Operácie s mnohočlenmi

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Na polynómoch $A(x) = 6x^2 - x - 2$, $B(x) = 2x + 1$ a $C(x) = 2x - 1$ si zopakujeme základné operácie s nimi.

Ž: *O aké operácie ide?*

U: Budeme hovoriť o týchto operáciách s mnohočlenmi:

- ***sčítavanie***, napr. $A(x) + B(x)$;
- ***odčítavanie***, napr. $A(x) - B(x)$;
- ***násobenie***, napr. $B(x) \cdot A(x)$;
- ***umocňovanie*** (predovšetkým druhá a tretia mocnina), napr. $(B(x))^2$, $(B(x))^3$;
- ***delenie***, napr. $A(x) : B(x)$.

U: ***Sčítavanie a odčítavanie*** je jednoduché. Sčítavať a odčítavať môžeme od seba členy s rovnakou mocninou.

Ž: *Tak, ako to zvykneme povedať: „hrušky s hruškami a jablka s jablkami“. V našich konkrétnych príkladoch tak dostanem:*

$$A(x) + B(x) = (6x^2 - x - 2) + (2x + 1) = 6x^2 + x - 1,$$

$$A(x) - B(x) = (6x^2 - x - 2) - (2x + 1) = 6x^2 - x - 2 - 2x - 1 = 6x^2 - 3x - 3.$$

To naozaj nebolo zložité.

U: Pozor treba dávať na znamienka pri odstraňovaní zátvoriek pri odčítavaní.

U: Teraz poďme na ***násobenie*** mnohočlenov. Postupujeme systémom ***každý s každým***, t.j. každý jednočlen z prvého polynómu vynásobíme s každým jednočlenom z druhého polynómu, ako nám to ukazujú šípky. V našom príklade tak dostaneme:

$$B(x) \cdot A(x) = (2x + 1) \cdot (6x^2 - x - 2) =$$

$$= 2x \cdot 6x^2 + 2x \cdot (-x) + 2x \cdot (-2) + 1 \cdot 6x^2 + 1 \cdot (-x) + 1 \cdot (-2) =$$

$$= 12x^3 - 2x^2 - 4x + 6x^2 - x - 2 =$$

$$= 12x^3 + 4x^2 - 5x - 2.$$

Ž: *A čo keď budem násobiť tri, alebo viac mnohočlenov?*

U: To by vari nemal byť problém. Najprv vynásobíš prvé dva, upravíš a výsledok vynásobíš s ďalším mnohočlenom.

Ž: *Je jedno v akom poradí to budem násobiť?*

U: Áno. Je jedno, či vynásobíš $B(x) \cdot A(x)$ alebo $A(x) \cdot B(x)$, výsledok musí vyjsť stále ten istý. Učene sa tomu hovorí, že platí komutatívny zákon pre násobenie polynómov.

U: Niekedy si môžeš prácu uľahčiť použitím vzorcov.

Ž: *Vzorce, to by som mal vedieť spamäti, čo?*

U: Áno, no ber to tak, že tie ti majú pomôcť pri riešení úloh, nie aby si mal traumu z toho, že ich musíš vedieť spamäti. Začneme prvým vzorcom. Pri násobení dvoch dvojčlenov líšiacich sa len znamienkom, t.j. $(a+b)(a-b)$ môžeš postupovať systémom každý s každým, alebo si zapamätať len výsledok, ku ktorému dospeješ a ten používať.

Ž: *No, tento vzorec je ešte ľahký, ten si pamätám:*

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

U: Pokús sa využitím tohto vzorca vynásobiť polynómy $B(x) \cdot C(x)$ zadané na začiatku.

Ž: *Teda násobím*

$$B(x) \cdot C(x) = (2x+1) \cdot (2x-1) =$$

U: Za premennú a zo vzorca dosadíme jednočlen $2x$ a za premennú b jednočlen 1.

