Mocniny s racionálnym exponentom, výrazy s mocninami a odmocninami

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Zamyslel si sa niekedy nad znakom odmocniny $\sqrt{\ }$? Prečo používame práve takúto značku?

Ž: *No, vážne, ... prečo? Nezamýšľal som sa nad tým.*

U: Mnoho vecí (a nielen v matematike) používame dnes už automaticky. No cesta ich zavedenia do života bola kľukatá, plná dobrodružstiev. Nie je tomu ináč ani pri odmocnine.

Ž: *Už som celý nedočkavý. Ako to teda s tou odmocninou je?*

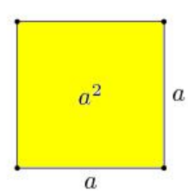
U: Znak odmocniny vznikol z prvého písmena ***r*** latinského slova ***radix***, čo v preklade znamená ***koreň***.

Ž: *No, ... malé r sa trochu podobá na znak odmocniny* $\sqrt{\ }$. *Ale čo má odmocnina spoločné s koreňom?*

U: Dávna predstava odmocniny bola spojená s geometriou, a to konkrétne s obsahom štvorca. Keď matematici chceli vypočítať dĺžku strany štvorca a, ktorého obsah je známy (napr. $16\,\mathrm{cm}^2$), museli v množine kladných reálnych čísel nájsť ***koreň*** rovnice

$$a^2 = 16.$$

Ž: *Jasné. Takýto štvorec má stranu dlhú* $4\,\mathrm{cm}$, *čo je* $\sqrt{16\,\mathrm{cm}^2}$.



$$\boxed{\text{radix (koreň)} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{r} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{\ }}$$

U: Ďalšou zaujímavosťou je, že ***odmocnina sa dá zapísať aj ako mocnina***. Takýto posun trval v histórii tiež nejaký čas a postupne sa vykryštalizoval až do dnešnej podoby. Keďže pre počítanie s mocninami platia tie isté pravidlá ako pre počítanie s odmocninami, pre nezáporné číslo a zapíšeme:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}, \quad \ldots$$

Ž: *S tým som sa už stretol. No aj tak je to prekvapujúce. Stále som mal pocit, že odmocnina a mocnina sú dve protikladné veci. A zrazu obe zapíšem skoro rovnako.*

U: To sa v matematike stáva často. Tak, ale poďme na to pekne postupne, aby to malo hlavu a pätu. Najprv definujeme

- ***druhú odmocninu*** $\sqrt{a}$,

  potom

- n***-tú odmocninu*** $\sqrt[n]{a}$,

  a nakoniec

- ***mocninu s racionálnym exponentom*** $a^{\frac{r}{s}}$.

U: Najprv si uvedomme, že neexistuje odmocnina zo záporného čísla.

Ž: *To som už veľa krát počul, ale prečo?*

U: Tak čomu by sa rovnala napríklad $\sqrt{-9}$?

Ž: *Keďže* $\sqrt{9} = 3$, *tak* $\sqrt{-9} = -3$.

U: Lenže $\sqrt{9} = 3$ preto, lebo $3^2 = 9$. No $(-3)^2 = 9 \neq -9$, preto $\sqrt{-9} \neq -3$. Skrátka, keď umocníš hocijaké číslo na druhú, výsledok nikdy nemôže byť záporný.

Ž: *Tak potom sa môže* $\sqrt{9} = -3$.

U: A výsledky by boli dva? Aj 3 aj -3? Preto sa matematici dohodli, že za výsledok sa vezme len číslo kladné, resp. nula, teda nezáporné. Už si môžeme zadefinovať druhú odmocninu: ***Majme nezáporné reálne číslo*** a***. Druhou odmocninou z čísla*** a ***nazývame také nezáporné číslo*** b***, pre ktoré platí:*** $b^2 = a$***. Zapisujeme:*** $\sqrt{a} = b$***.***

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{9} = 3, \quad \text{lebo} \quad 3^2 = 9 \\ \sqrt{9} \neq -3, \quad \text{aj keď} \quad (-3)^2 = 9 \\ \sqrt{-9} \quad \text{neexistuje} \\ \\ \sqrt{a} = b, \quad \text{lebo} \quad b^2 = a \\ \text{pričom} \quad a, b \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}}$$

U: Teraz si chceme ukázať ako zapíšeme druhú odmocninu pomocou mocniny. Aby sme si odpovedali aj na otázku prečo je to tak, uvedieme si najprv vlastnosti, ktoré platia pre počítanie s druhými odmocninami:
Pre** a**,** $b \in \mathbb{R}_0^+$ **platí:

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$;
2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ***pre*** $b \neq 0$.

Ž: *Takže teraz si vysvetlíme, prečo* $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$*?*

U: Áno. Z prvej vlastnosti pre nezáporné a platí:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,$$

teda

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^1.$$

Teraz si druhú odmocninu nahradíme neznámou mocninou, teda:

$$\sqrt{a} = a^?.$$

Potom môžeme predchádzajúcu ronosť zapísať takto:

$$a^? \cdot a^? = a^1.$$

Teraz si spomeň, ako násobíme mocniny s rovnakým základom.

