Delenie mnohočlenov

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Poďme si zopakovať delenie mnohočlenov.

Ž: *To sa mi zíde, veľa si z toho už nepamätám.*

U: Aby to bolo prehľadnejšie, rozdeľme si to na tri prípady:

1. ***delenie jednočlena jednočlenom,***
   napr. $(20x^5) : (2x^2)$
2. ***delenie mnohočlena jednočlenom,***
   napr. $(10x^6 - 15x^3 + 20x^2) : (-5x^2)$
3. ***delenie mnohočlena mnohočlenom,***
   napr. $(-5x + 2x^2 - 3) : (x - 3)$

Ž: *A teraz poďme na samotné delenie.*

U: Začnime delením jednočlena jednočlenom, teda $20x^5 : (2x^2)$. To nebude zložité.

Ž: *Zrejme vydelím najprv koeficienty, potom mocniny. Teda*

$$20x^5 : (2x^2) = \frac{20}{2} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 10x^{5-2} = 10x^3.$$

U: Presne tak. No nesmieme zabudnúť na ***podmienky***.

Ž: *Aha, skoro som zabudol. Nedá sa deliť nulou, teda deliteľ* $x^2 \neq 0$, *teda* $x \neq 0$.

U: Správne.

Ž: *Pri delení mnohočlena jednočlenom to bude asi také isté ako pri násobení. Každý člen z prvej zátvorky vydelím deliteľom.*

U: Áno. V príklade $(10x^6 - 15x^3 + 20x^2) : (-5x^2)$ najprv vydelíme $10x^6 : (-5x^2)$, potom $-15x^3 : (-5x^2)$ a nakoniec $20x^2 : (-5x^2)$. Dôležité je nezabudnúť na znamienko stojace pred daným jednočlenom.

Ž: *Môžem písať:*

$$(10x^6 - 15x^3 + 20x^2) : (-5x^2) =$$
$$= [10 : (-5)]x^{6-2} - [15 : (-5)]x^{3-2} + [20 : (-5)]x^{2-2} =$$
$$= -2x^4 + 3x^1 - 4x^0 = -2x^4 + 3x - 4.$$

U: Nezabudnime na ***podmienky***.

Ž: *Opäť by som na to zabudol. Takže zasa deliteľ* $-5x^2 \neq 0$, *teda* $x \neq 0$.

U: Správne.

U: To by sme mali. Ostáva nám posledný typ, a to delenie mnohočlena mnohočlenom.

Ž: *Asi to urobím tak, ako v predchádzajúcich typoch. Budem deliť každý jednočlen z prvej zátvorky každým jednočlenom z druhej zátvorky.*

U: No, tu to tak nepôjde. Teraz budeme postupovať úplne ináč. Budeme kopírovať delenie prirodzených čísel, ako si sa to učil niekedy dávno. Zopakujme si to. Skúsme bez kalkulačky so zapisovaním zvyškov vydeliť napr. 143 : 11. Teraz ***sleduj rámček***. Slovne popíšeme to, čo je v ňom napísané. Najprv zistíme, koľkokrát sa deliteľ 11 nachádza v 14. Je to iba raz. Preto do podielu napíšeme číslo 1. Potom $1 \cdot 11 = 11$. To odčítame od 14. Dostaneme zvyšok 3. K nemu z delenca pripíšeme číslo 3. Dostaneme číslo 33 a to vydelíme deliteľom, teda $33 : 11 = 3$. Do podielu pripíšeme trojku. $3 \cdot 11 = 33$, po odčítaní od 33 dostanem zvyšok nula.

$$\begin{array}{l} \;\;143 : 11 = 13 \\ \underline{-11} \\ \;\;\;\;33 \\ \;\;\underline{-33} \\ \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

U: No a obdobne budeme postupovať pri delení mnohočlena mnohočlenom. Dôležité je, aby sme na začiatku delenia mali aj delenca aj deliteľa usporiadaného od najvyššej mocniny po najnižšiu. V našom príklade $(-5x + 2x^2 - 3) : (x - 3)$ to nie je splnené. Preto zapíšeme:

$$(-5x + 2x^2 - 3) : (x - 3) = (2x^2 - 5x - 3) : (x - 3).$$

Ž: *Teraz mám určiť, koľkokrát sa nachádza deliteľ $(x - 3)$ v delenci $(2x^2 - 5x - 3)$. Pri číslach to bolo jasné, no ako to bude pri polynómoch?*

U: Opäť ***sleduj*** to, čo je napísané ***v rámčeku***. Pozrieme sa na členy s najvyššou mocninou, teda na prvé členy. Tie vydelíme. Teda $2x^2 : x = 2x$. Do výsledku zapíšeme $2x$. Teraz spätne vynásobíme $2x$ s deliteľom $(x - 3)$ a výsledok zapíšeme pod delenca. Čiže $2x \cdot (x - 3) = 2x^2 - 6x$.

Ž: *A načo sme to urobili?*

U: Aby sme zistili zvyšok. Preto $2x^2 - 6x$ odčítame od delenca $(2x^2 - 5x - 3)$ a dostaneme:

$$(2x^2 - 5x - 3) - (2x^2 - 6x) = 2x^2 - 5x - 3 - 2x^2 + 6x = x - 3.$$

$$\begin{array}{l} \;\;(2x^2 - 5x - 3) : (x - 3) = 2x \\ \underline{-(2x^2 - 6x)\;\;\;\;\;} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;x - 3 \end{array}$$

Ž: *Teraz je to už jasné. Postupujem tak isto. Zistím, koľkokrát sa $(x - 3)$ nachádza v $(x - 3)$. Je zrejmé, že len raz.*

U: Preto (ako ukazuje ***ďalší rámček***) do podielu k $2x$ pripočítame 1. Potom spätne od $(x-3)$ odčítame $1 \cdot (x-3) = x-3$ a dostaneme zvyšok nula. Podiel $(2x^2 - 5x - 3) : (x-3)$ je preto rovný $2x + 1$.

Ž: *Teraz už nezabudnem na podmienky. Opäť musí byť deliteľ $x - 3 \neq 0$, teda $x \neq 3$.*

$$\begin{array}{l}
(2x^2 - 5x - 3) : (x - 3) = 2x + 1 \\
\underline{-(2x^2 - 6x)} \\
x - 3 \\
\underline{-(x - 3)} \\
0 \\
\\
x \neq 3
\end{array}$$

Ž: *Myslím, že sme to zvládli.*

U: Ak sa chceš presvedčiť, či si to vydelil správne, môžeš urobiť skúšku správnosti. Vieš, v čom bude spočívať?

