Mocniny s celočíselným exponentom, výrazy s mocninami

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Máš nejaké obľúbené miesto, kam rád chodievaš na výlety?

Ž: *Áno, sú to Vysoké Tatry.*

U: Je to aj moje obľúbené miesto. Obzvlášť rád chodievam na Zbojnícku chatu. Zážitky z takého výletu sú ***umocnené*** nádherným výhľadom.

Ž: *Súhlasím. Námaha pri stúpaní za ten výhľad naozaj stojí.*

U: Teraz sa opýtam, čo chápeš pod slovným spojením „umocniť zážitok“?

Ž: *Zrejme, že sa zážitok zosilní, znásobí.*

U: Presne tak je to aj v matematike. Ak chceš napr. umocniť číslo 2 na tretiu, znamená to, že ho chceš trikrát znásobiť. Teda:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

No a teraz bude reč práve o mocninách.

$$\boxed{\text{umocniť} \quad \leftrightarrow \quad \text{znásobiť}}$$

U: Určite si sa už stretol so zapísaním hodnôt v takomto tvare:

$2 \cdot 10^{30}$ kg – čo je hmotnosť Slnka, alebo

$7 \cdot 10^{-10}$ kg – čo je hmotnosť prachovej čiastočky.

Ž: *Tá prvá hmotnosť bude asi dosť veľká a tá druhá zase dosť malá.*

U: Presne tak. Dokonca sú tie hmotnosti také veľké, respektíve malé, že ich musíme napísať pomocou mocnín. Napríklad aj na to sú dobré také mocniny s celočíselným kladným, respektíve záporným exponentom.

Ž: *Môžeme tie hmotnosti Slnka a prachovej čiastočky zapísať aj ináč?*

U: No, môžeme. Vrátime sa k tomu však až na konci, keď už budeme mať mocninu s celočíselným exponentom zadefinovanú. Začnime terminológiou.

U: V mocnine a^n premennú a nazývame ***základom*** (alebo mocnencom) a premennú n ***exponentom*** (alebo mocniteľom).

Ž: *Teda v mocnine 2^3 je základom číslo 2 a exponentom číslo 3.*

U: Správne.

U: Skôr, ako budeme s mocninami robiť nejaké operácie, mali by sme si ich definovať.

Ž: *Čo na tom treba definovať? Proste, ak mám mocninu a^n, tak základ a musím vynásobiť n-krát. Teda*

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a.$$

U: Áno. To je v podstate definícia ***mocniny s prirodzeným exponentom***. Ešte si povedzme, z akej množiny môže byť základ.

Ž: *Môže to byť aj číslo záporne, napr. $(-3)^4$, aj zlomok napr. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.*

U: A čo nula?

Ž: *No, $0^4 = 0$, takže základom môže byť aj nula.*

U: Teda za základ môžeme zobrať hocijaké reálne číslo. Sformulujme to do korektnej definície:
Majme $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom n-tou mocninou čísla a nazývame číslo

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \\[1em] a - \text{základ}, \quad n - \text{exponent} \\[1em] a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \end{array}}$$

U: Skôr, než si uvedieme pravidlá platiace pre počítanie s mocninami, odvodíme si ich z konkrétnych príkladov. Teraz si ***všímaj*** vyriešené príklady ***v rámčeku***. Tie hovoria o násobení a delení mocnín s rovnakým základom. Pri násobení $3^2 \cdot 3^5$ si 3^2 rozpíšeme ako $3 \cdot 3$ a 3^5 ako $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Po ich vynásobení dostanem 3^7. Vieš to zovšeobecniť?

Ž: *Základ sa opíše a exponenty sčítajú.*

U: Správne. Pri delení $\frac{3^7}{3^4}$ je to veľmi podobné. Po rozpísaní 3^7 ako súčinu siedmych trojek a 3^4 ako súčinu styroch trojek, môžeme celý zlomok krátiť číslom $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Tak dostaneme výsledok 3^3. Opäť sa to pokús zovšeobecniť.

Ž: *Základ odpíšem, no exponenty odčítam.*

$$\boxed{\begin{array}{c} 3^2 \cdot 3^5 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^7 = 3^{2+5} \\[1em] \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^3 = 3^{7-4} \end{array}}$$

U: Teraz si všímaj ***ďalší rámček***. Príklad $(5^2)^3$ hovorí o umocnení mocniny. 5^2 vynásobíme medzi sebou trikrát, teda dostaneme výsledok 5^6.

Ž: *Tu sme exponenty* 2 *a* 3 *medzi sebou vynásobili.*

$$\left(5^2\right)^3 = \left(5^2\right)\cdot\left(5^2\right)\cdot\left(5^2\right) = (5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5) = 5^6 = 5^{2\cdot 3}$$

U: ***V ďalšom rámčeku*** je reč o násobení a delení mocnín s rovnakým exponentom.

