Rozklad mnohočlenov na súčin

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Teraz si ukážeme, ako môžeme rozložiť mnohočlen na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa. Napr. $3x^2 - 3xy = 3x(x - y)$, alebo $3(x^2 - y^2) = 3(x - y)(x + y)$.

Ž: *A načo je to dobré?*

U: Je to príprava na zjednodušovanie lomených výrazov. V nich si čitateľa aj menovateľa upravíme na súčin, aby sme ich mohli prípadne krátiť. Napr. pre $x \neq \pm y$ platí:

$$\frac{3x^2 - 3xy}{3(x^2 - y^2)} = \frac{3x(x - y)}{3(x - y)(x + y)} = \frac{x}{x + y}.$$

Uznaj, že konečný výraz je jednoduchší ako ten pôvodný.

Ž: *To teda je.*

U: Ale tomu sa budeme venovať viac inde. Vráťme sa späť k upravovaniu mnohočlena na súčin. Najčastejšie to môžeme urobiť:

- ***vynímaním pred zátvorku***,
- ***pomocou vzorcov***,
- ***úpravou kvadratického mnohočlena na štvorec***.

Ž: *To bolo na mňa prirýchle.*

U: Pôjdeme pomaly a na všetko si ukážeme príklady. Najjednoduchšie sa mnohočleny upravujú na súčin ***vynímaním pred zátvorku***. Pred zátvorku môžeme vyňať jednočlen (ako sme to urobili v úvodnom príklade: $3x^2 - 3xy = 3x(x - y)$), alebo aj viacčlen.

Ž: *Môžeme si uviesť nejaký príklad?*

U: Samozrejme. Napr. z takého výrazu $2a - 2b + ac - bc$ sa nedá nič vybrať pred zátvorku. No dá sa vybrať číslo 2 z prvých dvoch členov a premenná c z posledných dvoch členov. Tak dostaneme:

$$2a - 2b + ac - bc = 2(a - b) + c(a - b) = \dots$$

No a teraz môžeme vyňať pred zátvorku dvojčlen $(a - b)$, čím dostaneme:

$$\dots = (a - b)(2 + c).$$

Ž: *A súčin je na svete.*

$$\boxed{2a - 2b + ac - bc = (a - b)(2 + c)}$$

U: Ďalej môžeme pri upravovaní niektorých výrazov na súčin ***použiť*** tieto ***vzorce***:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Ž: *S týmito vzorcami som sa už stretol, len boli zamenené strany ľavá za pravú a naopak.*

U: Áno, presne tak. Teraz ale použijeme tento smer, lebo nejdeme roznásobovať, ale naopak, upravovať na súčin.

Ž: *Opäť by to chcelo nejaký príklad.*

U: Takže upravme na súčin výraz $a^2 + 10a + 25$. Použijeme druhý vzorec a dostaneme:

$$a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = (a + 5)^2.$$

Ž: *To nebolo ťažké.*

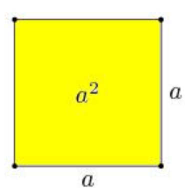
U: Nebolo, lebo 25 je druhá mocnina čísla 5. No zmeňme číslo 25 na 24 a už to nebude také jednoduché. Takže ako rozložíme na súčin výraz $a^2 + 10a + 24$?

Ž: *No, tu mi zrejme žiadne vzorce nepomôžu.*

U: Prvoplánovo nie, no využijeme ich. Použijeme metódu „***úpravy na štvorec***“.

Ž: *A prečo to má práve taký názov?*

U: Pri tejto metóde budeme používať druhý, resp. tretí vzorec. Tu vystupuje druhá mocnina $(a \pm b)^2$. No a v matematike sa niekedy povie druhá mocnina čísla aj štvorec čísla. Súvisí to s obsahom štvorca, ktorý je druhou mocninou dĺžky jeho strany.



štvorec čísla	$\leftrightarrow$	druhá mocnina čísla

U: Takže poďme už k veci. Pokúsme sa upraviť výraz $a^2 + 10a + 24$ na štvorec, teda na druhú mocninu.