Ž: *Ak si dobre pamätám, tak exponenty sa spočítajú.*

U: Presne tak. Na ľavej strane dostaneme $a^{?+?} = a^{2\cdot ?}$. A to sa má rovnať a^1. Teda

$$a^{?+?} = a^{2\cdot ?} = a^1.$$

Ž: *Jasné. Odtiaľ už pekne vidno, že*

$$2\cdot ? = 1, \quad \textit{teda} \quad ? = \frac{1}{2}.$$

U: Už nám potom musí byť jasná nasledujúca definícia mocniny s exponentom $\frac{1}{2}$.
Majme** $a \in \mathbb{R}_0^+$**. Potom mocninou** $a^{\frac{1}{2}}$ **nazývame** $\sqrt{a}$**.

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad \text{pre} \quad a \in \mathbb{R}_0^+}$$

U: Čomu sa rovná $\sqrt[3]{8}$?

Ž: *Predsa*

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \textit{lebo} \quad 2^3 = 8.$$

U: A preto úplne analogicky ako pri druhej odmocnine si zadefinujeme n-tú odmocninu. Tiež budeme definovať iba n-té odmocniny z nezáporných čísel a ich výsledkom bude opäť iba nezáporné číslo. Definícia potom znie:
Majme $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$. Potom n-tou odmocninou z čísla a nazývame také nezáporné reálne číslo b, pre ktoré platí: $b^n = a$. Zapisujeme: $\sqrt[n]{a} = b$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt[3]{8} = 2, \quad \text{lebo} \quad 2^3 = 8 \\ \\ \sqrt[n]{a} = b, \quad \text{lebo} \quad b^n = a \\ \text{pričom} \quad a, b \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}}$$

U: Tých vlastností pre počítanie s odmocninami bude viac. Uveďme si ich.
Pre a, $b \in \mathbb{R}_0^+$ a pre n, s, $r \in \mathbb{N}$ platí:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$;

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, ***pre*** $b \neq 0$;

4. $\sqrt[n]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[n \cdot s]{a}$;

5. $\sqrt[n \cdot s]{a^{n \cdot r}} = \sqrt[s]{a^r}$.

Ž: *Uf, kto si to má všetko pamätať.*

U: Musím sa priznať, že sám oveľa radšej používam pravidlá s mocninami ako s odmocninami. Preto aj pri úprave výrazov si najprv odmocniny upravím na mocniny.

Ž: *No ešte stále nemáme zadefinovnú mocninu s racionálnym exponentom.*

U: To je síce pravda, no úspešne sa už k tomu blížime. Teraz si môžeme úplne analogicky ako pri druhej mocnine zadefinovať mocninu s exponentom $\frac{1}{n}$.
Majme $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$. Potom mocninou $a^{\frac{1}{n}}$ nazývame $\sqrt[n]{a}$.

Ž: *Ak som to pochopil správne, tak našu $\sqrt[3]{8}$ môžeme zapísať aj takto:*

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}.$$

U: Pochopil si to správne.

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad \text{pre} \quad a \in \mathbb{R}_0^+, \quad n \in \mathbb{N}}$$

U: Takže $8^{\frac{1}{3}}$ vieš zapísať pomocou odnocniny. Teraz skús zapísať pomocou odmocniny $8^{\frac{2}{3}}$. Uvedom si pri tom, že exponent $\frac{2}{3}$ sa dá napísať ako súčin: $\frac{1}{3} \cdot 2$.

Ž: *No, skúsim:*

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \dots$$

U: Ďalej využijeme fakt, že keď mocninu umocníme, tak exponenty sa vynásobia. Preto pokračujeme v úpravách takto:

$$\dots = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2}.$$

U: Myslím, že už sme dostatočne pripravení na definíciu mocniny s racionálnym exponentom. ***Majme*** $a \in \mathbb{R}^+$***,*** $m \in \mathbb{Z}$***,*** $n \in \mathbb{N}$***. Potom mocninou*** $a^{\frac{m}{n}}$ ***nazývame*** $\sqrt[n]{a^m}$***.***

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{pre} \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

U: Uveďme si ešte pravidlá, ktoré platia pre počítanie s mocninami s racionálnym exponentom.

Ž: *Líšia sa nejak od pravidiel, ktoré platia pre počítanie s mocninami s prirodzeným, prípadne celočíselným exponentom?*

U: Samotné pravidlá sú tie isté. Iné sú len množiny, odkiaľ môžu dané premenné byť. Zhrňme si ich.