Ž: *Zrejme vynásobím podiel $2x + 1$ s deliteľom $x - 3$ a mám dostať delenca $2x^2 - 5x - 3$.*

U: Presne tak. To už nechám na teba. Výsledok môžeme zapísať aj v tvare

$$\frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 2x + 1 \text{ pre } x \neq 3.$$

Ž: *Ak delím dve čísla, môžem dostať aj nenulový zvyšok. Zrejme obdobne je to aj pri polynómoch.*

U: Áno. My sme si na ukážku zvolili taký jednoduchý príklad bez zvyšku, no v ďalších príkladoch sa stretneš aj s podielmi so zvyškom.

Ž: *Mohli by sme si aspoň jeden taký uviesť?*

U: Tak napríklad v našej úlohe zmeníme absolútny člen v delenci z -3 na -2. Opäť ***sleduj*** vyriešený príklad ***v rámčeku***. Celý postup bude rovnaký, zmena nastane len vo zvyšku, ktorý nebude 0, ale 1, lebo $(x - 2) - (x - 3) = -2 + 3 = 1$.

$$\begin{array}{l}
(2x^2 - 5x - 2) : (x - 3) = 2x + 1 \\
\underline{-(2x^2 - 6x)} \\
x - 2 \\
\underline{-(x - 3)} \\
1 \\
\\
x \neq 3
\end{array}$$

Ž: *Takže výsledok môžem napísať v tvare:*

$$(2x^2 - 5x - 2) : (x - 3) = 2x + 1, \; zv. \; 1 \qquad pre \; x \neq 3.$$

U: Áno. Len ten zápis „zv.“ je málo matematický. Uvedomme si, že keby sa nám podarilo zvyšok 1 vydeliť deliteľom $x - 3$, tak nám neostane žiaden. Preto výsledok môžeme napísať aj v tvare:

$$(2x^2 - 5x - 2) : (x - 3) = 2x + 1 + \frac{1}{x-3} \text{ pre } x \neq 3.$$

Znamienko delenia ešte môžeme zameniť za zlomkovú čiaru, a potom dostaneme:

$$\frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 3} = 2x + 1 + \frac{1}{x-3} \text{ pre } x \neq 3.$$

Ž: *Nie je to najľahšie, ale snáď som to pochopil.*

Príklad 1: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky, kedy má delenie zmysel:*

$$(4t^3 + 6t^2 - t) : \left(-\frac{1}{2}t\right).$$

Ž: *Každý jednočlen zo zátvorky vydelím jednočlenom* $\frac{1}{2}t$.

U: Pozor. Nezabúdaj na znamienka. Deliteľ je $\left(-\frac{1}{2}t\right)$, nie $\frac{1}{2}t$.

Ž: *Samozrejme... Teda platí:*

$$(4t^3 + 6t^2 - t) : \left(-\frac{1}{2}t\right) =$$

$$= 4t^3 : \left(-\frac{1}{2}t\right) + 6t^2 : \left(-\frac{1}{2}t\right) - t : \left(-\frac{1}{2}t\right) = \dots$$

U: Čo ďalej?

Ž: *Koeficienty vydelím koeficientmi. Teda* $4 : \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) = -8$, *potom* $6 : \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) = -12$ *a nakoniec...*

U: Pred t stojí znamienko mínus, teda ako keby tam bol koeficient -1. Preto tu vydelíme $-1 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) = 2$. Teraz to všetko zapíš.

Ž: *OK. Čiže po vydelení dostanem:*

$$= -8t^{3-1} - 12t^{2-1} + 2t^{1-1} = -8t^2 - 12t + 2.$$

U: Správne, ešte urč ***podmienky***.

Ž: *Nesmieme deliť nulou, teda deliteľ* $-\frac{1}{2}t \neq 0$. *To platí práve vtedy, keď* $t \neq 0$.

U: Áno.

Úloha 1: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky, kedy má delenie zmysel:*

$$(12a^4 - 8a^3 - 4a^2) : 4a^2.$$

Výsledok: $3a^2 - 2a - 1$ *pre* $a \neq 0$

Príklad 2: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky:*

a) $(2x^2+5x-12):(x+4)$*;*

b) $(x+4):(2x^2+5x-12)$*.*

U: Začni úlohou ***a)***.

Ž: *Budem postupovať tak, ako keby som delil dve čísla. Najprv si teda určím, koľkokrát sa nachádza deliteľ* $(x+4)$ *v delenci* $(2x^2+5x-12)$*. Pri číslach je to jasné, no ako to zistiť pri polynómoch?*

U: Tu sa pozri na členy s najvyššou mocninou. Keďže ich máme zoradené od najvyššej mocniny po najnižšiu, tak si všimnime prvé členy. V delenci je prvým členom $2x^2$, v deliteli x. Vydeľ ich. ***Pozeraj sa*** pri tom ***na zápis v rámčeku***.

Ž: *Teda delím* $2x^2:x=2x$*. Do podielu preto napíšem* $2x$*. Teraz vynásobím* $2x$ *s deliteľom* $(x+4)$ *a zapíšem pod delenca* $(2x^2+5x-12)$*. Teda* $2x\cdot(x+4)=2x^2+8x$*.*

U: Aby sme mohli určiť zvyšok, pred $(2x^2+8x)$ napíšeme znamienko mínus. Tým naznačíme, že to chceme odčítať od výrazu napísaného nad ním.

$$\begin{array}{l} (2x^2+5x-12):(x+4)=2x \\ \underline{-(2x^2+8x)} \\ -3x-12 \end{array}$$

Ž: *A ako sme teda dostali ten zvyšok* $-3x-12$*?*

U: Tak poďme pomaly. Členy s rovnakou mocninou od seba odčítame. Ak odčítame od seba kvadratické členy, máme $2x^2-2x^2=0$, preto sme tam nenapísali nič. Ďalej sme odčítali lineárne členy $5x-8x=-3x$. Ostávajú nám absolútne členy.

Ž: *Ale veď výraz* $2x^2+8x$ *nemá absolútny člen.*

U: Ale má, len nie je napísaný, lebo je 0. Preto odčítame $-12-0=-12$.