Ž: *Veď sme si už povedali, že to nejde. Podarilo sa nám upraviť akurát výraz $a^2 + 10a + 25$.*

U: A práve to využijeme. Z čísla 25 urobíme číslo 24 odčítaním čísla 1, teda:

$$a^2 + 10a + 24 = a^2 + 10a + 25 - 1 =$$

$$= (a^2 + 10a + 25) - 1 = (a + 5)^2 - 1 = \dots$$

Ž: *No dobre. Druhú mocninu tu máme, no súčin to stále nie je.*

U: Zatiaľ nie. No cieľ je blízko. Teraz použijeme vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Pri tom si uvedomíme, že $1 = 1^2$. Teda:

$$\dots = (a + 5)^2 - 1^2 = (a + 5 + 1)(a + 5 - 1) = (a + 6)(a + 4).$$

Ž: *Čiže výraz*

$$a^2 + 10a + 24 = (a + 6)(a + 4).$$

U: Ľahkú kontrolu urobíme využitím ***Viètových vzťahov***. Ak vynásobíme 6 a 4 , máme dostať absolútny člen, ktorý je 24. To sedí, lebo $6 \cdot 4 = 24$. Ak čísla 6 a 4 sčítame, máme zase dostať koeficient pri lineárnom člene, ktorý je 10. To tiež sedí, lebo $6 + 4 = 10$.

$$a^2+10a+24 = (a+6)(a+4)$$

kontrola: $6 \cdot 4 = 24$, $6 + 4 = 10$

Ž: *A nemohol som hneď na začiatku napísať požadovaný súčin využitím Viètových vzťahov?*

U: Áno, mohol si. No metóda štvorcov je všeobecne použiteľná aj tam, kde ti Viètove vzťahy tak ľahko nepomôžu. Napr. pri úprave výrazu $2x^2 - x - 1$ na súčin.

Ž: *Aha, tu je koeficient v kvadratickom člene 2, nie 1. Ukážme si ešte raz celú úpravu na tomto zložitejšom príklade.*

U: V poriadku. Najprv musíme vyňať pred zátvorku koeficient pri kvadratickom člene. V našom prípade je to číslo 2. Na to sa často zabúda.

Ž: *Takže môžem písať:*

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \dots$$

U: Teraz chceme použiť vzorec $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Premennej a zo vzorca odpovedá premenná x z upravovaného výrazu. Keď chceme zistiť, čomu odpovedá premenná b, musíme lineárny člen $-\frac{1}{2}x$ napísať v tvare $-2ab$, teda $-2 \cdot x \cdot \frac{1}{4}$. Čiže:

$$\dots = 2\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \dots$$

Ž: *Aha, takže odtiaľ vidíme, že premennej b odpovedá číslo $\frac{1}{4}$.*

U: Správne. Preto v zátvorke pripočítame aj odpočítame $\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Tak môžeme písať:

$$\ldots = 2\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = \ldots$$

Ž: *A prečo sme to číslo aj pripočítali, aj odpočítali?*

U: Aby bola zachovaná rovnosť. Pri pričítaní aj odčítaní toho istého čísla zároveň sa hodnota výrazu nemení.

Ž: *Jasné, čo ďalej?*

U: Všetky tieto úpravy sme robili preto, aby sme na prvé tri členy v zátvorke mohli použiť spomínaný vzorec. Teda, aby sme to mohli upraviť na štvorec. Tak môžeme písať:

$$\ldots = 2\left[\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = \ldots$$

Ž: *Teraz zrejme chceme upraviť* $-\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$ *zo zátvorky.*

U: Presne tak. Poďme na to:

$$\ldots = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{8}{16}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] = \ldots$$

Ž: *Čo s tým?*

U: Chceme použiť vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Najprv si však uvedomme, že $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$. Preto v našom vzorci za premennú a dosadíme výraz $\left(x - \frac{1}{4}\right)$ a za premennú b číslo $\frac{3}{4}$. Tak môžeme písať:

$$\ldots = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] =$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 2\left(x + \frac{2}{4}\right)\cdot\left(x - \frac{4}{4}\right) = \ldots$$

Ž: *Naozaj, už je to v tvare súčinu. Ešte sa dajú skrátiť $\frac{2}{4}$ a $\frac{4}{4}$. Potom napíšeme:*

$$\ldots = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) = \ldots$$

U: Môžeme roznásobiť číslo 2 s prvou zátvorkou, aby sme sa zbavili zlomku. Výsledný súčin bude vyzerať takto:

$$\ldots = (2x + 1) \cdot (x - 1).$$

$$\boxed{2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)}$$

Ž: *Takže každý kvadratický mnohočlen vieme týmto postupom upraviť na súčin.*

U: No, to nie je celkom pravda. Nie každý kvadratický mnohočlen sa totiž dá upraviť na súčin.

Ž: *A ako zistím, či sa daný výraz dá alebo nedá upraviť na súčin?*

U: Ukážme si to na príklade. Pokus sa upraviť na súčin napr. výraz $x^2 + 2x + 10$.