Pre a***,*** $b \in \mathbb{R}^+$ ***a pre*** r***,*** $s \in \mathbb{Q}$ ***platí:***

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$***;***

2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$***;***

3. $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$***;***

4. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$***;***

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$***.***

No a na záver sa pokúsime vypočítať $8^{\frac{2}{3}}$ dvojako: raz pomocou pravidiel pre počítanie s mocninami, druhý krát pomocou pravidiel pre počítanie s odmocninami.

Ž: *OK. Najprv sa na to pozriem ako na mocninu. Potom* $8^{\frac{2}{3}} = \cdots$ *Čo s tým?*

U: Napíš číslo 8 ako mocninu.

Ž: *Jasné. Keďže* $8 = 2^3$, *tak*

$$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = \dots$$

Teraz exponenty vynásobím a dostanem:

$$\dots = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = 4.$$

Pekne to vyšlo.

U: Teraz sa na to pozri ako na odmocninu. Vieš, že

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \dots$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Môžem písať:*

$$\dots = \sqrt[3]{64} = \dots$$

Čo na tretiu dáva 64*? Malo by to byť číslo* 4*. Overím to ešte:* $4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$. *Sedí to.*

U: Teda

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4.$$

Ž: *Viac sa mi pozdávalo pozerať sa na to ako na mocninu.*

Príklad 1: *Vypočítajte, výsledok čiastočne odmocnite:*

a) $\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{6}$;

b) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{12}$;

c) $3\sqrt{12}-6\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{24}-13\sqrt{3}$.

Ž: *To sú úlohy určené pre kalkulačku.*

U: No, aj tak sa dá. My si však precvičíme mozgové závity, kalkulačku dáme bokom a začneme úlohou ***a)***.

Ž: *Poznám druhú odmocninu z* 36*, no nie tretiu.*

U: Vieme, že súčin dvoch tretích odmocnín sa rovná tretej odmocnine zo súčinu. Skús to.

Ž: *Dobre:*

$$\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{36\cdot 6}=\dots$$

U: Teraz nenásobme $36\cdot 6$, ale naopak, upravme to na mocninu.

Ž: *Jasné. Tak dostanem:*

$$\dots=\sqrt[3]{6^2\cdot 6}=\sqrt[3]{6^3}=6.$$

U: Správne.

U: Pokračujme úlohou ***b)***.

Ž: *To je to isté, čo v úlohe a).*

U: No nie úplne. Vyriešme to a potom sa ukáže, čím sa líši od predchádzajúcej úlohy.

Ž: *Takže:*

$$\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{6\cdot 12}=\sqrt[3]{72}=\dots$$

Teraz mám nájsť tretiu odmocninu z čísla 72*, …*

U: Ja by som radšej upravoval čísla na súčin, nie opačne. Potom

$$\dots=\sqrt[3]{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\sqrt[3]{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2}=\sqrt[3]{3^2\cdot 2^3}=\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{2^3}=\dots$$

Teraz už máme všetko pripravené na čiastočné odmocnenie.

Ž: *Tretia odmocnina s treťou mocninou sa zrušia, no s* $\sqrt[3]{3^2}$ *neurobím nič. Tak dostanem:*

$$\dots=\sqrt[3]{9}\cdot 2=2\cdot\sqrt[3]{9}.$$

A to už je výsledok.

U: Ostáva nám najkomplikovanejšia úloha ***c)***. Najprv jednotlivé členy čiastočne odmocnime, potom príslušné odmocniny sčítame, respektíve odčítame.

Ž: *Takže číslo* 12 *môžem napísať ako* $4 \cdot 3$ *a číslo* 24 *ako* $3 \cdot 8$. *Potom dostanem:*

$$3\sqrt{12} - 6\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{24} - 13\sqrt{3} =$$

$$= 3\sqrt{4 \cdot 3} - 6\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{3 \cdot 8} - 13\sqrt{3} = \dots$$

Viem, že $\sqrt{4} = 2$ *a* $\sqrt[3]{8} = 2$, *preto môžem pokračovať takto:*

$$\dots = 3 \cdot 2\sqrt{3} - 6\sqrt[3]{3} + 6 \cdot 2\sqrt[3]{3} - 13\sqrt{3} = \dots$$

U: Výborne. Teraz zlúč rovnaké odmocniny.

Ž: *Skúsim:*

$$\dots = 6\sqrt{3} - 6\sqrt[3]{3} + 12\sqrt[3]{3} - 13\sqrt{3} =$$

$$= -7\sqrt{3} + 6\sqrt[3]{3}.$$

U: S tým už veľa nenarobíme. To je výsledok.

Úloha 1: *Vypočítajte, výsledok čiastočne odmocnite:*

a) $\sqrt[4]{24} \cdot \sqrt[4]{54}$;

b) $\sqrt{8} - \sqrt{2}$.

Výsledok: *a)* 6; *b)* $\sqrt{2}$

Príklad 2: *Upravte dané výrazy tak, aby sa v menovateľoch nevyskytovali odmocniny:*

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

U: Úloha ***a)*** hádam nebude zložitá. Musíme zlomok vynásobiť číslom 1 zapísanom vo vhodnom tvare. Čím je potrebné vynásobiť $\sqrt{3}$, aby sme nemali odmocninu v menovateli?