Ž: *Dobre, už je mi to jasné. Ďalej budem zrejme postupovať rovnako.*

U: Presne tak. Teraz ***si všímaj zápis v ďalšom rámčeku***. Najprv zisti, koľkokrát sa nachádza deliteľ $(x+4)$ vo výraze $(-3x-12)$.

Ž: *Opäť vydelím členy s najvyššou mocninou, teda* $-3x:x=-3$*. Do podielu k* $2x$ *pridám* -3*. Aby som určil zvyšok, násobím* -3 *s deliteľom* $(x+4)$*. Tak dostanem* $-3\cdot(x+4)=-3x-12$*. To chcem odčítať od* $-3x-12$*. Po odčítaní dostanem nulu.*

$$\begin{array}{l} (2x^2+5x-12):(x+4)=2x-3 \\ \underline{-(2x^2+8x)} \\ -3x-12 \\ \underline{-(-3x-12)} \\ 0 \end{array}$$

U: Výsledný podiel polynómov je $2x-3$.

Ž: *Tak, skončili sme.*

U: Nie tak celkom. Aby sme boli korektní, musíme určiť ***podmienky***, čo všetko môžeme dosadiť za x, aby podiel mal zmysel.

Ž: *No, ak si dobre pamätám, nedá sa deliť nulou.*

U: Pamätáš si to dobre. Šesť cukríkov medzi nula detí nerozdelíš nijak.

Ž: *Takže deliteľ* $x + 4 \neq 0$, *teda* $x \neq -4$.

U: A máme podmienky určené. Pre úplnosť sa ešte spýtam, ako sa môžeme presvedčiť, či sme sa nepomýlili? Inými slovami, ako urobíme ***skúšku správnosti***?

Ž: *To je jednoduché. Vynásobím výsledok s deliteľom, teda*

$$(2x - 3) \cdot (x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12.$$

Vyšla nám aj skúška.

U: Zhrňme to. Podiel $(2x^2 + 5x - 12) : (x + 4) = 2x - 3$ pre $x \neq -4$.
Výsledok môžeme zapísať aj v tvare:

$$\frac{2x^2 + 5x - 12}{x + 4} = 2x - 3 \text{ pre } x \neq -4.$$

U: Poďme na úlohu ***b)***. Tu máme, v porovnaní s úlohou a), vymeneného delenca za deliteľa a naopak. Teda chcem deliť

$$(x + 4) : (2x^2 + 5x - 12).$$

Ž: *Polynóm nižšieho stupňa deleno polynóm vyššieho stupňa. To je nejaké divné. Čo s tým?*

U: No, nejde to. $2x^2$ sa v x nenachádza ani raz. Výsledok bude preto 0 a zvyšok $x + 4$. Zapíšeme:

$$(x + 4) : (2x^2 + 5x - 12) = 0, \text{ zv. } (x + 4).$$

Alebo aj takto:

$$(x + 4) : (2x^2 + 5x - 12) = 0 + \frac{x + 4}{2x^2 + 5x - 12} = \frac{x + 4}{2x^2 + 5x - 12}.$$

Ž: *Aj tu mám určiť podmienky? V tomto prípade musím riešiť kvadratickú rovnicu, lebo* $2x^2 + 5x - 12 \neq 0$

U: To si vyrieš sám. Ale dá sa to zistiť aj jednoduchšie. Pri skúške v úlohe a) si zistil, že

$$2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3) \cdot (x + 4).$$

Podmienky nám vyplynú po vyriešení rovnice

$$(2x - 3)(x + 4) \neq 0.$$

Ž: *Súčin je nenulový, keď žiaden činiteľ nie je nula, teda keď*

$$2x - 3 \neq 0 \text{ aj } x + 4 \neq 0.$$

Z toho dostaneme $x \neq \frac{3}{2}$ **a** $x \neq -4$

Úloha 2: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky:*

a) $(x^2 + 8x + 15) : (x + 3)$;

b) $(x + 3) : (x^2 + 8x + 15)$.

Výsledok: *a)* $x + 5$, *pre* $x \neq -3$; *b)* 0, *zv.* $(x + 3)$, *alebo* $\frac{x+3}{x^2+8x+15}$ *pre* $x \neq -3, -5$

Príklad 3: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky:*

$$(4 - 13a^2 + 9a^4) : (3a^2 + 5a + 2).$$

Ž: *Budem postupovať tak, ako keby som delil dve čísla. Najprv si teda určím, koľkokrát sa nachádza deliteľ* $(3a^2 + 5a + 2)$ *v delenci* $(4 - 13a^2 + 9a^4)$. *Pri číslach je to jasné, no ako to zistiť pri polynómoch?*

U: Tu nás zaujímajú členy s najvyššou mocninou. Preto si najprv zoraďme v delenci aj deliteli členy od najvyššej mocniny po najnižšiu.

Ž: *Takže to bude vyzerať takto:*

$$(9a^4 - 13a^2 + 4) : (3a^2 + 5a + 2).$$

U: Áno, to je ono. Teraz sa pozrime na prvé členy. V delenci je prvým členom $9a^4$, v deliteli $3a^2$. Vydeľ ich. ***Všímaj si*** pri tom ***zápis v rámčeku***.

Ž: *Teda delím* $9a^4 : (3a^2) = 3a^2$. *Do podielu preto napíšem* $3a^2$. *Teraz vynásobím* $3a^2$ *s deliteľom* $(3a^2 + 5a + 2)$ *a výsledok zapíšem pod delenca* $(9a^4 - 13a^2 + 4)$. *Teda* $3a^2 \cdot (3a^2 + 5a + 2) = 9a^4 + 15a^3 + 6a^2$.

U: Aby sme mohli určiť zvyšok, pred $(9a^4 + 15a^3 + 6a^2)$ napíšeme znamienko mínus. Tým naznačíme, že to chceme odčítať od výrazu napísaného nad ním.

$$\boxed{\begin{array}{l} (9a^4 \qquad\qquad - 13a^2 + 4) : (3a^2 + 5a + 2) = 3a^2 \\ \underline{-(9a^4 + 15a^3 + \ \ 6a^2)} \\ \qquad\quad - 15a^3 - 19a^2 + 4 \end{array}}$$

Ž: *A ako sme dostali ten zvyšok* $-15a^3 - 19a^2 + 4$*?*

U: Tak poďme pomaly. Členy s rovnakou mocninou od seba odčítame. Ak odčítame od seba členy 4. stupňa, máme $9a^4 - 9a^4 = 0$, preto sme tam nenapísali nič. Ďalej sme odčítali kubické členy (teda členy, v ktorých vystupuje tretia mocnina premennej).