Ž: *Takže budem postupovať rovnako:*

$$x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 + 9 =$$

$$= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + 9 =$$

$$= (x + 1)^2 + 3^2.$$

U: A teraz by si chcel použiť vzorec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. No to asi nepôjde. A vzorec pre $a^2 + b^2$ neexistuje.

Ž: *Snáď mi to už bude jasné.*

$$\boxed{x^2 + 2x + 10 \quad \text{sa nedá rozložiť na súčin}}$$

Príklad 1: *Upravte na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa:*

a) $ab - ac + 7b - 7c$;

b) $a^3 - a^2 + a - 1$;

c) $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4$.

U: Začneme úlohou ***a)***. Upravme daný výraz vynímaním pred zátvorku.

Ž: *No ale ja neviem zo všetkých štyroch členov výrazu $ab - ac + 7b - 7c$ vyňať nič spoločné.*

U: Zo všetkých štyroch nie, ale vieš vyňať premennú a z prvých dvoch členov a číslo 7 z posledných dvoch členov. Skús to.

Ž: *Teda:*

$$ab - ac + 7b - 7c = a(b - c) + 7(b - c) = \dots$$

U: No a teraz môžeme vyňať pred zátvorku dvojčlen $(b - c)$, čím dostaneme:

$$\dots = (b - c)(a + 7).$$

Ž: *A už máme výsledok:*

$$ab - ac + 7b - 7c = (b - c)(a + 7).$$

U: Pokračujme úlohou ***b)***. Tu máme upraviť na súčin výraz $a^3 - a^2 + a - 1$. Opäť vyber z prvých dvoch členov, čo sa dá a z posledných dvoch tiež.

Ž: *Z prvých dvoch sa dá vyňať a^2, no z posledných dvoch sa nedá vybrať nič.*

U: Tak skús aspoň to, čo sa dá.

Ž: *Teda:*

$$a^3 - a^2 + a - 1 = a^2(a - 1) + a - 1 = \dots$$

U: No a opäť môžeme vybrať pred zátvorku dvojčlen $(a - 1)$. Len si stačí uvedomiť, že $a - 1 = 1 \cdot (a - 1)$. Tak môžeme písať:

$$\dots = a^2(a - 1) + 1 \cdot (a - 1) =$$

$$= (a - 1)(a^2 + 1).$$

Ž: *Čiže máme výsledok:*

$$a^3 - a^2 + a - 1 = (a - 1)(a^2 + 1).$$

U: Ostáva nám úloha ***c)***. Uprav na súčin výraz $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4$. Skús to urobiť teraz sám. Mal by si to už zvládnuť.

Ž: *Pokúsim sa. Najprv z prvých dvoch členov vyberiem pred zátvorku p^2. Tak dostanem:*

$$p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4 = p^2(y^2 - 4) - y^2 + 4 = \dots$$

Teraz si dám do zátvorky posledné dva členy:

$$\dots = p^2(y^2 - 4) - (y^2 + 4) = \dots$$

U: No, počkaj, počkaj. Naozaj je to všetko v poriadku? Ak je mínus pred zátvorkou, tak po odstránení zátvoriek sa znamienka v zátvorke menia. No tu to celkom nesedí. Nože to oprav.

Ž: *Jasné. Pred číslom 4 musí byť záporné znamienko. Teda:*

$$\ldots = p^2(y^2-4) - (y^2-4) =$$

$$= p^2(y^2-4) - 1(y^2-4) =$$

$$= (y^2-4)(p^2-1) = \ldots$$

U: Výborne. Uprav to ešte ďalej. Na prvú aj druhú zátvorku použi vzorec $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Ž: *Takže dostanem výsledok:*

$$p^2y^2-4p^2-y^2+4=(y-2)(y+2)(p-1)(p+1).$$

U: Správne.

Úloha 1: *Upravte na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa:*

a) $qr+r+q+1$

b) $5ab-5ac+4bc-4c^2$

c) $a^2b^2-b^2-9a^2+9$

Výsledok: *a)* $(q+1)(r+1)$; *b)* $(b-c)(5a+4c)$; *c)* $(a+1)(a-1)(b+3)(b-3)$

Príklad 2: *Výraz $2k^4 - k^3 + k - 2$ upravte na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa.*

Ž: *Zo všetkých štyroch členov neviem vyňať pred zátvorku nič spoločné. Ani žiaden vzorec mi to nepripomína, takže skúsim vynímať pred zátvorky z dvoch a dvoch členov. Možno z toho niečo bude. Takže z prvých dvoch členov viem vybrať k^3. Dostanem tak:*

$$2k^4 - k^3 + k - 2 = k^3(2k - 1) + k - 2.$$

Mám pocit, že to k ničomu neviedlo.