Ž: *No, ďalšou odmocninou:*

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3.$$

U: Výborne. Takže číslo 1 bude zapísané v tvare $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Ž: *Takže dostanem:*

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

U: Správne.

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Tu máme odstrániť odmocninu z menovateľa zlomku

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}.$$

Ž: *Podobne vynásobím zlomok zlomkom* $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$. *Dostanem:*

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{5}}{5}=\dots$$

U: No, nie tak rýchlo. Naozaj si myslíš, že $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}=5$? Ak si to postupne rozpíšeme, dostaneme:

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5^2},$$

a to rozhodne nie je 5.

Ž: *Jasné. Keby pod treťou odmocninou bolo* 5^3, *vtedy by* $\sqrt[3]{5^3}=5$.

U: A ako to tam dostaneš?

Ž: *Keď vynásobím* $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}$.

U: Výborne, tak to oprav.

Ž: *Takže:*

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5}.$$

U: Správne. Nakoniec nám ostáva úloha ***c)***. Tu máme v menovateli $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Skús rozšíriť zlomok tak, aby si použil vzorec $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Takto sa budeš môcť zbaviť nepríjemnej odmocniny.

Ž: *To znie rozumne. Takže celý zlomok rozšírim výrazom $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Potom:*

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

To by už mal byť výsledok.

U: Áno, je to správne.

Úloha 2: *Upravte dané výrazy tak, aby sa v menovateľoch nevyskytovali odmocniny:*

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

c) $\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-2}$.

Výsledok: *a)* $\sqrt{5}$; *b)* $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; *c)* $-2-3\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

Príklad 3: *Zjednodušte a určte podmienky:*

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

Ž: *Najprv upravím to, čo je v zátvorkách. V prvej zátvorke bude spoločný menovateľ $\sqrt{x}$, v druhej súčin $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$.*

U: Presne tak. Tak môžeme písať:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)=$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)^2+4\sqrt{x}(x-1)-(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\dots$$

Ž: *Prečo je v čitateli druhého zlomku $(x-1)$?*

U: Nenapísali sme tam súčin $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$, ale rovno výsledok, ktorý sme dostali po použití vzorca $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Ž: *Jasné. Teraz viem, že $(\sqrt{x})^2=x$ a na zátvorky na druhú použijem vzorec $(a\pm b)^2=$ $=a^2\pm 2ab+b^2$. Dostanem výraz:*

$$\dots=\frac{x-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x+2\sqrt{x}+1+4\sqrt{x}\cdot x-4\sqrt{x}-(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}=\dots$$

U: Som rád, že si nezabudol dať výraz $(x-2\sqrt{x}+1)$ do zátvorky.

Ž: *Lebo teraz v ďalšom kroku po odstránení zátvorky sa zmenia znamienka v zátvorke na opačné. Zároveň vykrátim výraz $(x-1)$ z prvého čitateľa s tým istým výrazom z druhého menovateľa. A tiež odčítam výrazy $2\sqrt{x}-4\sqrt{x}$. Tak dostanem výraz:*

$$\dots=\frac{x-2\sqrt{x}+1+4\sqrt{x}\cdot x-x+2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\dots$$

Ešte od seba odčítam, čo sa dá a dostanem:

$$\dots=\frac{4\sqrt{x}\cdot x}{\sqrt{x}}=4x.$$

To už je výsledok.

U: Áno. Nezabudnime na ***podmienky***. Tu sú dvojakého typu. Jeden typ sa týka zlomku a druhý odmocniny.

Ž: *V prípade zlomku je to jasné:* **v menovateli nesmie byť nula**, *lebo nulou sa nedá deliť. V prípade odmocniny zase platí, že nepoznáme odmocninu zo záporného čísla. Teda to, čo je pod odmocninou, musí byť kladné.*

U: A čo nula. Tá nemôže byť pod odmocninou?

Ž: *No, $\sqrt{0}=0$, Takže môže byť.*

U: Ak to teda zhrnieme: ***pod odmocninou môže byť len nezáporné číslo***.

Ž: *Teda najprv vybavím odmocninu:*

$$x \geqq 0.$$

Teraz zlomok:

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} - 1 \neq 0, \quad \sqrt{x} + 1 \neq 0.$$

U: Vyriešením prvej nerovnice dostanem:

$$x \neq 0.$$

Pokračuj druhou nerovnicou.

Ž: *Takže:*

$$\sqrt{x} \neq 1,$$

z čoho

$$x \neq 1.$$

U: Ako to bude vyzerať s poslednou treťou nerovnicou?

Ž: *Tu*

$$\sqrt{x} \neq -1.$$

Teda ...

U: Môže sa niekedy druhá odmocnina rovnať zápornému číslu?