Ž: *Ale veď v delenci* $9a^4 - 13a^2 + 4$ *nie je žiadne* a^3*?*

U: Ale je. No jeho koeficient je nula, preto odčítame $0a^3 - 15a^3 = -15a^3$. Pokračujeme s kvadratickými členmi: $-13a^2 - 6a^2 = -19a^2$. Ostávajú nám ešte absolútne členy.

Ž: *Áno, viem. Tu odčítam* $4 - 0 = 4$. *Takže vlastne číslo* 4 *len odpíšem.*

U: Tak sme dostali $-15a^3 - 19a^2 + 4$. No a ďalej budeme postupovať rovnako. Teraz sa ***pozeraj na ďalší rámček***.

Ž: *Opäť vydelím členy s najvyššou mocninou, teda* $-15a^3 : 3a^2 = -5a$. *Do podielu k* $3a^2$ *pridám* $-5a$. *Aby som určil zvyšok, násobím* $-5a$ *s deliteľom* $(3a^2 + 5a + 2)$. *Tak dostanem* $-5a \cdot (3a^2 + 5a + 2) = -15a^3 - 25a^2 - 10a$. *To chcem odčítať od* $-15a^3 - 19a^2 + 4$. *Opäť idem postupne. Najprv odčítam kubické členy, tie sú rovnaké, preto mi vyjde nula, ktorú nepíšem. Teraz odčítam kvadratické členy* $-19a^2 - (-25a^2) = -19a^2 + 25a^2 = 6a^2$. *Pokračujem s lineárnymi členmi:* $0a - (-10a) = 10a$. *Ostáva absolútny člen, ktorý vlastne iba odpíšem, lebo opäť odčítavam nulu. Preto pripíšem číslo* 4.

U: Veľmi dobre. Tak sme dostali zvyšok $6a^2 + 10a + 4$.

$$\begin{array}{l}
(9a^4 \qquad\qquad - 13a^2 \qquad\qquad + 4) : (3a^2 + 5a + 2) = 3a^2 - 5a \\
\underline{-(9a^4 + 15a^3 + \ \ 6a^2)} \\
\qquad\quad - 15a^3 - 19a^2 \qquad\qquad + 4 \\
\qquad \underline{-(-15a^3 - 25a^2 - 10a)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6a^2 + 10a + 4
\end{array}$$

Ž: *Pokračujem v delení.* **Pozerám sa** *pri tom* **na ďalší rámček**. *Najprv vydelím najvyššie mocniny:* $6a^2 : 3a^2 = 2$. *Do podielu pripíšem číslo 2. To vynásobím s deliteľom:* $2 \cdot (3a^2 + + 5a + 2) = 6a^2 + 10a + 4$. *Tento výsledok podpíšem pod* $6a^2 + 10a + 4$. *Keďže sú tieto výrazy rovnaké, po odčítaní dostanem nulu. Skončil som. Výsledný podiel je* $3a^2 - 5a + 2$.

$$\begin{array}{l}
(9a^4 \qquad\qquad - 13a^2 \qquad\qquad + 4) : (3a^2 + 5a + 2) = 3a^2 - 5a + 2 \\
\underline{-(9a^4 + 15a^3 + \ \ 6a^2)} \\
\qquad\quad - 15a^3 - 19a^2 \qquad\qquad + 4 \\
\qquad \underline{-(-15a^3 - 25a^2 - 10a)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6a^2 + 10a + 4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(6a^2 + 10a + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ž: *Skončili sme.*

U: Nie tak celkom. Aby sme boli korektní, musíme určiť ***podmienky***, čo všetko môžeme dosadiť za a, aby podiel mal zmysel.

Ž: *No, ak si dobre pamätám, nedá sa deliť nulou.*

U: Pamätáš si to dobre. Osem cukríkov medzi nula detí nerozdelíš nijak.

Ž: *Takže deliteľ* $3a^2 + 5a + 2 \neq 0$. *Zdá sa, že musím riešiť kvadratickú rovnicu. Už ma to dosť unavuje. Táto úloha je nejaká dlhá.*

U: Koniec je už blízko. Pokračujme.

Ž: *Takže, najprv určím* **diskriminant** *tejto* **kvadratickej rovnice**, *pričom jej koeficienty sú* $A = 3$, $B = 5$ *a* $C = 2$:

$$D = B^2 - 4AC = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1.$$

Dopočítam korene:

$$a_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 1}{6}.$$

Dostaneme

$$a_1 = \frac{-5 - 1}{6} = \frac{-6}{6} = -1,$$

$$a_2 = \frac{-5 + 1}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

U: Teda podmienky máme určené:

$$a \neq -1, -\frac{2}{3}.$$

Pre úplnosť sa ešte spýtam, ako sa môžeme presvedčiť, či sme sa nepomýlili. Inými slovami: ako urobíme ***skúšku správnosti***?

Ž: *Vynásobím výsledok s deliteľom. Teda*

$$(3a^2 - 5a + 2) \cdot (3a^2 + 5a + 2) = [(3a^2 + 2) - 5a] \cdot [(3a^2 + 2) + 5a] =$$

$$= (3a^2 + 2)^2 - (5a)^2 = 9a^4 + 2 \cdot 3a^2 \cdot 2 + 4 - 25a^2 =$$

$$= 9a^4 + 12a^2 \cdot 2 + 4 - 25a^2 = 9a^4 - 13a^2 + 4.$$

U: Vyšla nám aj skúška.

Ž: *Bolo toho veľa.*

U: V skúške boli použité dva vzorce:

$$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2,$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Zhrňme to.
Podiel $(9a^4 - 13a^2 + 4) : (3a^2 + 5a + 2) = 3a^2 - 5a + 2$ pre $a \neq -1, -\frac{2}{3}$.
Výsledok môžeme zapísať aj v tvare zlomku:

$$\frac{9a^4 - 13a^2 + 4}{3a^2 + 5a + 2} = 3a^2 - 5a + 2 \text{ pre } a \neq -1, -\frac{2}{3}.$$

Úloha 3: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky:*

$$(4x^2 - 1 + x^4 - 4x^3) : (-2x + 1 + x^2).$$

Výsledok: $x^2 - 2x - 1$ *pre* $x \neq 1$

Príklad 4: *Upravte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^3-5x^2+x+2}.$$

U: Tak, ako na to?