U: Mám ten istý pocit. Skús niečo vybrať z iných dvoch členov.

Ž: *Z prvého a tretieho člena viem vyňať premennú k pred zátvorku. Preto môžem písať:*

$$2k^4 - k^3 + k - 2 = k(2k^3 + 1) - k^3 - 2.$$

To mi tiež nepomohlo.

U: Ostáva ti už len posledná možnosť. Z prvého a posledného člena vyňať číslo 2 a z druhého a tretieho člena premennú $-k$.

Ž: *Skúsim:*

$$2k^4 - k^3 + k - 2 = 2(k^4 - 1) - k(k^2 - 1) = \ldots$$

U: To už vyzerá lepšie. Teraz uprav prvú zátvorku $(k^4 - 1)$ pomocou vzorca

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Ž: *Dostanem:*

$$\ldots = 2(k^2 - 1)(k^2 + 1) - k(k^2 - 1) = \ldots$$

Tu už je niečo spoločné. Pred zátvorku môžem vyňať dvojčlen $(k^2 - 1)$.

U: Tak to urob.

Ž: *Dostanem:*

$$\ldots = (k^2 - 1)\left[2\left(k^2 + 1\right) - k\right] = (k^2 - 1)\left(2k^2 + 2 - k\right).$$

U: Ešte rozlož na súčin prvú zátvorku.

Ž: *OK. Tak už môžem napísať rovno výsledok:*

$$2k^4 - k^3 + k - 2 = (k - 1)(k + 1)(2k^2 - k + 2).$$

U: Správne. Ale neodpustím si ešte jednu provokačnú otázku. Si si istý, že kvadratický trojčlen $2k^2 - k + 2$ sa už nedá rozpísať na súčin?

Ž: *Vôbec si nie som istý. A dá sa? Ako to zistím?*

U: Môžeš to zistiť napr. úpravou kvadratického trojčlena na štvorec. No to už nechám na teba. Ak to urobíš správne, dôjdeš k záveru, že sa to viac nedá rozpísať. Takže to môžeme naozaj považovať za výsledok.

Ž: *Uf.*

Úloha 2: *Upravte na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa tento výraz: $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$.*
Výsledok: $(a + 1)(a^5 - a^4 + 2a^2)$

Príklad 3: *Určte najväčšieho spoločného deliteľa a najmenší spoločný násobok mnohočlenov:* $x^4 - y^4$, $x^2 - y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$.

U: Táto úloha je prípravou k sčítavaniu lomených výrazov. Tam budeš musieť nájsť spoločného menovateľa ako ***najmenší spoločný násobok*** menovateľov. Takže poďme na jej vyriešenie. Čo navrhuješ?

Ž: *Zrejme najprv upravím všetky tri výrazy na súčiny výrazov čo najnižšieho stupňa.*

U: Presne tak. Tak to skús.

Ž: *Začnem prvým výrazom. Tu dvakrát použijem vzorec* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. *Tak dostanem:*

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

U: Správne. Druhý výraz bude ešte jednoduchší.

Ž: *Jasné:*

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

A tretí výraz je priamo vzorec:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.$$

U: Dobre. Teraz urč ich ***najväčšieho spoločného deliteľa*** D. Ako na to?

Ž: *Najväčší spoločný deliteľ* D *má deliť všetky tri výrazy. Preto musí obsahovať v súčine všetky tie výrazy, ktoré sa nachádzajú v súčinovom tvare všetkých troch výrazov. A, ak dobre vidím, takým je iba jediný výraz, a to* $(x - y)$. *Čiže:*

$$D = x - y.$$

U: Výborne. Pokračuj určením najmenšieho spoločného násobka n daných výrazov. V násobku sa musia nachádzať všetky výrazy zo súčinových tvarov daných výrazov.

Ž: *Takže:*

$$n = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x - y)^2.$$

U: No, nezdá sa mi to. Keďže násobok n má byť nielen spoločný, ale aj najmenší, tak by sa tam nemal žiaden výraz nachádzať viackrát, než je to nutné. A u teba sa výraz $(x - y)$ nachádza až trikrát a stačilo by len dvakrát. Preto:

$$n = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)^2.$$

Úloha 3: *Určte najväčšieho spoločného deliteľa a najmenší spoločný násobok mnohočlenov:* $a^3 - 1$, $a^3 - a^2 + a - 1$.