Ž: *Teda* $(3\cdot 5)^2$ *sa rovná* $3^2\cdot 5^2$.

U: Áno. To isté platí pre delenie. Teda $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$.

$$(3\cdot 5)^2 = (3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5) = 3^2\cdot 5^2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3^2}{5^2}$$

U: Teraz sme už pripravení korektne zapísať pravidlá, ktoré platia pre počítanie s mocninami:

Ž: *Poďme na to.*

U:

Pre každé a, $b\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ ***a pre každé*** r, $s\in\mathbb{N}$ $(r>s)$ ***platí:***

1. $a^r\cdot a^s = a^{r+s}$;
2. $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;
3. $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$;
4. $(a\cdot b)^r = a^r\cdot b^r$;
5. $\left(\frac{b}{a}\right)^r = \frac{b^r}{a^r}$.

U: Zatiaľ sme si definovali iba mocninu s prirodzeným exponentom. No čo keď ***exponent*** n nebude prirodzené číslo, ale napr. ***nula***? Čomu sa rovná napr. taká mocnina 3^0?

Ž: *Ja som sa učil, že hocičo na nultú je vždy jedna. Teda aj* $3^0 = 1$.

U: To si sa učil správne. S jednou výnimkou, ktorou je 0^0. Táto mocnina nie je definovaná. Matematika nie je o tom, vedieť nejaký vzorček. Dôležité je vedieť dôvod. Takže prečo $3^0 = 1$?

Ž: *No vážne, prečo?*

U: Určite mi povieš, koľko je $\frac{3^2}{3^2}$.

Ž: *Samozrejme, že jedna. Delíme predsa dve rovnaké čísla.*

U: No a keďže pravidlá, ktoré platia pre mocniny s prirodzeným exponentom, musia platiť aj pre mocniny s celočíselným exponentom, tak sa pozrime na druhé pravidlo.

Ž: *Podľa neho pri delní mocnín s rovnakým základom exponenty od seba odčítam. Teda*

$$\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0.$$

U: Tak sme si zdôvodnili, prečo

$$3^0 = 1.$$

Môžeme definovať mocninu s nulovým exponentom: ***pre*** $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ***platí:*** $a^0 = 1$**.**

$$\boxed{\begin{array}{c} a^0 = 1 \\ \\ a \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array}}$$

U: Ostáva nám ešte dodefinovať ***mocninu so záporným celočíselným exponentom***. Čomu sa rovná napríklad mocnina 5^{-2}?

Ž: *Niekde som sa stretol so zapísaním rýchlosti* $100\frac{km}{h}$ *v takomto tvare:* $100km \cdot h^{-1}$*. Z toho súdim, že aj mocnina* 5^{-2} *môže mať niečo spoločné so zlomkom.*

U: Veľmi dobrý postreh. Presne tak, záporný exponent nám celú mocninu presunie do menovateľa zlomku. Zdôvodnime si to. Vydeľ zlomok

$$\frac{5^2}{5^4} = \ldots$$

Ž: *Celý zlomok vykrátim číslom* 5^2*, tak sa predchádzajúci zlomok rovná zlomku*

$$\ldots = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}.$$

U: Teraz ten istý zlomok vydeľ pomocou druhého pravidla pre počítanie s mocninami.

Ž: *Základ je rovnaký, teda exponenty odčítam. Potom platí:*

$$\frac{5^2}{5^4} = 5^{2-4} = 5^{-2}.$$

U: Teda ten istý zlomok $\frac{5^2}{5^4}$ sa raz rovná zlomku $\frac{1}{5^2}$ a raz mocnine 5^{-2}. Čo z toho vyplýva?

Ž: *Že*

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}.$$

U: Môžeme teda napísať, že ***pre*** $n \in \mathbb{N}$***,*** $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ***platí:*** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$**.**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

U: Tak sme si postupne ***zadefinovali mocninu s celočíselným exponentom***, a to v troch krokoch ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$):

- ***exponent je prirodzené číslo:*** $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$;
- ***exponent je nula:*** $a^0 = 1$;
- ***exponent je záporné celé číslo:*** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ž: *Ako je to s pravidlami?*

U: Tie sú rovnaké ako pravidlá pre počítanie s mocninami s prirodzeným exponentom. Môžeš si ich ešte raz prezrieť v rámčeku.

