Racionálne lomené výrazy

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Reč bude o racionálne lomených výrazoch.

Ž: *V názve sa skrýva, že tam budú nejaké zlomky.*

U: Uvažuješ správne.
Racionálne lomeným výrazom nazývame podiel dvoch mnohočlenov, pričom menovateľ nie je nulový mnohočlen.

Ž: *Chce to nejaký príklad.*

U: Racionálne lomenými výrazmi sú napríklad výrazy:

$$\frac{x^2-x-2}{2x+2}, \quad \frac{2}{x^2-4}, \quad \frac{x^3-3x+5}{6}.$$

U: Skús vypočítať hodnotu prvého výrazu pre $x = 1$, a potom pre $x = -1$.

Ž: *To nebude problém. Pre $x = 1$ hodnotu výrazu $\frac{x^2-x-2}{2x+2}$ vypočítam nasledovne:*

$$\frac{1^2-1-2}{2\cdot 1+2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Pre $x = -1$ postupujem rovnako, teda:

$$\frac{(-1)^2-(-1)-2}{2\cdot(-1)+2} = \frac{1+1-2}{-2+2} = \frac{0}{0} = \dots$$

No, tu je problém. V menovateli je nula a nulou sa nedá deliť.

U: Správne. Môžeme povedať, že pre $x = -1$ daný výraz nemá zmysel. Preto pri úpravách racionálne lomených výrazov bude veľmi dôležité určenie ***definičného oboru výrazu*** D. Častejšie hovoríme, že určujeme ***podmienky***, pre ktoré má daný výraz zmysel.

Ž: *Takže definičný obor nášho spomínaného výrazu $\frac{x^2-x-2}{2x+2}$ je $D = \mathbb{R} - \{-1\}$, lebo*

$$2x + 2 \neq 0.$$

A to je práve vtedy, keď

$$x \neq -1.$$

U: Presne tak. Skús teraz určiť podmienky druhého výrazu $\frac{2}{x^2-4}$.

Ž: *Menovateľ sa nesmie rovnať nule, teda*

$$x^2 - 4 \neq 0,$$

z čoho podľa vzorca $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ dostaneme

$$(x+2)(x-2) \neq 0.$$

Teda

$$x \neq \pm 2.$$

U: Správne. Pre úplnosť urč definičný obor aj posledného výrazu $\frac{x^3-3x+5}{6}$.

Ž: *Veď tu v menovateli je číslo* 6*. A to nikdy nebude nulou.*

U: Presne tak. Preto definičným oborom tohto výrazu je celá množina reálnych čísel: $D = \mathbb{R}$.

$\frac{x^2-x-2}{2x+2}$	$D = \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{2}{x^2-4}$	$D = \mathbb{R} - \{2, -2\}$
$\frac{x^3-3x+5}{6}$	$D = \mathbb{R}$

U: Aby to bolo prehľadnejšie, povedzme si, čo všetko môžeme s racionálne lomenými výrazmi robiť. Môžeme ich

- ***zjednodušovať***,
- ***násobiť***,
- ***deliť***,
- ***sčítavať a odčítavať***.

No a samozrejme ešte to všetko môžeme kombinovať.

Ž: *Mohli by sme si to povedať podrobnejšie?*

U: Pri ***zjednodušovaní*** racionálne lomených výrazov si ***najprv menovateľa aj čitateľa upravíme na súčin***. Je to príprava na prípadne možné krátenie.

Ž: *Opäť to chce nejaký príklad.*

U: Pokúsme sa zjednodušiť náš prvý výraz $\frac{x^2-x-2}{2x+2}$.

Ž: *Takže mám upraviť čitateľa aj menovateľa na súčin. V menovateli vyberiem pred zátvorku číslo* 2*, čím dostanem $2x+2 = 2(x+1)$. A čo s čitateľom?*

U: Je to kvadratický trojčlen, ktorý môžeme napísať ako súčin lineárnych dvojčlenov buď metódou „***úpravy na štvorec***“ alebo pomocou ***Viètových vzťahov***. V tomto jednoduchom výraze uprednostníme Viètove vzťahy: absolútny člen $-2 = (-2) \cdot 1$ a koeficient pri lineárnom člene $-1 = -2 + 1$. Preto $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Skús pokračovať.