Výsledok: $D = a - 1$, $n = (a - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 + 1)$

Príklad 4: *Upravte na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa výraz* $x^4 - 2x^2 + 1 - (x-1)^2$.

U: Tak, čo s tým?

Ž: *Najprv si roznásobím zátvorku a upravím ako sa dá:*

$$x^4 - 2x^2 + 1 - (x-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1) =$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1 = x^4 - 3x^2 + 2x = \dots$$

No a teraz zo všetkých členov vyberiem x. *Dostanem:*

$$\dots = x(x^3 - 3x^2 + 2).$$

To už neviem viac upraviť. Takže je to výsledok.

U: Ak to nevieš upraviť, neznamená to, že sa to ani nedá. A to naozaj nie je také jednoduché upraviť na súčin. Vrátil by som sa opäť na začiatok úlohy. Nebolo potrebné roznásobovať, ale naopak, upraviť to použitím vzorcov. Všimni si prvé tri členy $x^4 - 2x^2 + 1$. Nedá sa na to aplikovať žiaden vzorec?

Ž: *Jasné, že sa dá, a to vzorec* $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. *Môžem písať:*

$$x^4 - 2x^2 + 1 - (x-1)^2 = (x^2 - 1)^2 - (x-1)^2 = \dots$$

U: No a teraz v tom skús vidieť vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Ž: *Áno, dá sa to. Za premennú* a *dosadím výraz* $(x^2 - 1)$ *a za premennú* b *výraz* $(x-1)$. *Dostanem tak:*

$$\dots = [(x^2 - 1) + (x-1)] \cdot [(x^2 - 1) - (x-1)] =$$

$$= (x^2 - 1 + x - 1) \cdot (x^2 - 1 - x + 1) =$$

$$= (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - x) = \dots$$

U: Z druhej zátvorky vieme ešte vyňať premennú x. Tým dostaneme:

$$\dots = (x^2 + x - 2) \cdot x \cdot (x-1) = \dots$$

Ž: *Ale to je súčin až troch činiteľov. Ja som dostal len súčin dvoch činiteľov.*

U: A je to už naozaj koniec? Nedá sa ešte kvadratický mnohočlen $x^2 + x - 2$ rozložiť na súčin lineárnych mnohočlenov?

Ž: *Mám urobiť úpravu na štvorec?*

U: Áno. Môžeš to však vidieť aj priamo z ***Viètových vzťahov***. Absolútny člen -2 sa má rovnať súčinu dvoch čísel. Koeficient pri lineárnom člene, ktorý je 1, sa má zase rovnať ich súčtu. Poznáš také dve čísla?

Ž: *Hádam by to mohli byť čísla* 2 *a* -1, *lebo* $2 \cdot (-1) = -2$ *a* $2 + (-1) = 1$. *Takže namiesto kvadratického trojčlena* $x^2 + x - 2$ *môžem písať súčin* $(x+2)(x-1)$. *Výsledok je preto takýto:*

$$x^4 - 2x^2 + 1 - (x-1)^2 = (x+2)(x-1) \cdot x \cdot (x-1) = x(x+2)(x-1)^2.$$

U: Áno, to už je naozaj definitívny výsledok.

Úloha 4: *Upravte na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa:*

a) $a^2c + a^2 - (c+1)^3$;

b) $(x+1)^4 - x^4 + 2x^2 - 1$.

Výsledok: *a)* $(c+1)(a+c+1)(a-c-1)$; *b)* $4x(x+1)^2$

Príklad 5: *Rozložte kvadratický polynóm na súčin lineárnych mnohočlenov:*

$$x^2 - 10x + 21.$$

U: Pokús sa rozložiť tento kvadratický polynóm na súčin. Urob to metódou úpravy na štvorec, teda na druhú mocninu. Najprv použi vzorec $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Ž: *No, ale to by musel byť iný absolútny člen, nie* 21*. Tu sa nedá použiť spomínaný vzorec.*

U: A pri akom absolútnom člene by si ho vedel použiť?

Ž: *Pri absolútnom člene* 25*. Vtedy by platilo:*

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x - 5)^2.$$

U: Tak namiesto čísla 21 napíš číslo $25 - 4$. Čo je vlastne to isté. A potom to už pôjde.