Pre každé a, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ a pre každé r, $s \in \mathbb{Z}$ platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^r = \frac{b^r}{a^r}$$

U: Pri upravovaní výrazov s mocninami s celočíselným exponentom budeme využívať definíciu a vyššie uvedené pravidlá. No nedá mi nespomenúť ešte jednu vec. Častokrát budeme umocňovať zlomky na záporný exponent. Ukážme si to na jednoduchom príklade. Pre $a \neq 0$ a $b \neq 0$ umocni

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \dots$$

Ž: *Ja by som použil definíciu. Podľa nej dám základ* $\frac{a}{b}$ *do menovateľa a záporný exponent prepíšem na kladný. Tak dostanem výraz:*

$$\ldots = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^2 = \ldots$$

U: Správne. Dostali sme zložený zlomok. Upravime ho. Jednotku z čitateľa prepíšeme na zlomok $\frac{1}{1}$ a použijeme pravidlo: „vonkajšie krát vonkajšie deleno vnútorné krát vnútorné“. Tak dostaneme:

$$\ldots = \left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot b}{1 \cdot a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Ž: *Ak sa dobre pozerám na pôvodný a konečný výraz, majú len prehodené čitateľa s menovateľom a exponenty sa líšia len znamienkom.*

U: Presne o to ide. Pri upravovaní mocnín zlomkov so záporným exponentom nemusíš pracovať so zloženým zlomkom. Stačí si uvedomiť, že

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

U: Na záver sa ešte vráťme k hmotnostiam Slnka a prachovej čiastočky, o ktorých sme hovorili v úvode.

Ž: *Už sa teším. Teda hmotnosť Slnka* $2 \cdot 10^{30}$ *kg môžeme zapísať jedným číslom, ktoré bude obsahovať číslicu 2 a za ňou tridsať núl.*

U: Áno. Teraz poďme na hmotnosť prachovej čiastočky, ktorá je $7 \cdot 10^{-10}$ kg. Skús to postupne pomocou definície rozpísať.

Ž: *Ak sa chcem zbaviť záporného exponentu, dám celú mocninu do menovateľa. Tak môžem písať:*

$$7 \cdot 10^{-10} = \frac{7}{10^{10}} = \ldots$$

U: Číslo 7 delíš desiatimi miliardami. To dostaneme výsledok … nula celá sedem desaťmiliardtín.

Ž: *To si neviem ani predstaviť.*

U: No a mať v exponente namiesto -10 napríklad -100, tak to už ani neprečítam.

Ž: *Veru, to by sa bez tých mocnín dosť ťažko zapisovalo.*

hmotnosť Slnka: $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{kg}$

hmotnosť prachovej čiastočky: $7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg} = 0{,}000\,000\,000\,7\,\mathrm{kg}$

Príklad 1: *Vypočítajte:*

a) 4^{-2}, $(-4)^{-2}$, -4^{-2};

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

U: V tejto úlohe sa trochu pohráme so znamienkami. Začneme úlohou ***a)***.

Ž: *Ak je v exponente záporné číslo, celá mocnina sa presúva do menovateľa. Teda*

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

U: A teraz sa pozri na ďalšie dva príklady.

Ž: *Pred číslom 4 je záporné znamienko. Akurát raz je tam zátvorka, druhýkrát nie. Aký je v tom rozdiel? Hm …nie je to to isté?*

U: To teda nie je. V prvom prípade (v mocnine so zátvorkami) sa exponent vzťahuje aj na záporné znamienko. V druhom prípade (v mocnine bez zátvoriek) umocňujeme iba číslo 4 bez záporného znamienka. Poďme na to.

Ž: *Pochopil som. Teda v „zátvorkovej“ mocnine dám do menovateľa -4, kým v „nezátvorkovej“ mocnine len číslo 4. Potom môžem písať:*

$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$$

a

$$-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}.$$

U: Zvládol si to výborne. Poďme na úlohu ***b)***. Tu budeme umocňovať na záporný exponent zlomok.

Ž: *Uf, ako na to?*

U: Ak v tom ešte nie si zbehlý, použi definíciu.

Ž: *Čiže do menovateľa dám celý zlomok.*

U: Presne tak. Budeš narábať so zloženým zlomkom.

Ž: *Skúsim. Teda*

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{4^2}} = \ldots$$

U: Teraz potrebuješ upraviť zložený zlomok. Najprv si urob z čitateľa tiež zlomok. Potom použi pomôcku: vonkajšie krát vonkajšie deleno vnútorné krát vnútorné.

Ž: *Dobre. Takže do čitateľa napíšem $\frac{1}{1}$. Predchádzajúci zlomok sa potom rovná:*

$$\ldots = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{1\cdot 4^2}{1\cdot 3^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}.$$

U: Správne. Všimni si tu však jednu dôležitú vec:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2}.$$

Ž: *Aha. Ak som to teda správne pochopil, ak umocním zlomok na záporný exponent, stačí zameniť čitateľ za menovateľa a zo záporného exponenta urobiť kladný.*

U: Pochopil si to správne. Skús to využiť v ďalšej úlohe.