Ž: *Môžem zapísať:*

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x + 2} = \frac{(x-2)(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x-2}{2}.$$

Pri poslednej úprave som zlomok vykrátil výrazom $(x+1)$.

U: Urobil si dobre.

Ž: **Násobenie racionálne lomených výrazov** *sa zrejme nebude ničím líšiť od násobenia zlomkov.*

U: Presne tak. Vynásobíme čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom. Pritom sa snažíme čo najviac upravovať čitateľa aj menovateľa na súčin pre prípadné možné krátenie.

Ž: *Zvoľme nejaký konkrétny príklad.*

U: Skús vynásobiť

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2} = \dots$$

Ž: *Čiže všetko si dám na jednu zlomkovú čiaru a pri tom ešte na prvého čitateľa použijem vzorec* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. *Preto predchádzajúci výraz sa rovná:*

$$\dots = \frac{(a+b)(a-b) \cdot a^4}{a^2 \cdot (a+b)^2} = \dots$$

Teraz môžem zlomok vykrátiť výrazom $(a+b)$ *aj výrazom* a^2. *Tak dostanem výsledok*

$$\dots = \frac{(a-b) \cdot a^2}{a+b}.$$

U: Je to správne, len nesmieme zabudnúť na podmienky. Vo všetkých upravovaných lomených výrazoch musia byť menovatele rôzne od nuly, teda:

$$a \neq 0, \quad a \neq -b.$$

U: Pokračujeme ***delením racionálne lomených výrazov***. Opäť to bude rovnaké, ako pri delení zlomkov. Delenie prevedieme na násobenie prevráteným zlomkom. Čiže v zlomku, ktorý je deliteľom, zameníme čitateľa s menovateľom. Skúsme to urobiť na príklade. Vydeľ:

$$\frac{x^2 - y^2}{6x^2y^2} : \frac{x - y}{3xy} = \dots$$

Ž: *Delenca vynásobím prevráteným deliteľom, teda zlomkom* $\frac{3xy}{x-y}$*. Zároveň na prvého čitateľa použijem vzorec. Preto sa to rovná:*

$$\ldots = \frac{(x+y)(x-y)}{6x^2y^2} \cdot \frac{3xy}{x-y} = \ldots$$

Teraz sa výraz $x-y$ *z čitateľa aj menovateľa vykráti. Tiež vykrátim* $3xy$ *a* $6x^2y^2$*, čím nám v menovateli ostane výraz* $2xy$*. Preto sa predchádzajúci výraz rovná výrazu*

$$\ldots = \frac{x+y}{2xy}.$$

U: Všetko si urobil správne. No opäť nesmieme zabudnúť na ***podmienky***. A to na všetky, teda aj na prevrátený zlomok. Čiže

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq y.$$

S delením zlomkov úzko súvisí aj ***zložený zlomok***. Nie je to nič iné ako delenie, len ináč zapísané.

Ž: *Mám to chápať tak, že pôvodný príklad na delenie som mohol zapísať aj takto:*

$$\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x-y}{3xy} = \frac{\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2}}{\frac{x-y}{3xy}}.$$

U: Chápeš to správne. Ako pomôcka sa zvykne pri úprave zložených zlomkov pamätať, že vynásobíme vonkajší člen s vonkajším (v rámčeku znázornené červeným) deleno vnútorný člen krát vnútorný (v rámčeku znázornené modrým).

$$\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x-y}{3xy} = \frac{\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2}}{\frac{x-y}{3xy}} = \frac{(x^2-y^2)\cdot 3xy}{6x^2y^2\cdot(x-y)} = \frac{x+y}{2xy}$$

$$\text{pre} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq y$$

Ž: *Ešte nám ostalo* **sčítanie a odčítanie racionálne lomených výrazov***.*

U: Opäť postupujeme ako pri zlomkoch. Najprv nájdeme spoločného menovateľa. Najvhodnejším je najmenší spoločný násobok výrazov, ktoré sú v menovateľoch zlomkov.