Ž: *Tak dostanem výraz:*

$$= (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

U: Prejdime na ***mocniny*** mnohočlenov. Pre druhú a tretiu mocninu dvojčlenov budeme používať tieto vzorce:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ž: *Tie vzorce pre tretiu mocninu vyzerajú komplikovanejšie. Ako si ich mám zapamätať?*

U: Všimni si, že v týchto vzorcoch mocniny premennej a postupne klesajú: a^3, a^2, a^1, čo je vlastne a a nakoniec $a^0 = 1$. Naopak mocniny premennej b stúpajú: pri a^3 stojí $b^0 = 1$, ďalej je tam b, potom b^2 a nakoniec b^3.

Ž: *Všetky znamienka vo vzorci $(a+b)^3$ sú kladné. Vo vzorci $(a-b)^3$ sa zasa striedajú.*

U: Použime teraz tieto vzorce v našich konkrétnych príkladoch:

$$(B(x))^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

$$(B(x))^3 = (2x+1)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 + 1^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.$$

Ž: *A existujú vzorce aj pre vyššie mocniny?*

U: Áno, o roznásobení n-tej mocniny $(a+b)^n$ hovorí tzv. binomická veta. No zatiaľ si vystačíme s týmto.

Ž: *To musí byť riadne komplikované.*

U: Vystupujú tam kombinačné čísla, no zatiaľ sa tým nebudeme zaoberať.

Ž: *Zatiaľ sme hovorili len o umocňovaní dvojčlenov. Čo keď budeme chcieť umocniť viacčlen, napr. trojčlen $(A(x))^3$?*

U: Tak to budeme musieť otrocky roznásobiť. Môžeš to skúsiť:

$$(A(x))^3 = (6x^2 - x - 2)^3 = (6x^2 - x - 2) \cdot (6x^2 - x - 2) \cdot (6x^2 - x - 2) = \cdots$$

Ďalej to už nechám na teba.

U: Pri upravovaní výrazov môžeme využiť aj tieto rovnosti:

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2,$$

$$(b-a)^2 = (a-b)^2.$$

Ž: *To je jasné hneď na prvý pohľad?*

U: No, povedzme, že na druhý. Tak:

$$(-a-b)^2 = (-(a+b))^2 = ((-1)(a+b))^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2.$$

No a platnosť druhej rovnosti je ešte jednoduchšie zdôvodniteľná:

$$(b-a)^2 = b^2 - 2ba + a^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Ž: *Ostáva nám* **delenie** *mnohočlenov. Ako vydelím: $A(x) : B(x) = (6x^2 - x - 2) : (2x + 1)$?*

U: Tomu je tiež venovaná samostatná téma. Tu to už totiž nepôjde systémom každý s každým, ako to bolo pri násobení. Dokonca, kým súčet, súčin, mocnina i rozdiel polynómov je opäť polynóm, pri podiele to tak nemusí byť.

Príklad 1: *Majme polynómy* $P(x) = 1,5x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 4x - 3$ *a* $Q(x) = \frac{9}{2}x^5 - \sqrt{3}x^3 + x^2 - 10x$. *Vypočítajte:*

a) $P(x) + Q(x)$*;*

b) $P(x) - Q(x)$*.*

Ž: *Začnem úlohou* **a)***. Ide o sčítanie dvoch polynómov. Združím si členy s rovnakou mocninou a príslušné koeficienty navzájom sčítam.*

U: Presnejšie: sčítame koeficienty pri rovnakej mocnine. Tak to urob.