Ž: *Dobre:*

$$x^2 - 10x + 21 = x^2 - 10x + 25 - 4 = (x - 5)^2 - 4 = \dots$$

U: Výborne. Teraz stačí použiť vzorec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Len si uvedom, že $4 = 2^2$. Premennú a nahraď výrazom $(x - 5)$ a premennú b číslom 2.

Ž: *Skúsim:*

$$\dots = (x - 5)^2 - 2^2 = (x - 5 + 2)(x - 5 - 2) = (x - 3)(x - 7).$$

To by už mal byť výsledok.

U: Áno. A je správny. Môžeme si to skontrolovať použitím ***Viètových vzťahov***. Vo výsledku

$$x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$$

sa súčin $(-3) \cdot (-7)$ má rovnať absolútnemu členu, ktorý je 21. To sedí. No a súčet $(-3) + (-7)$ sa má zase rovnať koeficientu lineárneho člena, ktorý je -10. To tiež sedí.

Ž: *A to som nemohol napísať hneď na začiatku?*

U: Mohol si. Ak budeš zbehlejší v týchto úpravách, takéto jednoduché kvadratické členy už budeš vedieť upraviť na súčin hneď. Bez úpravy na štvorec.

Ž: *Už aby to bolo.*

Úloha 5: *Rozložte kvadratické polynómy na súčin lineárnych mnohočlenov:*

a) $x^2 + 8x + 12$;

b) $x^2 - 26x + 48$.

Výsledok: *a)* $(x + 6)(x + 2)$; *b)* $(x - 2)(x - 24)$

Príklad 6: *Rozložte kvadratický polynóm na súčin lineárnych mnohočlenov:*

$$3c + c^2 - 28.$$

U: Najprv si v kvadratickom mnohočlene usporiadaj členy od najvyššе mocniny po najnižšiu.

Ž: *Takže:*

$$3c + c^2 - 28 = c^2 + 3c - 28 = \ldots$$

Teraz by som chcel použiť vzorec $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$. Za premennú a dosadím premennú c zo zadaného výrazu. No netuším, čo sa má dosadiť za premennú b.

U: To zistíme podľa lineárneho člena, ktorý je $3c$. Ten chceme napísať v tvare $2ab$. Takže: $3c = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot c$. No a z toho vidíme, že za premennú b dosadíme číslo $\frac{3}{2}$. Teda tam ešte umelo pripočítame aj odpočítame $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Potom to bude vyzerať takto:

$$\ldots = c^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot c + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 28 = \ldots$$

Ž: *A to sme urobili prečo?*

U: No aby sme to mohli konečne upraviť pomocou spomínaného vzorca na druhú mocninu, teda na štvorec. Tak dostaneme:

$$\ldots = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 28 = \ldots$$

Uprav ešte $-\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 28$.

Ž: *Pokúsim sa:*

$$\ldots = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 28 =$$

$$= \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{28 \cdot 4}{4} =$$

$$= \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{112}{4} =$$

$$= \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} = \ldots$$

U: A nakoniec použi vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Najprv však prepíš $\frac{121}{4}$ na druhú mocninu.

Ž: *Keďže* $\frac{121}{4} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$, *tak môžem písať:*

$$\ldots = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(c + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}\right) \cdot \left(c + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}\right) =$$

$$= \left(c + \frac{14}{2}\right) \cdot \left(c - \frac{8}{2}\right) =$$

$$= (c + 7) \cdot (c - 4)\,.$$

U: Správne. Výsledok teda je takýto:

$$3c + c^2 - 28 = c^2 + 3c - 28 = (c + 7)(c - 4).$$

Ešte to overme pomocou ***Vietových vzťahov***: Súčin $7 \cdot (-4)$ sa má rovnať absolútnemu členu, ktorý je -28. To sedí. No a súčet $7 + (-4)$ má byť zase rovný koeficientu pri lineárnom člene, ktorý je 3. Aj to sedí.

Úloha 6: *Rozložte kvadratické polynómy na súčin lineárnych mnohočlenov:*

a) $x^2 - x - 56$;

b) $x^2 + 7x - 30$.

Výsledok: *a)* $(x - 8)(x + 7)$; *b)* $(x - 3)(x + 10)$

Príklad 7: *Rozložte kvadratický polynóm na súčin lineárnych mnohočlenov:*

$$3x^2 + 15x - 42.$$

U: Rozloženie tohto kvadratického trojčlena na súčin je trochu zložitejšie. Vieš povedať čím?