Ž: *Ukážme si to na príklade.*

U: Odčítaj nasledujúce výrazy:

$$\frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2-xy} = \ldots$$

Ž: *Najprv nájdem spoločného menovateľa. Môžem zobrať ich súčin* $(xy-y^2)(x^2-xy)$*.*

U: To môžeš, no skomplikuješ si tým život. Pri zjednodušovaní výsledku budeš musieť robiť veľa úprav. Jednoduchšie bude zobrať najmenší spoločný násobok menovateľov. Preto si ich najprv upravíme na súčin. V prvom menovateli vyberieme pred zátvorku y, v druhom x. Potom sa predchádzajúci rozdiel bude rovnať:

$$\ldots = \frac{x}{y(x-y)} - \frac{y}{x(x-y)} = \ldots$$

Ž: *Teda spoločným menovateľom bude výraz $xy(x-y)$. Môžeme pokračovať v úpravách:*

$$\ldots = \frac{x^2 - y^2}{xy(x-y)} = \ldots$$

U: Teraz v čitateli použi vzorec $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Potom môžeš výsledok zjednodušiť vykrátením zlomku výrazom $(x-y)$.

Ž: *Pomalšie. Ja si to radšej napíšem:*

$$\ldots = \frac{(x+y)(x-y)}{xy(x-y)} = \frac{x+y}{xy}.$$

Tentokrát nezabudnem ani na **podmienky***:*

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq y.$$

U: Zvládol si to veľmi dobre.

U: No a v závere môžeme všetko pomiešať. Čo by si povedal na taký výraz:

$$\frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) : (a+b) - \frac{2}{a+b}}{\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2}?$$

Skús si ho upraviť sám.

Ž: *Uf...*

Príklad 1: *Zjednodušte:*

$$\frac{ax + bx + 2a + 2b}{ax + ay + bx + by}.$$

Ž: *Takže chcem upraviť čitateľa aj menovateľa na súčin pre prípadné možné krátenie. Neviem zo všetkých členov čitateľa vybrať pred zátvorku nič spoločné, tak vyberiem z prvých dvoch členov x a z druhých dvoch číslo 2. V menovateli zase z prvých dvoch členov vyberiem tiež premennú a, z druhých dvoch b. Tak dostanem:*

$$\frac{ax + bx + 2a + 2b}{ax + ay + bx + by} = \frac{x(a+b) + 2(a+b)}{a(x+y) + b(x+y)} = \dots$$

U: Ideš na to dobre. Teraz sa nám priam núka v čitateli vybrať pred zátvorku dvojčlen $(a+b)$ a v menovateli $(x+y)$. Predchádzajúci výraz sa tak rovná:

$$\dots = \frac{(a+b)(x+2)}{(x+y)(a+b)} = \dots$$

Ž: *Jasné. Teraz stačí zlomok vykrátiť dvojčlenom $(a+b)$. Dostanem výsledok:*

$$\dots = \frac{x+2}{x+y}.$$

U: Áno. No, na niečo si zabudol. Nedá sa deliť nulou, preto musíme určiť ***podmienky***, kedy má pôvodný, ale aj upravený výraz zmysel.

Ž: *Takže všetky menovatele musia byť nenulové. Preto:*

$$x \neq -y, \quad a \neq -b.$$

Úloha 1: *Zjednodušte:*

$$\frac{x^2 - xy - 2x + 2y}{x^3 - x^2y - 4x + 4y} = \dots$$

Výsledok: $\frac{1}{x+2}$, $x \neq y$, $x \neq \pm 2$

Príklad 2: *Zjednodušte:*

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}.$$

Ž: *Takže* **čitateľa** $x^2 - 7x + 12$ *si* **chcem upraviť na súčin**, *aby som mohol zlomok prípadne krátiť. No, nie je to také jednoduché, neviem nič vybrať pred zátvorku, ani žiaden vzorec mi to nepripomína.*

U: Ide o kvadratický trojčlen. Ak ho chceš napísať ako súčin lineárnych dvojčlenov, môžeš to urobiť:

- „***úpravou na štvorec***";
- v jednoduchších prípadoch aj pomocou ***Viètových vzťahov***;
- dokonca by si to mohol robiť aj vyriešením ***kvadratickej rovnice*** $x^2 - 7x + 12 = 0$;
- či ***delením čitateľa menovateľom***.