Ž: *Teda v mocnine* $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ *zamením čitateľa s menovateľom. A nevadí záporné znamienko pred zlomkom?*

U: Nevadí.

Ž: *Teda*

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}.$$

U: Správne.

Úloha 1: *Vypočítajte:*

a) 2^{-3}, $(-2)^{-3}$, -2^{-3};

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

Výsledok: *a)* $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}$; *b)* 16, -16

Príklad 2: *Vypočítajte a výsledok upravte tak, aby v menovateli zlomku neboli odmocniny:*

a) $\left(\sqrt{5}\right)^{-1}$;

b) $\left(\sqrt{5}\right)^{-3}$.

U: Začneme úlohou ***a)***. Na odstránenie záporného exponentu použi definíciu.

Ž: *Teda celú mocninu dám do menovateľa. Potom*

$$\left(\sqrt{5}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\dots$$

U: No a teraz odstráň odmocninu z menovateľa. Ako na to?

Ž: *Áno, pamätám si. Vynásobíme čitateľa aj menovateľa* $\sqrt{5}$.

U: Správne. Zlomok rozšírime tým, že ho vynásobíme jednotkou zapísanou vo vhodnom tvare. Tým sa hodnota zlomku nezmení a keďže $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$, tak odstránime aj odmocninu z menovateľa.

Ž: *Teda predchádzajúci zlomok sa rovná zlomku:*

$$\dots=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

A to by už mal byť výsledok:

$$\left(\sqrt{5}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

U: Áno a je správny.

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Opäť najprv použi definíciu mocniny so záporným exponentom.

Ž: *Takže môžem písať:*

$$\left(\sqrt{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{3}}=\dots$$

U: Pokračuj odstránením odmociny z menovateľa.

Ž: *Podobne ak v úlohe a) vynásobím čitateľa aj menovateľa ... čím? Žeby* $\sqrt{5}$ *alebo* $(\sqrt{5})^3$*?*

U: Tento problém by som vyriešil tým, že by som najprv upravil menovateľa:

$$\left(\sqrt{5}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{5}.$$

Ž: *To znie rozumne. Potom stačí zlomok rozšíriť* $\sqrt{5}$. *Takže predchádzajúci zlomok sa rovná zlomku:*

$$\dots=\frac{1}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5\cdot(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 5}=\frac{\sqrt{5}}{25}.$$

U: Teda odpoveď znie:

$$\left(\sqrt{5}\right)^{-3}=\frac{\sqrt{5}}{25}.$$

Úloha 2: *Vypočítajte a výsledok upravte tak, aby v menovateli zlomku neboli odmocniny:*

a) $-\left(\sqrt{5}\right)^{-2}$;

b) $\left(\sqrt{3}\right)^{-4}+\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$.

Výsledok: *a)* $-\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{4}{9}$

Príklad 3: *Vypočítajte a výsledok upravte tak, aby v menovateli zlomku neboli odmocniny:*

a) $(\sqrt{5}-2)^{-1}$;

b) $(1+\sqrt{5})^{-2}$.

U: Začneme úlohou ***a)***. Na odstránenie záporného exponentu použi definíciu.

Ž: *Teda celú mocninu dám do menovateľa. Potom*

$$(\sqrt{5}-2)^{-1} = \frac{1}{(\sqrt{5}-2)^{1}} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \dots$$

U: No a teraz odstráň odmocninu z menovateľa. Ako na to?

Ž: *Vynásobím čitateľa aj menovateľa* $\sqrt{5}$.

U: Skús, čo to urobí.

Ž: *Dostanem:*

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = \dots$$

No, to som sa tej odmocniny v menovateli nezbavil.

U: Takže vráťme sa späť o riadok vyššie. V menovateli tam máme $\sqrt{5}-2$. Skús rozšíriť zlomok tak, aby si použil vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Takto sa budeš môcť zbaviť nepríjemnej odmocniny.

Ž: *To znie rozumne. Takže celý zlomok rozšírim výrazom* $\sqrt{5}+2$. *Potom sa výraz* $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ *bude rovnať výrazu:*

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2.$$

To by už mal byť výsledok.

U: Áno a je správny.

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Opäť najprv použi definíciu mocniny so záporným exponentom.

Ž: *Dobre. Dostanem:*

$$(1+\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})^{2}} = \dots$$

U: Umocni menovateľa.