Ž: *Teda*

$$P(x) + Q(x) = \left(1{,}5x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 4x - 3\right) + \left(\frac{9}{2}x^5 - \sqrt{3}x^3 + x^2 - 10x\right) =$$

$$= \left(1{,}5x^5 + \frac{9}{2}x^5\right) - 2x^4 + \left(7x^3 - \sqrt{3}x^3\right) + x^2 + (4x - 10x) - 3 =$$

$$= \left(1{,}5 + \frac{9}{2}\right)x^5 - 2x^4 + \left(7 - \sqrt{3}\right)x^3 + x^2 + (4 - 10)\,x - 3 =$$

Teraz spočítam príslušné koeficienty. Najprv pri x^5*:* $1{,}5 + \frac{9}{2} = 1{,}5 + 1{,}5 = 6$*. Ďalej koeficienty pri* x^3*: rozdiel* $7 - \sqrt{3}$ *neviem ináč upraviť, tak to nechám v tomto tvare. Nakoniec dám dohromady koeficienty pri* x*, teda* $4 - 10 = -6$*. Preto sa predchádzajúci výraz rovná výrazu:*

$$= 6x^5 - 2x^4 + (7 - \sqrt{3})x^3 + x^2 - 6x - 3.$$

No a to je už výsledok. Dúfam, že správny.

U: Teraz úloha ***b)***.

Ž: *Tu budem postupovať úplne rovnako, ibaže to nebudem sčítavať, ale odčítavať. Teda:*

$$P(x) - Q(x) = \left(1,5x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 4x - 3\right) - \left(\frac{9}{2}x^5 - \sqrt{3}x^3 + x^2 - 10x\right) =$$

$$= 1,5x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 4x - 3 - \frac{9}{2}x^5 + \sqrt{3}x^3 - x^2 + 10x =$$

$$= (1,5x^5 - \frac{9}{2}x^5) - 2x^4 + (7x^3 + \sqrt{3}x^3) - x^2 + (4x + 10x) - 3 =$$

$$= (1,5 - \tfrac{9}{2})x^5 - 2x^4 + (7 + \sqrt{3})x^3 - x^2 + (4 + 10)x - 3 =$$

$$= (1,5 - 4,5)x^5 - 2x^4 + (7 + \sqrt{3})x^3 - x^2 + 14x - 3 =$$

$$= -3x^5 - 2x^4 + (7 + \sqrt{3})x^3 - x^2 + 14x - 3$$

U: Správne.

Úloha 1: *Majme polynómy* $P(x) = x^6 - 2x^4 + 7x^3 - 2$ *a* $Q(x) = \frac{1}{3}x^6 + 4x^5 - \sqrt{2}x^4 + x + 7$. *Vypočítajte:*

a) $P(x) + Q(x)$;

b) $P(x) - Q(x)$.

Výsledok: *a)* $\frac{4}{3}x^6 + 4x^5 - \left(2 + \sqrt{2}\right) x^4 + 7x^3 + x + 5$; *b)* $\frac{2}{3}x^6 - 4x^5 + \left(\sqrt{2} - 2\right) x^4 + 7x^3 - x - 9$

Príklad 2: *Vypočítajte:*

a) $(-6a-2)(3a-5)$;

b) $(-6a-2)\cdot 3a-5$;

c) $-6a-2\cdot 3a-5$;

d) $-6a-2\cdot(3a-5)$.

Ž: *Veď tie štyri úlohy sa líšia len zátvorkami.*

U: Presne tak. V tejto úlohe si máš natrénovať prioritu operácií a prácu so znamienkami. Aby si nezabudol, že mínus krát mínus nám dáva plus a plus krát mínus zasa mínus. Začni úlohou ***a)***.

Ž: *V tejto úlohe mám roznásobiť dve zátvorky. Postupujem systémom každý z prvej zátvorky s každým z druhej zátvorky. Najprv vynásobím* $-6a$ *s* $3a$, *potom* $-6a$ *s číslom* 5.

U: Pozor. Pred päťkou je znamienko mínus. Nezabudni na to.

Ž: *OK. Takže* $-6a$ *vynásobím s* -5. *Ďalej* -2 *s* $3a$ *a nakoniec* -2 *s* -5.

U: Fajn, napíš to.

Ž:

$$(-6a-2)(3a-5)=-6a\cdot 3a-6a\cdot(-5)-2\cdot 3a-2\cdot(-5)=$$

$$=-18a^2+30a-6a+10=-18a^2+24a+10.$$

U: Správne.