Ž: *Nie. Takže je to v poriadku, vždy platí, že*

$$\sqrt{x} \neq -1.$$

U: Zhrň všetky podmienky.

Ž: *Teda*

$$x > 0, \quad x \neq 1.$$

Úloha 3: *Zjednodušte a určte podmienky:*

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dots$$

Výsledok: $\frac{(x+1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$, *pre* $x > 0$, $x \neq 1$

Príklad 4: *Vyjadrite pomocou jednej odmocniny dvoma spôsobmi:*

- *použitím pravidiel pre počítanie s odmocninami;*
- *použitím pravidiel pre počítanie s mocninami s racionálnym exponentom.*

a) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt[3]{5^2 \cdot \sqrt{5}}$.

Ž: *Prečo to mám robiť dvma pôsobmi?*

U: Aby si vedel porovnať výhody aj nevýhody oboch prístupov. Potom si vyberieš ten, ktorý ti viac vyhovuje.

Ž: *Takže začnem úlohou* **a)**. *Keďže je to najprv tretia, potom druhá odmocnina z troch, tak tie odmocnitele* 3 *a* 2 *sa . . . sčítajú, alebo vynásobia? Stále sa mi to pletie.*

U: Tie odmocnitele sa násobia. Pekne sa to ukáže pri druhom spôsobe riešenia úlohy.

Ž: *Keď ich vynásobím, tak dostanem* $3 \cdot 2 = 6$, *potom môžem písať:*

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}.$$

To je výsledok.

U: Teraz tú istú úlohu vyriešme prepísaním odmocniny na mocninu s racionálnym exponentom. Najprv prepíšme $\sqrt{3}$.

Ž: *Keďže ide o druhú odmocninu, exponent bude* $\frac{1}{2}$. *Môžem písať:*

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}} = \dots$$

U: Teraz máme odmocninu tretiu, preto exponent bude $\frac{1}{3}$. Takže môžeme pokračovať v úpravách takto:

$$\dots = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dots$$

Ž: *Jasné. Keď umocníme mocninu, exponenty sa vynásobia. Preto to násobenie. Tak dostanem:*

$$\dots = 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}.$$

Výsledok je ten istý.

U: Vari ťa to prekvapuje?

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Máme upraviť takýto výraz:

$$\sqrt[3]{5^2 \cdot \sqrt{5}} = \dots$$

Najprv použi pravidlá pre počítanie s odmocninami.

Ž: *Ale tu nemám odmocninu z odmocniny.*

U: Tak ju musíš vyrobiť. 5^2 musíš dať pod druhú odmocninu. A aby sa zachovala rovnosť, bude tam 5^4. Dostaneme tak výraz:

$$\ldots = \sqrt[3]{\sqrt{5^4 \cdot 5}} = \ldots$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Ak vynásobím* $5^4 \cdot 5$*, dostanem:*

$$\ldots = \sqrt[3]{\sqrt{5^5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5^5} = \sqrt[6]{5^5}.$$

U: Správne. Teraz sa skúsme na to pozrieť ako na mocniny. Najprv prepíšeme na mocninu $\sqrt{5}$. Dostaneme:

$$\sqrt[3]{5^2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \ldots$$

Ž: *Teraz vynásobím mocniny s rovnakým základom. Exponenty preto spočítam:*

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Pokračujem v úpravách a dostanem výraz:

$$\ldots = \sqrt[3]{5^{\frac{5}{2}}} = \ldots$$

U: Ostáva nám len tá tretia odmocnina, ktorú prepíšeme ako exponent $\frac{1}{3}$. Dostaneme teda:

$$\ldots = \left(5^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \ldots$$

Ž: *Teraz vynásobím exponenty a dostanem:*

$$\ldots = 5^{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{6}} = \ldots$$

U: Ešte to preveďme späť na odmocninu a dostaneme výsledok:

$$\ldots = \sqrt[6]{5^5}.$$

Ž: *Opäť je to ten istý výsledok.*

Úloha 4: *Vyjadrite pomocou jednej odmocniny dvoma spôsobmi:*

- *použitím pravidiel pre počítanie s odmocninami,*
- *použitím pravidiel pre počítanie s mocninami s racionálnym exponentom.*

$$\frac{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8}}}{2 \cdot \sqrt[3]{4}}.$$

Výsledok: $\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}$

Príklad 5: *Upravte a určte podmienky:*

$$\frac{\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[6]{x^2}}}{\sqrt{x}}.$$

U: Môžeš sa do toho pustiť dvoma spôsobmi. Buď využiješ pravidlá pre počítanie s odmocninami alebo odmocniny prepíšeš na mocniny s racionálnym exponentom. Tak si vyber.

Ž: *S odmocninami to vždy popletiem, takže radšej to prepíšem na mocniny.*

U: V poriadku, aj mne je to bližšie. Poďme na to.