Ž: *Keďže ho chcem upraviť na druhú mocninu, teda na štvorec využitím vzorca* $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$*, tak by som potreboval, aby kvadratický člen* $3x^2$ *bol druhou mocninou. To mám číslo 3 napísať ako* $(\sqrt{3})^2$*?*

U: No, to by sme sa pekne zamotali. Oveľa jednoduchšie bude, keď číslo 3 vyberieme pred zátvorku. Potom budeme upravovať na štvorec už len to, čo ostane v zátvorke.

Ž: *Znie to rozumne. Skúsim:*

$$3x^2 + 15x - 42 = 3(x^2 + 5x - 14) = \dots$$

Premennej a zo vzorca odpovedá premenná x z výrazu. Ešte neviem, čomu odpovedá premenná b.

U: To zistíš pomocou lineárneho člena $5x$, ktorý odpovedá členu $2ab$ zo vzorca. Preto ho napíš v takom tvare.

Ž: *Takže:* $5x = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x$*. Teda premennej b zo vzorca odpovedá číslo* $\frac{5}{2}$*.*

U: Správne. Preto tam ešte umelo pripočítaj aj odpočítaj b^2, v našom prípade $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

Ž: *A prečo to mám aj pripočítať a aj odpočítať?*

U: Predsa hodnota výrazu sa nesmie zmeniť. No a pripočítaním a odpočítaním toho istého čísla sa ani nezmení.

Ž: *OK. Takže:*

$$\dots = 3\left[x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14\right] = \dots$$

U: No a teraz už máš všetko pripravené na použitie vzorca.

Ž: *Teda:*

$$\dots = 3\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14\right] = \dots$$

U: Ostáva ti upraviť $-\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14$.

Ž: *Skúsim:*

$$\dots = 3\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 14\right] = \dots$$

Teraz $14 = \frac{14 \cdot 4}{4} = \frac{56}{4}$*, čiže pokračujem v úpravách výrazu, ktorý sa rovná:*

$$\dots = 3\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{56}{4}\right] =$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}\right] = \dots$$

U: Veľmi dobre. Teraz sa nám priam núka použiť vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, keďže $\frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$. Pričom premennej a odpovedá výraz $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ a premennej b číslo $\frac{9}{2}$. Pokračuj v úpravách.

Ž:

$$\ldots = 3\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 3\left(x+\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\right) =$$

$$= 3\left(x+\frac{14}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{2}\right) =$$

$$= 3\,(x+7)\cdot(x-2)\,.$$

A to je už výsledok. Dúfam, že správny.

U: Áno, je to dobre. Odpoveď teda znie:

$$3x^2 + 15x - 42 = 3\,(x+7)\cdot(x-2).$$

Úloha 7: *Rozložte kvadratické polynómy na súčin lineárnych mnohočlenov:*

a) $15 - 2x - x^2$;

b) $10x - 28 + 2x^2$.

Výsledok: *a)* $-(x+5)(x-3)$; *b)* $2(x+7)(x-2)$

Príklad 8: *Rozložte kvadratický polynóm na súčin lineárnych mnohočlenov:*

$$2x^2 + 7x - 15.$$

U: Najprv musíme vyňať pred zátvorku koeficient pri kvadratickom člene. V našom prípade je to číslo 2. Na to sa často zabúda.

Ž: *Takže môžem písať:*

$$2x^2 + 7x - 15 = 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{15}{2}\right) = \ldots$$

U: Teraz chceme použiť vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Premennej a zo vzorca odpovedá premenná x z upravovaného výrazu. Keď chceme zistiť, čomu odpovedá premenná b, musíme lineárny člen $\frac{7}{2}x$ napísať v tvare $2ab$, teda $2 \cdot x \cdot \frac{7}{4}$. Čiže:

$$\ldots = 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{4} - \frac{15}{2}\right) = \ldots$$

Ž: *Aha, takže odtiaľ vidíme, že premennej b odpovedá číslo $\frac{7}{4}$.*

U: Správne. Preto v zátvorke pripočítame aj odpočítame $\left(\frac{7}{4}\right)^2$. Môžeme teda písať:

$$\ldots = 2\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{15}{2}\right] = \ldots$$

Ž: *A prečo sme to číslo aj pripočítali, aj odpočítali?*

U: Aby bola zachovaná rovnosť. Pri pričítaní aj odčítaní toho istého čísla zároveň sa hodnota výrazu nemení.