Ž: *Tento výraz chcem zjednodušiť, teda zrejme krátiť. Preto potrebujem zapísať čitateľa aj menovateľa v tvare súčinu. V čitateli je kvadratický mnohočlen a ten viem rozložiť na súčin buď pomocou* **Viètových vzťahov**, *alebo jednoducho vyriešim kvadratickú rovnicu $x^2-3x+2=0$. No horšie to vyzerá s menovateľom. Netuším, ako ho mám rozložiť na súčin.*

U: Tak rozmýšľajme trochu s nadhľadom. Zrejme sa ten výraz dá niečim krátiť. V ideálnom prípade by sa dal čitateľ aj menovateľ vydeliť polynómom nižšieho stupňa, teda čitateľom, ktorý je x^2-3x+2. Skúsme to.

Ž: *Dobre. Idem vydeliť menovateľ čitateľom:*

$$(2x^3-5x^2+x+2):(x^2-3x+2).$$

U: Budeme postupovať tak, ako keby sme delili dve čísla.

Ž: *Najprv si teda určím, koľkokrát sa nachádza deliteľ (x^2-3x+2) v delenci $(2x^3-5x^2+x+2)$.*

U: Pozri na členy s najvyššou mocninou. Keďže ich máme zoradené od najvyššej mocniny po najnižšiu, tak sa pozrime na prvé členy. V delenci je prvým členom $2x^3$, v deliteli x^2. Vydeľ tie. ***Všímaj si*** pri tom ***zápis v rámčeku***.

Ž: *Teda delím $2x^3 : x^2 = 2x$. Do podielu preto napíšem $2x$. Teraz vynásobím $2x$ s deliteľom (x^2-3x+2) a zapíšem pod delenca. Teda $2x\cdot(x^2-3x+2)=2x^3-6x^2+4x$.*

U: Aby sme mohli určiť zvyšok, pred $2x^3-6x^2+4x$ napíšeme znamienko mínus. Tým naznačíme, že to chceme odčítať od nad ním napísaného výrazu.

$$\begin{array}{l}
\quad(2x^3-5x^2+\ \ x+2)\ \ :(x^2-3x+2)=2x\\
\underline{-(2x^3-6x^2+4x)}\\
\qquad\qquad\quad x^2-3x+2
\end{array}$$

Ž: *A ako sme teda dostali ten zvyšok x^2-3x+2?*

U: Tak poďme pomaly. Členy s rovnakou mocninou od seba odčítame. Ak odčítame od seba kubické členy, máme $2x^3-2x^3=0$, preto sme tam nenapísali nič. Ďalej sme odčítali kvadratické členy $-5x^2-(-6x^2)=-5x^2+6x^2=x^2$. Potom lineárne členy $x-4x=-3x$. Ostávajú nám absolútne členy.

Ž: *Ale veď výraz $2x^3-6x^2+4x$ nemá absolútny člen.*

U: Ale má, len nie je napísaný, lebo je 0. Preto odčítame $2-0=2$.

Ž: *Dobre, to mi je už jasné. No a ďalej budem zrejme postupovať rovnako.*

U: Presne tak. Teraz ***sa pozeraj na ďalší rámček***. Zisti, koľkokrát sa nachádza deliteľ (x^2-3x+2) vo výraze (x^2-3x+2).

Ž: *To vidím hneď. Raz.*

U: Tak do podielu k $2x$ pripočítaj číslo 1. Výsledný podiel polynómov je $2x+1$.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 5x^2 + x + 2) \ : (x^2 - 3x + 2) = 2x + 1 \\
\underline{-(2x^3 - 6x^2 + 4x)} \\
x^2 - 3x + 2 \\
\underline{x^2 - 3x + 2} \\
0
\end{array}$$

Ž: *Potom menovateľ $2x^3-5x^2+x+2$ z pôvodného zlomku môžem zapísať ako súčin $(x^2 - 3x+2)\cdot(2x+1)$.*

U: Tak to tak napíš.

Ž: *Takže píšem:*

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^3-5x^2+x+2} = \frac{x^2-3x+2}{(x^2-3x+2)\cdot(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}.$$

U: A to je to, čo sme chceli. V čitateli aj v menovateli sme mali ten istý výraz x^2-3x+2, ktorým si správne zlomok krátil.

Ž: *Tým som skončil. Ďalej sa to už nedá upravovať.*

U: To sa síce nedá, ale ešte máme určiť podmienky.

Ž: *Máme zlomok, preto v menovateli nesmie byť nula.*

U: Správne, len ti odporúčam napísať si menovateľ už rozložený na súčin.

Ž: *Áno, takže*

$$(x^2-3x+2)\cdot(2x+1) \neq 0.$$

U: Máme tu súčin, ktorý má byť rôzny od nuly. Kedy to bude platiť?

Ž: *Nič z toho, čo násobím nesmie byť nula.*

U: OK. Teda $x^2-3x+2\neq 0$, ani $2x+1\neq 0$.

Ž: *Najprv vyriešim tú druhú podmienku:*

$$2x+1 \neq 0,$$

$$2x \neq -1,$$

$$x \neq -\frac{1}{2}.$$

U: Ostáva ešte prvá podmienka: $x^2-3x+2\neq 0$.

Ž: *Ja by som to vyriešil pomocou diskriminantu.*

U: Aj tak sa dá, no s takými malými číslami si môžeme pomôcť aj Vìetovými vzťahmi. Vieme, že x^2-3x+2 chceme napísať ako súčin $(x-\text{niečo})\cdot(x-\text{niečo})$. No a tie čísla v súčine musia dávať číslo 2 a v súčte číslo 3. Poznáš také čísla?

Ž: *Áno, čísla* 1 *a* 2.

U: Tak napíšeme: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2) \neq 0$. Preto ani $x - 1 \neq 0$, ani $x - 2 \neq 0$. Po vyriešení: $x \neq 1$ a $x \neq 2$. Ešte to zhrň do odpovede.