Ž: *Môžem písať:*

$$\frac{\sqrt[5]{x\cdot\sqrt[6]{x^2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\left(x\cdot x^{\frac{2}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\dots$$

U: Prepísal si to správne. Najdôležitejšiu vec máš urobenú, teraz to už nemôže byť problém.

Ž: *Ak sa zbavím zátvoriek, dostanem:*

$$\dots=\frac{x^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{2}{30}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\dots$$

U: Výborne. Už máme všade rovnaké základy, takže môžeme exponenty sčítavať, respektíve odčítavať. Podľa toho, či celé mocniny násobíme alebo delíme. Môžeme napísať:

$$\dots=x^{\frac{1}{5}+\frac{2}{30}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{6+2-15}{30}}=x^{-\frac{7}{30}}=\dots$$

Teraz to ešte upravme tak, aby sme v exponente mali iba prirodzené číslo. Najprv sa zbavme záporného znamienka.

Ž: *To dám celú mocninu do menovateľa, no znamienko v exponente už bude kladné. Potom sa predchádzajúci výraz bude rovnať výrazu:*

$$\dots=\frac{1}{x^{\frac{7}{30}}}=\dots$$

U: Na rade je zbaviť sa zlomku v exponente.

Ž: *Takže to prepíšem pomocou odmocniny a dostanem výraz:*

$$\dots=\frac{1}{\sqrt[30]{x^7}}.$$

To by už mal byť výsledok.

U: Áno. A je to správne. Môžeš si ešte vyskúšať napísať výsledok v takom tvare, aby v menovateli nebola odmocnina. No to už nechám na teba. Nezabudnime ešte na ***podmienky***. Máme tu odmocninu aj zlomok.

Ž: *Pod odmocninou môže byť len číslo väčšie alebo rovné nule, v menovateli zlomku zase nesmie byť nula. Preto dostanem nasledovnú podmienku:*

$$x>0.$$

Úloha 5: *Upravte a určte podmienky:*

$$\frac{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\dots$$

Výsledok: $1,\ a>0$

Príklad 6: *Vypočítajte:*

a) 4^2;

b) 4^{-2};

c) $4^{\frac{1}{2}}$;

d) $4^{\frac{3}{2}}$;

e) $4^{-\frac{1}{2}}$.

Ž: *Samé štvorky a dvojky …*

U: O to práve ide. Precvičiť si, čo urobí s číslom záporný exponent a čo zlomok v exponente. Tak poďme na to. Začnime úlohou ***a)***.

Ž: *To je trápna úloha:*

$$4^2 = 16.$$

U: V poriadku.

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Tu máme v exponente záporné číslo. Čo s tým?

Ž: *Záporný exponent nám dá celú mocninu do menovateľa zlomku. Preto môžem písať:*

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

U: Aj to si zvládol veľmi dobre.

U: Pokračujme úlohou ***c)***. Tu máme v exponente zlomok.

Ž: *Ten nám z mocniny urobí odmocninu. A keďže je tam $\frac{1}{2}$, tak to bude druhá odmocnina. Napíšem:*

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2.$$

U: Urobil si to správne. Nedá mi ale nepripomenúť, že táto úloha sa dala vyriešiť aj obídením odmocnín. Stačí si uvedomiť, že $4 = 2^2$ a použiť pravidlá pre počítanie s mocninami. Dostaneme:

$$4^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}} = 2^1 = 2.$$

Ž: *Pekné.*

U: Ďalej nasleduje úloha ***d)***. Tu máme v exponente mocniny číslo $\frac{3}{2}$, nie len $\frac{1}{2}$ ako to bolo v úlohe c). Čo s tým?

Ž: *Opäť to bude druhá odmocnina, lebo v menovateli zlomku je číslo 2. No nie z čísla 4, ale zo 4^3.*

U: Tak to napíš.

Ž: *Teda:*

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8.$$

U: OK. Môžeš si to sám ešte vyskúšať vypočítať len pomocou pravidiel pre počítanie s mocninami.

U: No teraz poďme na poslednú úlohu ***e)***. Tu máme v exponente mocniny aj záporné číslo aj zlomok.

Ž: *No, to je dosť zamotané. Čo mám urobiť skôr?*

U: Ja by som odporúčal zbaviť sa najprv záporného znamienka, a potom zlomku v exponente.

Ž: *Pokúsim sa. Keď sa chcem zbaviť najprv záporného znamienka v exponente, dám celú mocninu do menovateľa zlomku. Môžem teda písať:*

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \dots$$

U: Výborne. Teraz urobme niečo s tou jednou polovicou.

Ž: *Tá nám urobí z čísla 4 druhú odmocninu. Predchádzajúci výraz sa teda rovná výrazu:*

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

U: Správne.

Úloha 6: *Vypočítajte:*

a) 3^2;

b) 3^{-2};

c) $3^{\frac{1}{2}}$;

d) $3^{\frac{3}{2}}$;

e) $3^{-\frac{1}{2}}$.