Tak si vyber.

Ž: *Uf, na výber je toho dosť. Otázne je, čo bude najjednoduchšie … Použijem Viètove vzťahy.*

U: Rozumne si si vybral. Musíš byť ale zbehlejší vo výpočtoch, aby si správne rozložil absolútny člen 12 na súčin a koeficient pri lineárnom člene -7 na súčet tých istých čísel.

Ž: *Pokúsim sa. Absolútny člen* 12 *je kladné číslo, preto hľadám dve kladné alebo dve záporné čísla. Lebo iba ich súčinom môže byť číslo kladné. No a keďže po ich sčítaní mám dostať* -7*, čo je záporné číslo, tak to musia byť dve záporné čísla.*

U: Veľmi dobrá úvaha. Číslo 12 vieme rozložiť na súčin takto:

$$12 = (-1) \cdot (-12),$$

$$12 = (-2) \cdot (-6),$$

$$12 = (-3) \cdot (-4).$$

Ktoré z týchto činiteľov dávajú v súčte číslo -7?

Ž: *To je ten tretí prípad, teda čísla* -3 *a* -4*. Takže môžem písať:*

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3),$$

lebo absolútny člen $12 = (-4) \cdot (-3)$ *a koeficient pri lineárnom člene* $-7 = -4 + (-3)$*. Teda pôvodný výraz môžem upraviť nasledovne:*

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x - 3)}{x - 4} = \ldots$$

Ešte vykrátim zlomok dvojčlenom $(x - 4)$ *a dostanem výsledok:*

$$\ldots = x - 3.$$

U: Nezabudni na ***podmienky***.

Ž: *Menovateľ sa nesmie rovnať nule, preto:*

$$x \neq 4.$$

U: Správne.

Úloha 2: *Zjednodušte:*

$$\frac{x^2 - 5x - 24}{x - 8} = \dots$$

Výsledok: $x + 3$, $x \neq 8$

Príklad 3: *Zjednodušte:*

$$\frac{6x^2+7x-3}{2x+3}.$$

Ž: *Najjednoduchšie je použiť Viètove vzťahy ...*

U: Tu by to nebolo také jednoduché. Koeficient pri kvadratickom člene nie je číslo 1, ale 6. Pekne by si sa zamotal.

Ž: *Tak mi ostáva úprava na štvorec.*

U: Máme aj inú možnosť. Môžeme sa na to pozrieť z nadhľadu. Ak sa dá zlomok krátiť, tak len výrazom $2x+3$. No a či sa naozaj zlomok dá krátiť, to zistíme delením

$$(6x^2+7x-3):(2x+3)=\dots$$

Ž: *To si musím spomenúť, ako sa to robí.*

U: Nič zložité. Postupuje sa presne tak isto, ako keby si delil dve čísla a zvyšky písal pod seba. Najprv si teda určím, koľkokrát sa nachádza deliteľ $(2x+3)$ v delenci $(6x^2+7x-3)$. Teraz ***si všímaj zápis v rámčeku***. Pozri na členy s najvyššou mocninou. Keďže my ich máme zoradené od najvyššej mocniny po najnižšiu, tak sa pozrime na prvé členy. V delenci je prvým členom $6x^2$, v deliteli $2x$. A vydeľ tie.

Ž: *Teda delím $6x^2:(2x)=3x$. Do podielu napíšem $3x$. Teraz vynásobím $3x$ s deliteľom $(2x+3)$ a zapíšem pod delenca. Teda $3x\cdot(2x+3)=6x^2+9x$.*

U: Aby sme mohli určiť zvyšok, pred $(6x^2+9x)$ napíšeme znamienko mínus. Tým naznačíme, že to chceme odčítať od nad ním napísaného výrazu.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\quad(6x^2+7x-3)\ \ :(2x+3)=3x\\
\underline{-(6x^2+9x)}\\
\qquad\quad -2x-3
\end{array}}$$

Ž: *A zvyšok $-2x-3$ sme dostali odčítaním polynómov*

$$(6x^2+7x-3)-(6x^2+9x)=6x^2+7x-3-6x^2-9x=-2x-3.$$

U: Ďalej pokračujeme rovnako. Teraz ***sa pozeraj na ďalší rámček***. Najprv zistíme, koľkokrát sa nachádza deliteľ $(2x+3)$ vo výraze $-2x-3$.