Ž: *OK. Takže predchádzajúci zlomok sa rovná zlomku:*

$$\dots = \frac{1}{1+2\sqrt{5}+5} = \frac{1}{6+2\sqrt{5}} = \dots$$

U: Ešte ostáva odstrániť odmocninu z menovateľa.

Ž: *To netuším ako ...*

U: Opäť vynásobíme zlomok jednotkou vo vhodnom tvare. Tentokrát nestačí vynásobiť čitateľa aj menovateľa $\sqrt{5}$. Chceme použiť vzorec $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Preto zlomok rozšírime dvojčlenom $6-2\sqrt{5}$. Tak dostaneme zlomok:

$$\ldots = \frac{1}{6+2\sqrt{5}} \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{6^2-(2\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{6-2\sqrt{5}}{36-4\cdot 5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{36-20} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \ldots$$

Ž: *Uf, dosť komplikované.*

U: Ešte môžeme zlomok krátiť číslom 2. Tak dostaneme výsledok:

$$\ldots = \frac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

Odpoveď potom znie:

$$(1+\sqrt{5})^{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

Úloha 3: *Vypočítajte a výsledok upravte tak, aby v menovateli zlomku neboli odmocniny:*

a) $(1-\sqrt{5})^{-1}$;

b) $(-2+\sqrt{3})^{-2}$.

Výsledok: *a)* $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; *b)* $7+4\sqrt{3}$

Príklad 4: *Vypočítajte:*

$$\left(\frac{a^2b^{-4}c^0}{c^{-3}d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^4b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2}.$$

Ž: *Mne vadia v exponentoch tie záporné čísla. Najprv by som odstránil tie.*

U: V podstate súhlasím. Ide len o to, aký postup zvolíš, aby to bolo čo najelegantnejšie a čo najkratšie. Ja by som najprv odstránil zátvorky. Pri umocňovaní mocniny exponenty vynásobíme. Preto v prvej zátvorke exponenty vynásobíme číslom -3 a v druhej číslom -2. Tak dostaneme:

$$\left(\frac{a^2b^{-4}c^0}{c^{-3}d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^4b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2} = \frac{a^{-6}b^{12}c^0}{c^9d^6} : \frac{a^{-8}b^6}{c^4d^4} = \dots$$

Ž: *Hocičo na nultú je nula, preto $c^0 = 1$. Deliť zlomkom znamená násobiť jeho prevrátenou hodnotou, preto delenie prevediem na násobenie. Tak sa predchádzajúci zlomok rovná zlomku:*

$$\dots = \frac{a^{-6}b^{12}}{c^9d^6} \cdot \frac{c^4d^4}{a^{-8}b^6} = \dots$$

U: Teraz môžeš odstrániť záporné exponenty i keď by to išlo aj bez toho.

Ž: *Ak zamením záporný exponent za kladný, tak celú mocninu musím prehodiť z čitateľa do menovateľa, resp. z menovateľa do čitateľa. Tak dostanem výraz:*

$$\dots = \frac{b^{12}}{a^6c^9d^6} \cdot \frac{a^8c^4d^4}{b^6} = \dots$$

U: Teraz je čas na krátenie. Pri delení budeme exponenty odčítavať. Z $\frac{a^8}{a^6}$ ostane v čitateli a^2. Ďalej z $\frac{b^{12}}{b^6}$ ostane v čitateli b^6 a z $\frac{c^4}{c^9}$ ostane v menovateli c^5. Nakoniec z $\frac{d^4}{d^6}$ ostane v menovateli d^2. Predchádzajúci zlomok sa potom rovná zlomku:

$$\dots = \frac{a^2b^6}{c^5d^2}.$$

Ž: *S tým už veľa nenarobíme. To už bude výsledok.*

U: Áno, je. No nezabudnime na ***podmienky***.

Ž: *Jasné. Všetko, čo je v menovateli, musí byť rôzne od nuly. Preto:*

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Úloha 4: *Vypočítajte:*

$$\left(\frac{a^{-3}b^{-7}c^0}{a^{-5}b^{-11}c^{13}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a^2b^{-3}c^{-4}}{a^4b^7}\right)^{-2} = \dots$$

Výsledok: $\frac{b^4c^{60}}{a^4}$, $a, b, c \neq 0$

Príklad 5: *Vypočítajte:*

$$\left[\frac{1}{(x+y)^{-3}}\right]^{-2} \cdot (x+y)^{-3}.$$

Ž: *Nepáčia sa mi tie záporné exponenty. Preto najprv odstránim tie.*

U: V poriadku. No, aby to bolo čo najjednoduchšie, najprv odstráň hranatú zátvorku. Budeš umocňovať mocninu, preto exponenty vynásob.