U: Pokračujme úlohou ***b)*** $(-6a-2)\cdot 3a-5$.

Ž: *Tu najprv roznásobím dvojčlen* $(-6a-2)$ *s jednočlenom* $3a$ *a až potom od toho odčítam číslo* 5.

U: Dobre. Napíš to.

Ž:

$$(-6a-2)\cdot 3a-5=-6a\cdot 3a-2\cdot 3a-5=-18a^2-6a-5.$$

U: To bolo jednoduché. Úloha ***c)*** nebude o nič zložitejšia. Vypočítaj $-6a-2\cdot 3a-5$.

Ž: *Tu nemám žiadne zátvorky. Takže najprv vynásobím* -2 *s* $3a$. *Môžem písať:*

$$-6a-2\cdot 3a-5=-6a-6a-5=-12a-5.$$

U: Aj to je správne.

U: Ostáva nám posledná úloha ***d)***. Máš vypočítať: $-6a-2\cdot(3a-5)$.

Ž: *Najprv roznásobím* -2 *s výrazom v zátvorke:* $-2\cdot 3a=-6a$, $-2\cdot 5=-10$. *Teda môžem písať:*

$$-6a-2\cdot(3a-5)=-6a-6a-10.$$

U: Stop. Správne si zobral znamienko mínus pred číslom 2. Prečo si ale ignoroval záporné znamienko pred päťkou? Musíš vynásobiť: $-2\cdot(-5)=+10$, nie -10.

Ž: *Neviem. Často na to zabúdam.*

U: Oprav to.

Ž: *OK.*

$$-6a - 2 \cdot (3a - 5) = -6a - 6a + 10 = -12a + 10.$$

U: Teraz je to správne.

Úloha 2: *Vypočítajte:*

a) $(-3b + 4)(0{,}1\,b - 5)$;

b) $(-3b + 4) \cdot 0{,}1\,b - 5$;

c) $-3b + 4 \cdot 0{,}1\,b - 5$;

d) $-3b + 4 \cdot (0{,}1\,b - 5)$.

Výsledok: *a)* $-0{,}3\,b^2 + 15{,}4\,b - 20$; *b)* $-0{,}3\,b^2 + 0{,}4\,b - 5$; *c)* $-2{,}6\,b - 5$; *d)* $-2{,}6\,b - 20$.

Príklad 3: *Vynásobte a upravte:*

$$(a-b+c+d)(a-b-c-d).$$

Ž: *Štvorčlen krát štvorčlen. Uf, toho bude dosť na roznásobovanie. Takže idem to roznásobovať postupne. Najprv a z prvej zátvorky s každým členom z druhej zátvorky, Potom b z prvej . . .*

U: Pozor. Nie b, ale $-b$. Nezabúdaj na znamienka.

Ž: *OK. Takže $-b$ z prvej zátvorky s každým členom z druhej zátvorky, atď.*

U: Napíš to.

Ž: *Teda:*

$$(a-b+c+d)(a-b-c-d) =$$

$$= a^2 - ab - ac - ad - ba + b^2 + bc + bd + ca - cb - c^2 - cd + da - db - dc - d^2 =$$

U: OK. Čo ďalej?

Ž: *Teraz rovnaké členy zoskupím. Ale najprv odpíšem a^2, b^2, $-c^2$ a $-d^2$. Ďalej: $-ab-ba = = -2ab$, potom $-ac+ca = 0$, 0 nemusíme písať. Pokračujem: $-ad+da = 0$, tiež nepíšeme. Nasleduje $bc-cb = 0$, $bd-db = 0$, $-cd-dc = -2cd$.*

U: Správne, napíš to.

Ž: *Posledný výraz sa rovná*

$$= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab - 2cd.$$

To by už mal byť výsledok.

U: Áno, je. No, skúsme si to vyriešiť ešte raz ***druhým spôsobom***.