Ž: *To hneď vidím, že je to -1-krát. Preto do podielu pripíšem číslo -1. Vynásobím*

$$-1\cdot(2x+3)=-2x-3.$$

Zvyšok nám po odčítaní výrazov $(-2x-3)-(-2x-3)$ vyjde nulový.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\quad(6x^2+7x-3)\ \ :(2x+3)=3x-1\\
\underline{-(6x^2+9x)}\\
\qquad\quad -2x-3\\
\qquad\ \ \underline{-(-2x-3)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}}$$

Ž: *Čiže, ak sa vrátime k našej pôvodnej úlohe, čitateľa* $6x^2+7x-3$ *môžeme napísať ako súčin* $(2x+3)\cdot(3x-1)$*. Teda:*

$$\frac{6x^2+7x-3}{2x+3} = \frac{(2x+3)(3x-1)}{2x+3} = \dots$$

U: Správne. Teraz stačí celý zlomok krátiť výrazom $(2x+3)$. Výsledok potom bude rovný výrazu:

$$= 3x-1.$$

Nezabudnime na ***podmienky***.

Ž: *OK. Teda menovateľ musí byť rôzny od nuly, preto*

$$2x+3 \neq 0,$$

z čoho

$$x \neq -\frac{3}{2}.$$

Úloha 3: *Zjednodušte:*

$$\frac{12x^2-30x-18}{3x-9} = \dots$$

Výsledok: $4x+2,\ x\neq 3$

Príklad 4: *Vypočítajte:*

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{4x}{1-x^2}.$$

U: Čo s tým?

Ž: *Tak, najprv nájdem spoločného menovateľa. V tomto prípade to bude súčin* $(x-1)(x+1)$.

U: Správne. Len nezabudni z posledného menovateľa vybrať pred zátvorku znamienko mínus, resp. číslo -1. Potom $1 - x^2 = -(x^2-1) = -(x-1)(x+1)$.

Ž: *Teda:*

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{4x}{1-x^2} =$$
$$= \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{4x}{x^2-1} =$$
$$= \frac{2x(x+1) - x^2(x-1) - 4x}{(x-1)(x+1)} = \dots$$

U: Teraz uprav čitateľa.

Ž: *Po jeho roznásobení sa predchádzajúci výraz bude rovnať výrazu:*

$$\dots = \frac{2x^2 + 2x - x^3 + x^2 - 4x}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x}{(x-1)(x+1)} = \dots$$

No a to už je hádam výsledok.

U: A nedá sa ten zlomok ešte zjednodušiť? Skús upraviť čitateľa na súčin.

Ž: *Teda vyberiem pred zátvorku premennú* x.

U: Skús rovno vybrať $-x$.

Ž: *Dobre. Tak dostanem:*

$$\dots = \frac{-x(x^2 - 3x + 2)}{(x+1)(x-1)} = \dots$$

To ešte stále nemôžem krátiť.

U: Skús ešte kvadratický trojčlen $x^2 - 3x + 2$ rozložiť na súčin. Urob to priamo použitím ***Viètových vzťahov***.

Ž: *Keďže absolútny člen* $2 = (-1) \cdot (-2)$ *a koeficient pri lineárnom člene* $-3 = (-1) + (-2)$, *tak* $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. *Pokračujem v úpravách pôvodného výrazu, ktorý sa rovná:*

$$\dots = \frac{-x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \dots$$

U: Teraz sa nám priam núka krátenie lomeného výrazu dvojčlenom $(x-1)$, čím dostaneme:

$$\dots = \frac{-x(x-2)}{x+1} = \frac{x(-x+2)}{x+1} = \frac{x(2-x)}{x+1}.$$

Ž: *To je už konečný výsledok.*

U: Áno je, no nezabudnime ešte na ***podmienky***. Všetky výrazy vystupujúce v menovateľoch musia byť rôzne od nuly.