Výsledok: *a)* 9; *b)* $\frac{1}{9}$; *c)* $\sqrt{3}$; *d)* $\sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$; *e)* $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Príklad 7: *Vypočítajte:*

a) $81^{-\frac{3}{4}}$;

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

U: Začnime úlohou ***a)***.

Ž: *Najprv sa zbavím záporného znamienka v exponente. Dám celú mocninu do menovateľa a dostanem:*

$$81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \dots$$

U: Môže byť. Pokračuj.

Ž: *Teraz sa zbavím zlomku v exponente mocniny. Tak sa z mocniny stane odmocnina. Keďže v menovateli zlomku je číslo 4, bude to štvrtá odmocnina. Preto môžem písať:*

$$\dots = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \dots$$

Uf, ... ako mám nájsť štvrtú odmocninu z takého čísla?

U: Skús si napísať číslo 81 pomocou mocniny.

Ž: *Viem, že* $81 = 9^2$ *a* $9 = 3^2$. *Preto* $81 = 3^4$. *Predchádzajúci výraz sa preto rovná výrazu:*

$$\dots = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(3^4\right)^3}} = \dots$$

U: To už je celkom fajn. Po vhodnom zapísaní sa štvrtá odmocnina a štvrtá mocnina zrušia. Pokračujeme v úpravách:

$$\dots = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(3^3\right)^4}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

No nedá mi nespomenúť, že sa dalo vyhnúť používaniu odmocnín. Stačilo hneď na začiatku prepísať číslo 81 ako mocninu 3^4. Napíšme ešte raz celú úpravu:

$$81^{-\frac{3}{4}} = \left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}} = 3^{4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Ž: *Asi je naozaj jednoduchšie prepísať si všetko, čo sa dá na mocniny.*

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Tu umocňujeme zlomok na záporný zlomok. Najprv sa zbavme záporného znamienka v exponente.

Ž: *Ja si pamätám, že stačí vymeniť čitateľa za menovateľa a znamienko v exponente zmeniť zo záporného na kladné.*

U: Pamätáš si to správne. Keby si to zabudol, vieš si to odvodiť priamo z definície.

Ž: *Dostanem:*

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \dots$$

U: Už sa stačí zbaviť zlomku v exponente.

Ž: *Tak tam dostanem odmocninu:*

$$\ldots = \sqrt{4} = 2.$$

U: Správne.

Úloha 7: *Vypočítajte:*

a) $32^{-\frac{2}{5}}$

b) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-1,5}$

Výsledok*: a)* $\frac{1}{4}$*; b)* $1\,000$

Príklad 8: *Zapíšte pomocou mocniny s racionálnym exponentom ($x \in \mathbb{R}^+$):*

a) $\sqrt{x}$;

b) $\sqrt[3]{x^5}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

d) $\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$.

Ž: *Odmocninu môžem prepísať tak, že do exponentu mocniny dám zlomok.*

U: V podstate áno. Tak to skús aplikovať na úlohu ***a)***.

Ž: *Keďže je tam druhá odmocnina, tak do exponentu dám $\frac{1}{2}$ a dostanem:*

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

U: Pokračujme úlohou ***b)***.

Ž: *Tu je tretia odmocnina, tak do exponentu zlomku dám $\frac{1}{3}$.*

U: Nie tak celkom. Keďže je tam aj x^5, tak v exponente bude $\frac{5}{3}$. Zapíš to.

Ž: *Teda:*

$$\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}.$$

U: Pokračujme úlohou ***c)***.

Ž: *Najprv odstránim odmocninu a dostanem:*

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \dots$$

U: Ešte dajme mocninu z menovateľa do čitateľa.

Ž: *To vyriešim záporným znamienkom v exponente a dostanem výsledok:*

$$\dots = x^{-\frac{1}{4}}.$$

U: Ukončme to úlohou ***d)***. Tá sa od úlohy c) líši predovšetkým tým, že pod odmocninou vystupuje x^3, nie len x.

Ž: *Najprv odstránim odmocninu. Tak dostanem:*

$$\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{5}}} = \dots$$

U: Ešte sa pokús zbaviť zlomku.

Ž: *Mocninu dám hore a znamienko v exponente zmením z kladného na záporné. Tak dostanem výsledok:*

$$\dots = 2x^{-\frac{3}{5}}.$$

Úloha 8: *Zapíšte pomocou mocniny s racionálnym exponentom ($x \in \mathbb{R}^+$):*

a) $\sqrt[4]{x}$;

b) $\sqrt{x^5}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Výsledok: *a)* $x^{\frac{1}{4}}$; *b)* $x^{\frac{5}{2}}$; *c)* $x^{-\frac{3}{2}}$

Príklad 9: *Zjednodušte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}+1}{a^{-\frac{1}{2}}-1}-\frac{a^{-\frac{1}{2}}-1}{a^{-\frac{1}{2}}+1}.$$

Ž: *Vyzerá to dosť komplikovane. Najprv by som to dal na spoločného menovateľa.*

U: OK. Skús.