Ž: *OK. Preto:*

$$\left[\frac{1}{(x+y)^{-3}}\right]^{-2} \cdot (x+y)^{-3} = \frac{1^{-2}}{(x+y)^{6}} \cdot (x+y)^{-3} = \dots$$

U: Ako to bude s 1^{-2}.

Ž: *Hm …podľa definície*

$$1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Takže tam ostane jednotka. No a v $(x+y)^{-3}$ odstránim záporný exponent tým, že celý zlomok dám do menovateľa. Predchádzajúci výraz sa preto rovná výrazu:

$$\dots = \frac{1}{(x+y)^6} \cdot \frac{1}{(x+y)^{3}} = \dots$$

U: V menovateľoch máme rovnaké základy, preto exponenty stačí sčítať. Dostaneme tak výsledok:

$$\dots = \frac{1}{(x+y)^9}.$$

Ž: *To nebolo ťažké. Ešte určím* **podmienky**. *Menovateľ musí buť rôzny od nuly, preto:*

$$x \neq -y.$$

Úloha 5: *Vypočítajte:*

$$(a-b)^{-2} : \left(\frac{1}{a-b}\right)^2 = \dots$$

Výsledok: $1,\ a \neq b$

Príklad 6: *Vypočítajte:*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}.$$

Ž: *Nepáčia sa mi tie záporné exponenty. Chcem sa ich zbaviť.*

U: Nie tak rýchlo. Najprv uprav výrazy v zátvorkách, daj ich na spoločného menovateľa.

Ž: *OK. Môžem písať:*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{ab+1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{ba-1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a^2b^2-1}{ab}\right)^{2}=\dots$$

U: Teraz je čas na zbavenie sa záporných exponentov. Môžeš to urobiť buď použitím definície cez zložený zlomok, alebo si to skrátiš: stačí vymeniť čitateľa s menovateľom a záporný exponent zmeniť na kladný.

Ž: *Zvolím si tú kratšiu cestu. Potom predchádzajúci výraz sa rovná výrazu:*

$$\dots=\left(\frac{b}{ab+1}\right)^{2}\cdot\left(\frac{a}{ba-1}\right)^{3}\cdot\left(\frac{a^2b^2-1}{ab}\right)^{2}=\dots$$

U: Teraz využijeme pravidlo umocnenia zlomku, podľa ktorého môžeme umocniť zvlášť čitateľa a zvlášť menovateľa. Tak dostaneme výraz:

$$\dots=\frac{b^2}{(ab+1)^2}\cdot\frac{a^3}{(ba-1)^3}\cdot\frac{(a^2b^2-1)^2}{(ab)^2}=\dots$$

Ž: *Už sa črtá možné krátenie. Chcel by som použiť vzťah*

$$(ab+1)(ab-1)=a^2b^2-1,$$

no mám tam rôzne mocniny: druhú aj tretiu.

U: Žiaden problém: tretiu mocninu rozdelíme na druhú a prvú. Dostaneme výraz:

$$\dots=\frac{b^2}{(ab+1)^2}\cdot\frac{a^3}{(ab-1)^2\cdot(ab-1)}\cdot\frac{(a^2b^2-1)^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{b^2a^3}{[(ab+1)(ab-1)]^2(ab-1)}\cdot\frac{(a^2b^2-1)^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{b^2a^3}{(a^2b^2-1)^2(ab-1)}\cdot\frac{(a^2b^2-1)^2}{a^2b^2}=\dots$$

Ž: *Ako sa to pekne upravilo. Teraz môžem celý výraz krátiť „červeným“výrazom* $(a^2b^2-1)^2$. *Ďalej môžem krátiť „modrým“ výrazom* b^2 *a nakoniec z* $\frac{a^3}{a^2}$ *mi v čitateli ostane* a. *Výsledok bude potom vyzerať takto:*

$$\dots=\frac{a}{ab-1}.$$

U: Uznaj, že je to oveľa krajší výraz ako ten pôvodný.

Ž: *Neviem, či práve krajší, no jednoduchší určite.*

U: Nezabudnime na ***podmienky***. Všetky výrazy, ktoré v priebehu celého výpočtu vystupujú v menovateli, musia byť rôzne od nuly.

Ž: *Pokúsim sa na nič nezabudnúť. Takže:*

$$b \neq 0, \quad a \neq 0, \quad ab + 1 \neq 0, \quad ab - 1 \neq 0.$$

Dúfam, že je to všetko.