Ž: *Takže musí platiť:*

$$x-1 \neq 0, \quad x+1 \neq 0.$$

Po vyriešení dostanem:

$$x \neq 1, \quad x \neq -1.$$

Úloha 4: *Vypočítajte:*

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}+\frac{4}{4-a^2}=\dots$$

Výsledok: $\frac{2}{a+2}$, $a \neq \pm 2$

Príklad 5: *Upravte nasledujúci výraz:*

$$\left(\frac{4(a+b)^2}{ab} - 16\right) \cdot \frac{(a+b)^2 - ab}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

U: Tak, čo s tým?

Ž: *Ak sú vo výraze zátvorky, treba najprv upraviť výrazy v nich. Tak by som začal tým. Spoločný menovateľ bude ab. Potom môžem písať:*

$$\left(\frac{4(a+b)^2}{ab} - 16\right) \cdot \frac{(a+b)^2 - ab}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} =$$

$$= \frac{4(a+b)^2 - 16ab}{ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - ab}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} = \ldots$$

U: Čo povieš na prvých dvoch čitateľov?

Ž: *Mal by som ich upraviť na súčin pre prípadné možné krátenie. No hneď to nejde.*

U: Pokojne roznásob, čo sa dá, ono sa to už potom nejako vyvŕbi.

Ž: *Tak po použití vzorca* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *dostanem:*

$$\ldots = \frac{4(a^2 + 2ab + b^2) - 16ab}{ab} \cdot \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - ab}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} =$$

$$= \frac{4a^2 + 8ab + 4b^2 - 16ab}{ab} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} =$$

$$= \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{ab} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} = \ldots$$

U: Prvý čitateľ pôjde upraviť na súčin. Skús to.

Ž: *Najprv vyberiem číslo* 4 *pred zátvorku a dostanem:*

$$\ldots = \frac{4(a^2 - 2ab + b^2)}{ab} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} = \ldots$$

Teraz tam ešte použijem vzorec. Tak sa predchádzajúci výraz bude rovnať:

$$\ldots = \frac{4(a-b)^2}{ab} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} : \frac{a^3 - b^3}{ab} = \ldots$$

U: Už je na čase niečo robiť s tým delením.

Ž: *Operáciu delenia môžem previesť na operáciu násobenia prevráteným zlomkom. Preto po zamenení čitateľa s menovateľom v poslednom zlomku dostanem:*

$$\ldots = \frac{4(a-b)^2}{ab} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{a^3 - b^3} = \ldots$$

U: Ešte na posledného menovateľa použi vzorec $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ a budeš môcť krátiť a krátiť …

Ž: *Pokračujem v úpravách:*

$$\dots = \frac{4(a-b)^2}{ab} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \dots$$

U: Už stačí len urobiť naznačené „farebné“ krátenie: výraz $(a-b)$ s $(a-b)$ (je to znázornené červenou), potom „modrý“ výraz (a^2+ab+b^2) s výrazom (a^2+ab+b^2), a nakoniec „zelený“ výraz ab s ab. Tak dostaneme výsledok:

$$\dots = \frac{4(a-b)}{ab}.$$

Ž: *Výsledok je nakoniec celkom jednoduchý. Určite krajší ako pôvodný výraz.*

U: To je, no nezabudni na ***podmienky***.

Ž: *Teda všetky menovatele musia byť rôzne od nuly. Začnem pôvodným výrazom:*

$$a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

U: Nezabudni na prevrátený posledný zlomok.

Ž: *Tam som mal v menovateli a^3-b^3.*

U: Na určenie podmienky bude vhodnejší jeho súčinový tvar $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Ž: *Takže:*

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) \neq 0,$$

čo platí práve vtedy, keď

$$a \neq b \quad \textit{a zároveň} \quad a^2+ab+b^2 \neq 0.$$

U: Správne. Kvôli prehľadnosti zhrň ešte všetko do odpovede.