Ž: *Takže spoločným menovateľom bude súčin* $\left(a^{-\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)$. *Potom môžem písať:*

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}+1}{a^{-\frac{1}{2}}-1}-\frac{a^{-\frac{1}{2}}-1}{a^{-\frac{1}{2}}+1}=\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2-\left(a^{-\frac{1}{2}}-1\right)^2}{\left(a^{-\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)}=\dots$$

U: Teraz použi v menovateli vzorec $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. No a v čitateli zase vzorce $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Ž: *Jasné. Predchádzajúci výraz sa bude rovnať výrazu:*

$$\dots=\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2+2a^{-\frac{1}{2}}+1-\left[\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2a^{-\frac{1}{2}}+1\right]}{\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-1^2}=\dots$$

U: Teraz umocnime mocniny, teda exponenty vynásobíme: $-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$ a odstránime zátvorky. Tak dostaneme výraz:

$$\dots=\frac{a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}+1-a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}-1}{a^{-1}-1}=\dots$$

Ž: *Ďalej to už nebude zložité:* $a^{-1}-a^{-1}=0$ *a tiež* $1-1=0$. *Ostane nám výraz:*

$$\dots=\frac{4a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-1}-1}=\dots$$

U: Ešte to krajšie upravme, aby sme nemali v exponente ani záporné čísla ani zlomky.

Ž: *Najprv odstránim záporné znamienka v exponentoch. Tak dostanem:*

$$\dots=\frac{\frac{4}{a^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{a}-1}=\dots$$

U: Teraz sa zbav zlomku $\frac{1}{2}$ v exponente mocniny.

Ž: *Čiže z mocniny urobím odmocninu a dostanem:*

$$\dots=\frac{\frac{4}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{a}-1}=\dots$$

U: Ešte upravme ten zložený zlomok.

Ž: *Najprv upravím menovateľa a dostanem:*

$$\ldots = \frac{\frac{4}{\sqrt{a}}}{\frac{1-a}{1}} = \ldots$$

Zložený zlomok upravíme jednoducho: vonkajšie krát vonkajšie deleno vnútorné krát vnútorné. Tak dostaneme:

$$\ldots = \frac{4}{\sqrt{a}\cdot(1-a)}.$$

To by už mal byť výsledok.

U: Áno. Je to správne. Nezabudni na ***podmienky***.

Ž: *Keďže všetko pod odmocninou musí byť väčšie alebo rovné nule, tak*

$$a \geqq 0.$$

A ešte v menovateli nesmie byť nula. Preto:

$$a \neq 0 \quad a \quad a \neq 1.$$

U: Zhrň to dohromady.

Ž: *Takže:*

$$a > 0 \quad a \quad a \neq 1.$$

U: V poriadku.

Úloha 9: *Zjednodušte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = \ldots$$

Výsledok: $a-1$, $a>0$, $a\neq 1$

Príklad 10: *Zjednodušte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\left(\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{a}}\right)^{-2}.$$

Ž: *Najprv by som si prepísal všetky odmocniny na mocniny.*

U: Veľmi dobre. Urob to.

Ž: *Tak dostanem:*

$$\left(\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{a}}\right)^{-2} = \left(\frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2} = \dots$$

U: Teraz odstráňme zátvorku. Tým budeme umocňovať mocniny, čiže exponenty vynásobíme.

Ž: *Pokúsim sa. Dostanem:*

$$\dots = \frac{a^{\frac{5}{6}\cdot(-2)}}{a^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}\cdot a^{\frac{1}{3}\cdot(-2)}} = \frac{a^{-\frac{5}{3}}}{a^{1}\cdot a^{-\frac{2}{3}}} = \dots$$

U: Teraz použijeme pravidlo, podľa ktorého ak násobíme mocniny s rovnakým základom, tak exponenty sčítame.

Ž: *Jasné. Použijem to v menovateli. Tak dostanem výraz:*

$$\dots = \frac{a^{-\frac{5}{3}}}{a^{1-\frac{2}{3}}} = \frac{a^{-\frac{5}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \dots$$

U: Pri delení mocnín s rovnakým exponentom zase exponenty odčítame.

Ž: *OK. Tak dostaneme:*

$$\dots = a^{-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{6}{3}} = a^{-2} = \dots$$

U: Ešte sa zbavme -2 v exponente.

Ž: *Tým dostaneme celú mocninu do menovateľa:*

$$\dots = \frac{1}{a^2}.$$

To by už mal byť výsledok.

U: Chýbajú ešte ***podmienky***:

$$a > 0.$$

Úloha 10: *Zjednodušte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{a^{-\frac{1}{10}}\cdot\sqrt{a}}\right)^{-5} = \dots$$

Výsledok: $\frac{1}{a^2}$, $a > 0$