Ž: **Pre $x \neq -\frac{1}{2}, 1, 2$ je výraz $\frac{x^2-3x+2}{2x^3-5x^2+x+2} = \frac{1}{2x+1}$.**

Úloha 4: *Upravte nasledujúci výraz a určte podmienky:*

$$\frac{3x - 2}{6x^2 + 5x - 6}.$$

Výsledok: $\frac{1}{2x+3}$ *pre* $x \neq \frac{2}{3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$

Príklad 5: *Vydeľte nasledujúce polynómy, určte zvyšok a podmienky:*

$$(6a^3 + a^2 - 29a + 20) : (2a - 3).$$

Ž: *Budem postupovať tak, ako keby som delil dve čísla. Najprv si teda určím, koľkokrát sa nachádza deliteľ* $(2a - 3)$ *v delenci* $(6a^3 + a^2 - 29a + 21)$*. Pri číslach je to jasné, no ako to zistiť pri polynómoch?*

U: Teraz ***si všímaj zápis v rámčeku***. Pozri na členy s najvyššou mocninou. Keďže ich máme zoradené od najvyššej mocniny po najnižšiu, tak sa pozrime na prvé členy. V delenci je prvým členom $6a^3$, v deliteli $2a$. A vydeľ tie.

Ž: *Teda delím* $6a^3 : 2a = 3a^2$*. Do podielu napíšem* $3a^2$*. Teraz vynásobím* $3a^2$ *s deliteľom* $(2a - 3)$ *a zapíšem pod delenca. Teda* $3a^2 \cdot (2a - 3) = 6a^3 - 9a^2$*.*

U: Aby sme mohli určiť zvyšok, pred $(6a^3 - 9a^2)$, napíšeme znamienko mínus. Tým naznačíme, že to chceme odčítať od nad ním napísaného výrazu.

$$\boxed{\begin{array}{l} (6a^3 + a^2 - 29a + 20) \ : (2a - 3) = 3a^2 \\ \underline{-(6a^3 - 9a^2)} \\ 10a^2 - 29a + 20 \end{array}}$$

Ž: *A ako sme teda dostali ten zvyšok* $10a^2 - 29a + 20$*?*

U: Tak poďme pomaly. Členy v rovnakej mocnine od seba odčítame. Ak odčítame od seba kubické členy, máme $6a^3 - 6a^3 = 0$, preto sme tam nenapísali nič. To bol aj zámer, aby nám najvyššia mocnina vypadla. Ďalej sme odčítali kvadratické členy $a^2 - (-9a^2) = a^2 + 9a^2 = 10a^2$. Ostávajú nám lineárne a absolútne členy.

Ž: *Ale veď výraz* $6a^3 - 9a^2$ *ich nemá.*

U: Ale má, len nie sú napísané, lebo sú nulové. Preto ich jednoducho odpíšeme. K $10a^2$ tak pripíšeme $-29a + 20$.

Ž: *Dobre, to mi je už jasné.*

U: Ďalej pokračujeme rovnako. Teraz ***sa pozeraj na ďalší rámček***. Najprv zistíme, koľkokrát sa nachádza deliteľ $(2a - 3)$ vo výraze $10a^2 - 29a + 20$.

Ž: *Opäť vydelím členy v najvyššej mocnine, teda* $10a^2 : 2a = 5a$*. Do podielu k* $3a^2$ *pripočítam* $5a$*. Aby som určil zvyšok, vynásobím* $5a$ *s deliteľom* $(2a - 3)$*. Tak dostanem* $5a \cdot (2a - 3) = 10a^2 - 15a$*. Opäť to podpíšem pod výraz* $10a^2 - 29a + 20$*. Tieto výrazy odčítame a dostaneme*

$$(10a^2 - 29a + 20) - (10a^2 - 15a) = -29a + 15a + 20 = -14a + 20.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (6a^3 + a^2 \ - 29a + 20) \ : (2a - 3) = 3a^2 + 5a \\ \underline{-(6a^3 - 9a^2)} \\ 10a^2 - 29a + 20 \\ \underline{- (10a^2 - 15a)} \\ - 14a + 20 \end{array}}$$

Ž: *Ešte stále nemáme výsledok. Dúfam, že toto už bude posledné delenie.*

U: Určite, to už vidno.

Ž: *Výraz* $2a - 3$ *sa vo výraze* $-14a + 20$ *nachádza* (-7)*-krát, lebo* $-14a : 2a = -7$.

U: Overme si to. ***Pozeraj sa*** pri tom ***na ďalší rámček***.

Ž: *Takže do podielu pripíšem číslo* -7. *Vynásobím* $(-7) \cdot (2a - 3) = -14a + 21$. *Podpíšem to pod výraz* $-14a + 20$. *Po odčítaní výrazov* $(-14a + 20) - (-14a + 21)$ *dostanem zvyšok* -1.

$$
\begin{array}{l}
(6a^3 + a^2 - 29a + 20) \;:\; (2a-3) = 3a^2 + 5a - 7 \\
\underline{-(6a^3 - 9a^2)} \\
\qquad\qquad\quad 10a^2 - 29a + 20 \\
\qquad\quad \underline{-\,(10a^2 - 15a)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\,14a + 20 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(-14a + 21)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -1
\end{array}
$$

Ž: *Vyšiel nám nenulový zvyšok. Zapíšeme:*
$(6a^3 + a^2 - 29a + 20) : (2a - 3) = 3a^2 + 5a - 7,\ zv.\ -1$

U: Nezabudnime ešte na podmienky.

Ž: *Ja by som na to zabudol. Vieme, že sa nedá deliť nulou. Teda deliteľ má byť rôzny od nuly:*

$$2a - 3 \neq 0,$$

$$a \neq \frac{3}{2}.$$

U: A máme už určené aj podmienky. Pre úplnosť sa ešte spýtam, ako sa môžeme presvedčiť, či sme sa nepomýlili? Inými slovami, ako urobíme ***skúšku správnosti***.

Ž: *To je jednoduché. Vynásobím výsledok s deliteľom a k tomuto súčinu pripočítam zvyšok* -1.

$$(3a^2 + 5a - 7) \cdot (2a - 3) - 1 =$$

$$= 6a^3 - 9a^2 + 10a^2 - 15a - 14a + 21 - 1 =$$

$$= 6a^3 + a^2 - 29a + 20.$$

A to je vlastne výraz z delenca. Vyšla nám teda aj skúška.