Ž: *Teda,* **pre** $a \neq 0$**,** $b \neq 0$**,** $a \neq b$**,** $a^2+ab+b^2 \neq 0$ **platí:**

$$\left(\frac{4(a+b)^2}{ab} - 16\right) \cdot \frac{(a+b)^2-ab}{ab} : \frac{a^3-b^3}{ab} = \frac{4(a-b)}{ab}.$$

Úloha 5: *Upravte nasledujúci výraz:*

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y^2}\right] : \left(\frac{x-1}{y}\right)^2 = \dots$$

Výsledok: $\frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$, $y \neq 0$

Príklad 6: *Vypočítajte:*

$$\left(\frac{x-5}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{2x-1}{x+1}\right).$$

U: Chceme vydeliť dva výrazy. Ako na to?

Ž: *Najprv by som mal upraviť to, čo je v zátvorkách. Spoločný menovateľ v oboch zátvorkách bude $(x+1)$. Potom:*

$$\left(\frac{x-5}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{2x-1}{x+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{x-5+x+1}{x+1}\right):\left(\frac{x+1-(2x-1)}{x+1}\right)=\dots$$

U: Správne si nezabudol dať výraz $(2x-1)$ do zátvorky.

Ž: *To kvôli znamienku mínus pred ním, ktoré nám zmení záporné znamienko pred jednotkou na kladné. Tak dostanem:*

$$\dots=\frac{2x-4}{x+1}:\frac{x+1-2x+1}{x+1}=$$

$$=\frac{2x-4}{x+1}:\frac{-x+2}{x+1}=\dots$$

U: Už poďme konečne na to delenie.

Ž: *Deliť zlomkom znamená násobiť prevráteným zlomkom, preto:*

$$\dots=\frac{2x-4}{x+1}\cdot\frac{x+1}{-x+2}=\dots$$

Teraz môžem menovateľ z prvého zlomku $x+1$ vykrátiť s druhým čitateľom. A dostanem výsledok:

$$\dots=\frac{2x-4}{-x+2}=\dots$$

U: Neunáhli sa. Uprav ešte čitateľa na súčin. A pokús sa ešte viac zjednodušiť tento zlomok.

Ž: *Takže:*

$$\dots=\frac{2(x-2)}{-x+2}=\dots$$

U: Nevieš z výrazu $-x+2$ urobiť výraz $x-2$?

Ž: *Jasné, vyberiem pred zátvorku záporné znamienko.*

U: Presnejšie: číslo -1.

Ž: *Dostanem:*

$$\ldots = \frac{2(x-2)}{-(x-2)} = \ldots$$

Po krátení výrazom $x-2$ mám výsledok rovný číslu:

$$\ldots = -2.$$

To akože do pôvodného výrazu môžem za premennú x dosadiť hocičo, výsledok bude vždy -2?

U: Úplne hocičo nie. Nie vždy má totiž pôvodný výraz zmysel.

Ž: *Aha,...* **podmienky**. *Všetky menovatele musia byť rôzne od nuly, teda:*

$$x+1 \neq 0, \quad -x+2 \neq 0.$$

To platí práve vtedy, keď

$$x \neq -1, \quad x \neq 2.$$

U: Správne. Zhrň to do odpovede.

Ž: **Pre $x \neq -1$ a $x \neq 2$ platí:**

$$\left(\frac{x-5}{x+1}+1\right) : \left(1-\frac{2x-1}{x+1}\right) = -2.$$

Úloha 6: *Vypočítajte:*

$$\left(\frac{1}{1-a}-1\right) : \left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right) = \ldots$$

Výsledok: $\frac{1}{a}$, $a \neq 1$, $a \neq 0$

Príklad 7: *Vypočítajte:*

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}}.$$

Ž: *Uf,... zlomok v zlomku.*

U: Áno, vystupuje tu zložený zlomok. Netreba sa však toho báť. Nie je to nič iné ako delenie. No najprv uprav čitateľa aj menovateľa.

Ž: *Spoločným menovateľom v čitateli bude a, v menovateli x. Potom:*

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = \frac{\frac{a^2-x^2}{a}}{\frac{x^2-a^2}{x}} = \dots$$

U: Teraz môžeš upraviť zložený zlomok. Buď si to prepíš na delenie, alebo ...

