| = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \begin{cases} x - 3 & \text{pre } x \in (-\infty, 3\rangle, \\ -x + 3 & \text{pre } x \in (3, \infty). \end{cases}$$

Úloha 5: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval odmocninu ani absolútnu hodnotu:*

$$N(x) = \sqrt{25 - 10x + x^2}.$$

Výsledok: $N(x) = |5 - x| = \begin{cases} 5 - x & \text{pre } x \in (-\infty, 5\rangle, \\ x - 5 & \text{pre } x \in (5, \infty) \end{cases}$

Príklad 6: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu:*

$$P(x) = \frac{x + \sqrt{x^2}}{|x|}.$$

U: Skôr, než budeš odstraňovať absolútnu hodnotu, pokús sa daný výraz upraviť.

Ž: *No, ... odmocnina a druhá mocnina sa rušia, teda*

$$\sqrt{x^2} = x.$$

U: Nesúhlasím. Skús si za x dosadiť napríklad číslo -3. Podľa teba potom platí:

$$\sqrt{(-3)^2} = -3.$$

Vidíš tu nejaký problém?

Ž: **Druhá odmocnina nesmie byť záporná.**

U: Správne. Aby sme to zabezpečili, použijeme absolútnu hodnotu:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Potom*

$$P(x) = \frac{x + \sqrt{x^2}}{|x|} = \frac{x + |x|}{|x|} = \dots$$

U: Ešte ten zlomok rozdeľ na dva, zbavíš sa tým jednej absolútnej hodnoty.

Ž: *Tak dostanem výraz:*

$$\dots = \frac{x}{|x|} + 1 = \dots$$

U: Teraz je už načase zbaviť sa aj druhej absolútnej hodnoty.

Ž: *To nebude ťažké. Rozdelím to na dva prípady:*

1. *výraz v absolútnej hodnote je nezáporný, čiže* $x \geqq 0$;
2. *výraz v absolútnej hodnote je záporný, čiže* $x < 0$.

U: Správne. Čo ďalej?

Ž: *V* **1. prípade** *platí*

$$|x| = x,$$

takže výsledný výraz je

$$P(x) = \frac{x}{|x|} + 1 = \frac{x}{x} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

U: Pokračuj rozobratím ***2. prípadu***.

Ž: *Absolútna hodnota záporného výrazu sa rovná výrazu k nemu opačnému, teda*

$$|x| = -x.$$

Potom výsledný výraz je

$$P(x) = \frac{x}{|x|} + 1 = \frac{x}{-x} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

U: Zhrň to.

Ž: *Čiže*

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (-\infty, 0), \\ 2 & \text{pre } x \in \langle 0, \infty). \end{cases}$$

U: Zabudli sme na veľmi dôležitú vec. Skús vypočítať hodnotu pôvodného výrazu $P(x)$ pre $x = 0$.

Ž: *Za x dosadím nulu, a dostanem:*

$$P(0) = \frac{0 + \sqrt{0^2}}{|0|} = \frac{0}{0} = \dots$$

Aha, ... V menovateli som dostal nulu.

U: Presne tak. Výraz $P(x)$ nemá pre $x = 0$ zmysel.

Ž: *Zabudli sme určiť* **podmienky**. *Mal som zistiť, kedy je menovateľ*

$$|x| = 0.$$

To je presne vtedy, keď

$$x = 0.$$

U: Hlavne, že sme ich určili aspoň dodatočne. Teraz zapíš správny výsledok.

Ž: *Nulu vyhodím z intervalu. Dostanem:*

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (-\infty, 0), \\ 2 & \text{pre } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

U: Teraz je to už v poriadku.

Úloha 6: *Upravte nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval ani odmocninu ani absolútnu hodnotu:*

$$Q(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{|x - 2|}.$$

Výsledok: $Q(x) = 1$, *pre* $x \in \mathbb{R} - \{2\}$