U: Zhrňme to.

Ž: $(6a^3 + a^2 - 29a + 20) : (2a - 3) = 3a^2 + 5a - 7,\ zv.\ -1$ *pre* $a \neq \frac{3}{2}$.

U: Zapíšme ešte tento výsledok tak, aby sme pri tom nepoužili skratku „zv.“. Zvyšok -1 by tam nebol, keby sa dal vydeliť deliteľom $2a - 3$. Delenie nie je nič iné ako lomeno, preto namiesto „zv. -1“ môžeme použiť podiel $\frac{-1}{2a-3}$. Výsledok môžeme teda zapísať aj takto:

$$\frac{6a^3 + a^2 - 29a + 20}{2a - 3} = 3a^2 + 5a - 7 + \frac{-1}{2a - 3} \text{ pre } a \neq \frac{3}{2}.$$

Úloha 5: *Vydeľte nasledujúce polynómy, určte zvyšok a podmienky:*

$$(x^3 + 2x^2 - 2x - 1) : (x + 1).$$

Výsledok: $x^2 + x - 3$, *zv.* 2, *alebo* $x^2 + x - 3 + \frac{2}{x+1}$ *pre* $x \neq -1$

Príklad 6: *Nájdite reálne číslo t tak, aby delenie nemalo zvyšok:*

$$(12x^2 + 17x + t) : (3x + 8).$$

U: Tak, ako by si na to išiel?

Ž: *Budem to normálne deliť a na konci delenia zistím, čo musí byť t, aby vyšiel podiel bezo zvyšku.*

U: Skús. ***Pozeraj sa*** pri tom ***na zápis v rámčeku***.

Ž: *Delenca aj deliteľa mám zoradených od najvyššej mocniny, takže môžem deliť $12x^2 : 3x = 4x$. Teda do podielu napíšem $4x$.*

U: Áno.

Ž: *Teraz spätne vynásobím $4x$ deliteľom $3x + 8$. Dosatnem $4x \cdot (3x + 8) = 12x^2 + 32x$. To odpočítam od delenca $12x^2 + 17x + t$. Dostanem $(12x^2 + 17x + t) - (12x^2 + 32x) = 17x - 32x + t = -15x + t$.*

$$\boxed{\begin{array}{l} (12x^2 + 17x + t) : (3x + 8) = 4x \\ \underline{-(12x^2 + 32x)} \\ - 15x + t \end{array}}$$

U: Pokračuj ďalej. Teraz ***si všímaj ďalší rámček***.

Ž: *Postupujem rovnako. Zistím, koľkokrát sa deliteľ $3x+8$ nachádza vo výraze $-15x+t$. Preto vydelím $-15x : 3x = -5$. Do podielu za $4x$ pripíšem -5. Teraz spätne vynásobím -5 deliteľom $3x + 8$. Dostanem: $-5 \cdot (3x + 8) = -15x - 40$. Tento výsledok zapíšem pod výraz $-15x + t$. Zvyšok dostanem tak, že odčítam $(-15x + t) - (-15x - 40) = t + 40$.*

$$\boxed{\begin{array}{l} (12x^2 + 17x + t) : (3x + 8) = 4x - 5 \\ \underline{-(12x^2 + 32x)} \\ - 15x + \ t \\ \underline{-(-15x - 40)} \\ t + 40 \end{array}}$$

U: Podľa zadania chceme, aby zvyšok bol nulový. Čo s tým teda urobíme?

Ž: *Položíme $t + 40 = 0$. Odtiaľ: $t = -40$.*

U: Fajn. Určme ešte ***podmienky***.

Ž: *Deliteľ musí byť rôzny od nuly, lebo nevieme deliť nulou. Preto:*

$$3x + 8 \neq 0.$$

To platí práve vtedy, keď

$$3x \neq -8,$$

$$x \neq -\frac{8}{3}.$$

U: O správnosti svojho výsledku sa ešte presvedč ***skúškou***.

Ž: *Musím vynásobiť podiel* $4x-5$ *s deliteľom* $3x+8$. *Mal by som dostať delenca, pričom za t dosadím* -40, *čo je výraz* $12x^2+17x-40$.

U: Urob to.

Ž: *Teda:*

$$(4x-5)(3x+8)=12x^2+32x-15x-40=12x^2+17x-40.$$

U: OK. Vyšlo to. Sformuluj ešte odpoveď.

Ž: **Aby delenie $(12x^2+17x+t):(3x+8)$ nemalo zvyšok, musí sa $t=-40$.**

Úloha 6: *Nájdite reálne číslo t tak, aby delenie nemalo zvyšok:*

$$(3x^2-33x+t):(x-1).$$

Výsledok: $t=30$

Príklad 7: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky:*

$$(x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2).$$

Ž: *Ale tu delím polynómy s dvoma premennými. S tým nemám skúsenosť.*

U: Ale vieš deliť polynómy s jednou premennou.

Ž: *To viem.*

U: Tak tu postupuj rovnako.

Ž: *Takže mám najprv zistiť, koľkokrát sa deliteľ (x^2-xy+y^2) nachádza v delenci x^3+y^3. Členy mám mať zoradené od najvyššieho stupňa po najnižší. A to ako? Veď v delenci $x^3 + y^3$ sú všetky členy tretieho stupňa a v deliteli $x^2 - xy + y^2$ zase druhého.*

U: Tak si zatiaľ všímaj len jednu premennú, napr. x. A zoraď si ich iba podľa stupňa premennej x. ***Pozeraj sa*** pri tom ***na zápis v rámčeku***.

Ž: *To vlastne tak mám zoradené. Môžem pokračovať. Takže x^2 sa v x^3 vyskytuje x-krát, preto do podielu píšem x. Teraz x vynásobím s deliteľom $x^2 - xy + y^2$, teda: $x \cdot (x^2 - xy + y^2) = = x^3 - x^2y + xy^2$. Tento výsledok napíšem pod delenca, aby som ho od neho odčítal. Po odčítaní dostanem: $(x^3 + y^3) - (x^3 - x^2y + xy^2) = x^2y - xy^2 + y^3$.*

U: Správne. Pokračuj ďalej.

$$\begin{array}{l} (x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2) = x \\ \underline{-(x^3 - x^2y + xy^2)} \\ \quad x^2y - xy^2 + y^3 \end{array}$$

Ž: *Teraz musím zistiť, koľkokrát sa deliteľ $(x^2 - xy + y^2)$ nachádza vo zvyšku $(x^2y - xy^2 + y^3)$. To už je* **zapísané v ďalšom rámčeku**. *Zistím to podľa prvých členov, ktoré vydelím. Teda $x^2y : x^2 = y$. Do podielu preto pripočítam y.*

U: Vidíš, že si si s tým poradil. Pokračuj ďalej.