U: Áno, je. Ešte posledné dve podmienky môžeme upraviť. Rovno to zhrnieme do odpovede. ***Pre*** $a \neq 0$***,*** $b \neq 0$***,*** $a \neq \pm\frac{1}{b}$ ***platí***

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^{2} = \frac{a}{ab - 1}.$$

Úloha 6: *Vypočítajte:*

$$\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-2} - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-1} = \dots$$

Výsledok: $\frac{2xy+2y^2}{(x-y)^2}$, $x \neq \pm y$

Príklad 7: *Zjednodušte a určte podmienky, kedy má daný výraz zmysel:*

$$[x^{-1}\cdot(x^{-1}-x^{-2})]^{-1}+[x\cdot(x^{-1}-1^{-1})]^{-1}.$$

Ž: *Je tu veľmi veľa záporných exponentov.*

U: Preto buď opatrný a postupuj pri úpravách pomaly využijúc definíciu mocniny so záporným exponentom. Najprv uprav vnútro hranatých zátvoriek.

Ž: *Ak sa chcem zbaviť záporného exponentu, musím dať mocninu do menovateľa zlomku. Preto:*

$$[x^{-1}\cdot(x^{-1}-x^{-2})]^{-1}+[x\cdot(x^{-1}-1^{-1})]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\right]^{-1}+\left[x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1}\right)\right]^{-1}=\dots$$

Teraz sa zbavím záporného exponentu pri hranatých zátvorkách.

U: V tomto štádiu to nie je také jednoduché. Najprv by som upravil výrazy v hranatých zátvorkách na jeden zlomok.

Ž: *V poriadku. Takže predchádzajúci výraz sa rovná výrazu:*

$$\dots=\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{x^2}\right]^{-1}+\left[x\cdot\frac{1-x}{x}\right]^{-1}=\dots$$

V druhej zátvorke skrátim x s x a dostanem:

$$\dots=\left[\frac{x-1}{x^3}\right]^{-1}+[1-x]^{-1}=\dots$$

U: Výborne. Ešte sa zbavme záporných exponentov -1. Len si uvedomme, že pri umocnení zlomku na záporný exponet stačí zameniť čitateľa s menovateľom a záporný exponent zmeniť na kladný. Potom dostaneme výraz:

$$\dots=\left[\frac{x^3}{x-1}\right]^{1}+\left[\frac{1}{1-x}\right]^{1}=$$

$$=\frac{x^3}{x-1}+\frac{1}{1-x}=\dots$$

Ž: *To už vyzerá krajšie. Skôr, než dám oba zlomky na spoločného menovateľa, vyberiem z druhého menovateľa pred zátvorku záporné znamienko.*

U: Presnejšie, číslo -1.

Ž: *Dostanem:*

$$\dots=\frac{x^3}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\dots$$

U: Už ti veľa nechýba.

Ž: *Po odčítaní zlomkov dostanem:*

$$\dots=\frac{x^3-1}{x-1}=\dots$$

U: V čitateli použime vzorec

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Pripravme si tak zlomok na prípadné možné krátenie.

Ž: *Tak dostanem:*

$$\ldots = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1.$$

Po skrátení zlomku výrazom $x - 1$ som dostal výsledok.

U: Nezabudni na ***podmienky***. Všetky výrazy vystupujúce v menovateli v priebehu celého výpočtu musia byť rôzne od nuly.

Ž: *Takže:*

$$x \neq 0, \quad x \neq 1.$$

U: Odpoveď potom znie:
pre $x \neq 0$***,*** $x \neq 1$ ***platí:***

$$[x^{-1} \cdot (x^{-1} - x^{-2})]^{-1} + [x \cdot (x^{-1} - 1^{-1})]^{-1} = x^2 + x + 1.$$

Úloha 7: *Zjednodušte a určte podmienky, kedy má daný výraz zmysel:*

$$[1 + (x^{-2} - 1)^{-1}]^{-1} + [1 - (x^{-2} + 1)^{-1}]^{-1} = \ldots$$

Výsledok*:* 2*;* $x \neq 0$*,* $x \neq \pm 1$

Príklad 8: *Upravte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\frac{[(x+y)^2\cdot(x^2-y^2)]^{-1}}{(x^2-y^2)^{-3}}.$$

Ž: *Najprv sa zbavme tých záporných exponentov, vadia mi tam.*

U: Urobíš dobre. Z definície mocniny so záporným exponentom vyplýva, že ak prehodíš mocninu z čitateľa do menovateľa, tak sa exponent zmení zo záporného na kladný. To isté platí aj keď prehodíš mocninu z menovateľa do čitateľa, tiež sa exponent zmení zo záporného na kladný.

Ž: *Jasné. Tak môžem písať:*

$$\frac{[(x+y)^2\cdot(x^2-y^2)]^{-1}}{(x^2-y^2)^{-3}}=\frac{(x^2-y^2)^{3}}{[(x+y)^2\cdot(x^2-y^2)]^{1}}=\dots$$

U: Teraz by to už nemal byť problém dokončiť.