Ž: *Jasné, čo ďalej?*

U: Všetky úpravy sme robili preto, aby sme na prvé tri členy v zátvorke mohli použiť spomínaný vzorec. Teda, aby sme to mohli upraviť na štvorec. Dostaneme:

$$\ldots = 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{15}{2}\right] = \ldots$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Teraz upravím $-\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{15}{2}$. Preto píšem:*

$$\ldots = 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} - \frac{15 \cdot 8}{2 \cdot 8}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} - \frac{120}{16}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{169}{16}\right] = \ldots$$

U: Ak si teraz uvedomíš, že $\frac{169}{16} = \left(\frac{13}{4}\right)^2$, tak nemôžeš nepoužiť vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Pričom premennej a odpovedá dvojčlen $\left(x + \frac{7}{4}\right)$ a premennej b zase číslo $\frac{13}{4}$.

Ž: *Takže môžem písať:*

$$\ldots = 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{13}{4}\right)^2\right] =$$
$$= 2\left(x + \frac{7}{4} + \frac{13}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{7}{4} - \frac{13}{4}\right) =$$
$$= 2\left(x + \frac{20}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{6}{4}\right) = \ldots$$

U: Ešte uprav $\frac{20}{4}$ a $\frac{6}{4}$.

Ž: *Keďže* $\frac{20}{4} = 5$ *a* $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, *dostaneme:*

$$\ldots = 2\,(x + 5) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) = \ldots$$

U: Dobre, aj toto môžeme považovať za výsledok. No priamo sa nám núka zbaviť sa zlomku $\frac{3}{2}$ roznásobením dvojky s druhou zátvorkou. Tak vznikne:

$$\ldots = (x + 5) \cdot (2x - 3).$$

Ž: *Čiže odpoveď znie:*

$$2x^2 + 7x - 15 = (x + 5) \cdot (2x - 3).$$

Úloha 8: *Rozložte kvadratický polynóm* $3x^2 + 2x - 5$ *na súčin lineárnych mnohočlenov.*

Výsledok: $(x - 1)(3x + 5)$

Príklad 9: *Rozložte kvadratický polynóm na súčin lineárnych mnohočlenov:*

$$x^2 - 4x + 20.$$

U: Upravíme daný mnohočlen na štvorec, teda na druhú mocninu. Preto použijeme vzorec $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. Premennej a zo vzorca odpovedá premenná x z upravovaného výrazu. Keď chceme zistiť, čomu odpovedá premenná b, musíme lineárny člen $-4x$ napísať v tvare $-2ab$, teda $-2 \cdot x \cdot 2$. Čiže:

$$x^2 - 4x + 20 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 20 = \dots$$

Ž: *Aha, takže odtiaľ vidíme, že premennej b odpovedá číslo 2.*

U: Správne. Preto vo výraze pripočítame aj odpočítame 2^2. Vznikne:

$$\dots = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 20 = \dots$$

Ž: *A prečo sme to číslo aj pripočítali, aj odpočítali?*

U: Aby bola zachovaná rovnosť. No a pri pričítaní aj odčítaní toho istého čísla zároveň sa hodnota výrazu nemení.

Ž: *Jasné, čo ďalej?*

U: Všetky tieto úpravy sme robili preto, aby sme na prvé tri členy v zátvorke mohli použiť spomínaný vzorec. Tak môžeme písať:

$$\dots = (x - 2)^2 - 2^2 + 20 = \dots$$

Pokračuj ďalej.

Ž: *Teraz upravím $-2^2 + 20$. To sa vlastne rovná $-4 + 20 = 16$. Dostanem:*

$$\dots = (x - 2)^2 + 16 = \dots$$

Ešte viem, že $16 = 4^2$, preto predchádzajúci výraz sa rovná:

$$\dots = (x - 2)^2 + 4^2 = \dots$$

U: Dobre. Čo s tým ďalej?

Ž: *Teraz použijem vzorec $a^2 + b^2 = \cdots$. A čomu sa to vlastne rovná? Doteraz som používal iba vzorec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.*

U: No, ak si spomínaš, taký vzorec neexistuje. Výraz $a^2 + b^2$ sa nedá rozložiť na súčin.

Ž: *A čo s tým?*

U: Touto metódou nevieme rozložiť daný kvadratický výraz na súčin lineárnych výrazov. Dokonca môžeme povedať, že nielen touto metódou, ale žiadnou.
Výraz $x^2 - 4x + 20$ sa nedá rozložiť na súčin lineárnych mnohočlenov.

Úloha 9: *Rozložte kvadratický polynóm $x^2 - 3x + 20$ na súčin lineárnych mnohočlenov.*

Výsledok: *nedá sa*