Ž: *Teraz y vynásobím s deliteľom $(x^2 - xy + y^2)$. Dostanem: $y \cdot (x^2 - xy + y^2) = x^2y - xy^2 + y^3$. Tento výsledok odpočítam od $x^2y - xy^2 + y^3$. Vyjde nám zvyšok nula.*

U: Dobre.

$$\begin{array}{l} (x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2) = x + y \\ \underline{-(x^3 - x^2y + xy^2)} \\ \quad x^2y - xy^2 + y^3 \\ \underline{-(x^2y - xy^2 + y^3)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Ž: *Podiel je preto rovný výrazu $x + y$.*

U: Dobre. Nezabudnime ešte na ***podmienky***.

Ž: *Nesmiem deliť nulou, preto deliteľ*

$$x^2 - xy + y^2 \neq 0.$$

Neviem, čo s tým ďalej.

U: Ďalej nič. Pokojne môžeme nechať podmienku v takom tvare. Ešte sa presvedčme, či sme sa niekde nepomýlili a urobme ***skúšku správnosti***.

Ž: *Musím ukázať, že platí:*

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

U: Nič ti to nepripomína? Nože sa na to poriadne pozri.

Ž: *Aha, veď to je vzorec* $x^3 + y^3$. *Ja ťulpas. Načo som to vlastne delil? Hneď som mohol napísať výsledok:*

$$(x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2) = x + y.$$

U: Mohol si...

Úloha 7: *Vydeľte nasledujúce polynómy a určte podmienky:*

$$(x^3 - y^3) : (x^2 + xy + y^2).$$

Výsledok: $x - y$ *pre* $x^2 + xy + y^2 \neq 0$

Príklad 8: *Vydeľte nasledujúce polynómy, určte zvyšok po delení a podmienky:*

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4).$$

Ž: *Členy polynómov mám zoradené od najvyššej mocniny po najnižšiu, teda začnem deliť $x^3 : x = x^2$. Preto do podielu zapíšem x^2, ako* **je to zapísané v rámčeku**. *Výsledok teraz vynásobím deliteľom $x - 4$. Dostanem: $x^2 \cdot (x - 4) = x^3 - 4x^2$. Výsledok napíšem pod delenca $x^3 - 5x^2 + 5x - 2$, od ktorého ho odčítam.*

U: Správne, odčítaj to teda.

Ž: *Dostanem $(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) - (x^3 - 4x^2) = -5x^2 + 4x^2 + 5x - 2 = -x^2 + 5x - 2$. Pod čiaru napíšem $-x^2 + 5x - 2$.*

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \quad : (x - 4) = x^2 \\
\underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\quad -x^2 + 5x - 2
\end{array}$$

U: Správne. Pokračuj ďalej. Teraz ***si všímaj ďalší rámček***.

Ž: *Teraz postupujem rovnako. Zistím, koľkokrát sa deliteľ $x-4$ nachádza vo zvyšku $-x^2+5x-2$. Preto vydelím $-x^2 : x = -x$. Do podielu za x^2 pripíšem $-x$. A opäť vynásobím $-x$ s deliteľom $x - 4$. Dostanem $-x \cdot (x - 4) = -x^2 + 4x$. Tento výsledok odpočítam od výrazu $-x^2 + 5x - 2$. Čiže $(-x^2 + 5x - 2) - (-x^2 + 4x) = 5x - 4x - 2 = x - 2$. Výraz $x - 2$ zapíšem pod čiaru.*

U: Správne.

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \quad : (x - 4) = x^2 - x \\
\underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\quad -x^2 + 5x - 2 \\
\qquad \underline{-(-x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\qquad x - 2
\end{array}$$

Ž: *Už vidno, že toto delenie bude mať nenulový zvyšok. Pokračovanie delenia mám v* **ďalšom rámčeku**. *Chcem zistiť, koľko je $x : x$. Je to 1, preto do podielu pripíšem 1. Potom $1 \cdot (x - 4) = x - 4$. Po odčítaní od $x - 2$ dostanem: $(x - 2) - (x - 4) = -2 + 4 = 2$.*

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \quad : (x - 4) = x^2 - x + 1 \\
\underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\quad -x^2 + 5x - 2 \\
\qquad \underline{-(-x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\qquad x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(x - 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2
\end{array}$$

Ž: *A čo s tým?*

U: Nič. To je výsledok.

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1, \text{ zv. } 2.$$

Nezabudnime ešte na ***podmienky***.

Ž: *Nesmieme deliť nulou, teda deliteľ* $x - 4 \neq 0$.
To platí práve vtedy, keď $x \neq 4$.

U: Správne. Ale vráťme sa predsa len ešte k tomu výsledku. Použili sme v ňom niečo také ako „zv.“. A uznaj, že to je taký divný zápis. Poznáme operácie sčítania, odčítania, násobenia, delenia, … Ale čo je to za operáciu „zv.“? Skúsme to napísať korektne.

Ž: *Netuším ako.*

U: Ten zvyšok 2 by tam nebol, keby sa dal vydeliť deliteľom $x - 4$. Delenie nie je nič iné ako lomeno, teda namiesto „zv. 2“ môžeme k podielu $x^2 - x + 1$ pripočítať $\frac{2}{x-4}$. Zapíšeme to teda takto:
Pre $x \neq 4$ ***je***

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 2}{x - 4} = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}.$$

Skús si ešte urobiť skúšku správnosti.

Úloha 8: *Vydeľte nasledujúce polynómy, určte zvyšok po delení a podmienky:*

$$(2x^3 - x^2 - 13x) : (2x + 5).$$

Výsledok: $x^2 - 3x + 1$, *zv.* -5, *alebo* $x^2 - 3x + 1 - \frac{5}{2x+5}$ *pre* $x \neq -\frac{5}{2}$