Ž: *Takže predchádzajúci výraz sa rovná výrazu:*

$$\dots=\frac{(x^2-y^2)^3}{(x+y)^2\cdot(x^2-y^2)}=\dots$$

Po vykrátení zlomku výrazom (x^2-y^2) dostanem výraz:

$$\dots=\frac{(x^2-y^2)^{2}}{(x+y)^2}=\dots$$

U: Teraz sa priam núka použiť v čitateli vzorec

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

Ž: *OK. Dostanem výraz:*

$$\dots=\frac{[(x-y)(x+y)]^2}{(x+y)^2}=\frac{(x-y)^{2}(x+y)^{2}}{(x+y)^2}=\dots$$

Už len skrátim zlomok výrazom $(x+y)^2$. Dostanem výsledok:

$$\dots=(x-y)^2.$$

U: Nezabudni na podmienky. Všetky výrazy vystupujúce v priebehu celého výpočtu v menovateli musia byť rôzne od nuly.

Ž: *Jasné. Nedá sa deliť nulou.* **Podmienky** *sú preto nasledovné:*

$$x^2-y^2\neq 0,\quad (x+y)^2\neq 0.$$

U: Vyriešme ich.

Ž: *Použijem vzorec, potom prvá podmienka bude vyzerať takto:*

$$(x+y)(x-y) \neq 0,$$

z čoho vyplýva, že

$$x \neq \pm y.$$

U: Ostáva nám druhá podmienka.

Ž: *Druhá mocnina sa nerovná nule práve vtedy, keď sa nule nerovná základ. Preto:*

$$x+y \neq 0,$$

z čoho

$$x \neq -y.$$

U: Zhrňme to do odpovede:

pre $x \neq \pm y$ ***platí:***

$$\frac{[(x+y)^2 \cdot (x^2-y^2)]^{-1}}{(x^2-y^2)^{-3}} = (x-y)^2.$$

Úloha 8: *Upravte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\frac{(x-y)^{-3}}{[(x^2-y^2)^2(x-y)]^{-1}} = \dots$$

Výsledok: $(x+y)^2$; $x \neq \pm y$

Príklad 9: *Vynásobte a upravte* $(a, b \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{N})$*:*

$$a^m(a^n + b^m) + b^m(a^m + b^n).$$

Ž: *Tie výrazy v zátvorkách vyzerajú byť rovnaké.*

U: Ale nie sú. Prezri si ich poriadne.

Ž: *Jasné, v prvej je* $a^n + b^m$*, v druhej* $a^m + b^n$*. Sú tu len vymenené exponenty* n *za* m *a naopak. Takže len roznásobím prvú, potom druhú zátvorku a nakoniec posčítavam, čo sa bude dať.*

U: Súhlasím. Tak hor sa na to.

Ž:

$$a^m(a^n + b^m) + b^m(a^m + b^n) = a^m \cdot a^n + a^m \cdot b^m + b^m \cdot a^m + b^m \cdot b^n = \dots$$

U: Teraz pri násobení mocnín s rovnakým základom stačí sčítať exponenty.

Ž: *OK. Dostaneme:*

$$\dots = a^{m+n} + a^m \cdot b^m + b^m \cdot a^m + b^{m+n} = \dots$$

Ďalej $a^m \cdot b^m$ *a* $b^m \cdot a^m$ *môžem sčítať, dostanem:*

$$\dots = a^{m+n} + 2a^m \cdot b^m + b^{m+n}.$$

U: Správne. Keby sme veľmi chceli tak ešte môžeme zlúčiť dve mocniny s rovnakým exponentom do jednej. Trochu si to precvič a skús to.

Ž: *Tak rovnaké exponenty majú* a^{m+n} *s* b^{m+n} *a* a^m *s* b^m*. Preto môžem písať:*

$$\dots = (a + b)^{m+n} + 2(ab)^m.$$

U: No, nie tak rýchlo. Povedz mi, aké vzorce si pri tom použil.

Ž: *Tak:* $a^n + b^n = (a + b)^n$ *a* $a^n \cdot b^n = (ab)^n$*.*

U: Naozaj platia oba? Pre sčítanie mocnín s rovnakým exponentom nič také neplatí. Platí to iba pre násobenie a delenie. Oprav to.

Ž: *Tak potom to bude vyzerať takto:*

$$= a^{m+n} + 2(ab)^m + b^{m+n}.$$

U: Teraz je to správne.

Úloha 9: *Vynásobte a upravte* $(a,\ b \in \mathbb{R},\ n,\ m \in \mathbb{N})$*:*

$$a^m(a^n - b^m) + b^m(a^m + b^n).$$

Výsledok*:* $a^{m+n} + b^{m+n}$