Ž: *Ja si pamätám, že zložený zlomok sa upravuje: vonkajšie krát vonkajšie deleno vnútorné krát vnútorné.*

U: Pamätáš si to správne. Je to to isté ako prepísanie zloženého zlomku na delenie, len tvojou pomôckou si ušetríš zopár krokov v úpravách.

Ž: *Takže predchádzajúci výraz sa rovná výrazu:*

$$\dots = \frac{(a^2 - x^2) \cdot x}{a(x^2 - a^2)} = \dots$$

U: Teraz z výrazu $x^2 - a^2$ urob výraz $a^2 - x^2$.

Ž: *Vyberiem -1 pred zátvorku. Tak dostanem:*

$$\dots = \frac{(a^2 - x^2) \cdot x}{-a(a^2-x^2)} = \dots$$

Už len vykrátim zlomok výrazom $a^2 - x^2$ a dostanem výsledok:

$$\dots = \frac{x}{-a} = -\frac{x}{a}.$$

Nebolo to také komplikované.

U: Nezabudni na ***podmienky***.

Ž: *Všetky menovatele musia byť rôzne od nuly. Teda*

$$a \neq 0, \quad x \neq 0.$$

U: Ešte si zabudol na

$$x^2 - a^2 \neq 0.$$

Prepíšeme si to do súčinového tvaru:

$$(x - a)(x + a) \neq 0,$$

čo platí práve vtedy, keď

$$x \neq \pm a.$$

Ž: *Odpoveď znie:* **Pre $x \neq 0$, $a \neq 0$, $x \neq \pm a$ platí:**

$$\frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} = -\frac{x}{a}.$$

Úloha 7: *Vypočítajte:*

$$\frac{\frac{r+1}{r-1} - \frac{r-1}{r+1}}{1 - \frac{r^2+1}{r^2-1}} = \dots$$

Výsledok: $-2r$, $r \neq \pm 1$

Príklad 8: *Vypočítajte:*

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}.$$

Ž: *Najprv nájdem spoločného menovateľa, preto druhého menovateľa upravím na súčin:*

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{(a+b)(a-b)}=\dots$$

Teraz je už spoločný menovateľ jasný. Je to výraz $(a+b)(a-b)$.

U: Aj tak sa dá. No skús sa na to lepšie pozrieť. Môžeš si uľahčiť úpravy, ak najprv oba zlomky zjednodušíš. Skús to.

Ž: *Takže použijem vzorce na oboch čitateľov. Dostanem:*

$$\dots=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}-\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}=\dots$$

Teraz skrátim oba zlomky výrazom $(a-b)$. *A jasné, že to bude ďalej jednoduchšie.*

U: Samozrejme. Tak dostaneš výraz:

$$\dots=a+b-\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}=\dots$$

Ž: *Teraz je spoločným menovateľom výraz* $(a+b)$. *Tak dostaneme:*

$$\dots=\frac{(a+b)^2-(a^2+ab+b^2)}{a+b}=\dots$$

U: Výborne. Vidím, že si nezabudol dať výraz a^2+ab+b^2 do zátvoriek.

Ž: *Samozrejme, znamienko mínus pred zátvorkou zmení po jej odstránení znamienka. Tak dostanem:*

$$\dots=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-ab-b^2}{a+b}=$$

$$=\frac{ab}{a+b}.$$

A to už je výsledok.

U: V poriadku. Nezabudni na ***podmienky***.

Ž: *Všetky menovatele musia byť rôzne od nuly, teda:*

$$a-b\neq 0,\quad a+b\neq 0.$$

Tak dostanem:

$$a\neq\pm b.$$

U: Odpoveď znie: ***Pre*** $a \neq \pm b$ ***platí:***

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a+b}.$$

Úloha 8: *Vypočítajte:*

$$\frac{3a-6}{a^2-4}+\frac{a+1}{a^2-9}-\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}=\dots$$

Výsledok*:* $\frac{3a^2+7a-28}{(a^2-9)(a+2)}$, $a \neq \pm 2$, $a \neq \pm 3$