Ž: *A je to nutné?*

U: Nie je, ale nacvičíš si nejaké finty, ktoré môžeš neskôr zužitkovať. A je to aj elegantnejšie.

Ž: *No, dobre.*

U: Chceme použiť vzorec $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

Ž: *Ale ako? Veď my máme štvorčleny, nie dvojčleny.*

U: Ale môžeme tam dodať zátvorky takto:

$$(a-b+c+d)(a-b-c-d) = [(a-b)+(c+d)]\cdot[(a-b)-(c+d)] =$$

V našom vzorci $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ bude $A = a-b$ a $B = c+d$. Takže dostaneme:

$$= (a-b)^2 - (c+d)^2 =$$

Ž: *No a teraz musíme použiť ďalšie vzorce: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ a $(c+d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$.*

U: Správne, môžeme písať:

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (c^2 + 2cd + d^2) = a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2 =$$

Ž: *No, je pravda, že tu netreba toľko sliediť, čo s čím zlúčiť.*

U: Ešte si poprehadzujme členy a dostaneme:

$$= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab - 2cd.$$

Ž: *Je to ten istý výsledok.*

U: A čo si si myslel?

Úloha 3: *Vynásobte a upravte:*

$$(1 + x\sqrt{2} + x^2)(1 - x\sqrt{2} + x^2).$$

Výsledok: $1 + x^4$

Príklad 4: *Pre $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$ vynásobte a upravte:*

$$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1).$$

Ž: *To nevyzerá dobre. Samé písmenká a tie bodky k tomu ....*

U: Žiaden strach. Vieš predsa, ako sa násobí dvojčlen s dvojčlenom.

Ž: *To akože zátvorka so zátvorkou.*

U: Áno. A tu to bude to isté, len trochu dlhšie. Každý jednočlen z prvej zátvorky vynásobíš s každým jednočlenom z druhej zátvorky.

Ž: *Skúsim to.*

U: Najprv si povedzme, čo znamenajú tie bodky.

Ž: *Zrejme: a tak ďalej.*

U: V podstate áno. Tak čo by tam išlo ďalej namiesto bodiek?

Ž: *Tak keď prvé dva členy sú a^{n-1}, a^{n-2}, tak logicky bude ďalej nasledovať a^{n-3}, a^{n-4}.*

U: OK. Skrátka, každá ďalšia mocnina je o stupeň nižšia. Teraz roznásob

$$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1).$$

Ž: *Najprv z prvej zátvorky vezmem a a to vynásobím s každým jednočlenom z druhej zátvorky. Teda $a \cdot a^{n-1} = \ldots$*

U: Vidíš, že základy sú rovnaké, takže exponenty len spočítaj.

Ž: *OK. a je vlastne a^1, teda $a \cdot a^{n-1} = a^{1+n-1} = a^n$. Je to v poriadku?*

U: Áno.

Ž: *Potom $a \cdot a^{n-2} = a^{1+n-2} = a^{n-1}$. Tri bodky. $a \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3$, $a \cdot a = a^2$, $a \cdot 1 = a$. Potom -1 vynásobím so všetkými členmi z druhej zátvorky.*

U: To vlastne zmeníš všetky kladné znamienka na záporné. Zapíš to.

Ž: *Teda:*

$$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1) =$$
$$= a \cdot a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + \cdots + a \cdot a^2 + a \cdot a + a \cdot 1 - a^{n-1} - a^{n-2} - \cdots - a^2 - a - 1 =$$
$$= a^{1+n-1} + a^{1+n-2} + \cdots + a^{1+2} + a^{1+1} + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \cdots - a^2 - a - 1 =$$
$$= a^n + a^{n-1} + \cdots + a^3 + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \cdots - a^2 - a - 1 =$$

U: Teraz rovnaké mocniny od seba odčítaj.

Ž: *Od a^n nemám čo odčítať. Od a^{n-1} odčítam a^{n-1}. Čo ďalej?*

U: Tak skúsme si namiesto troch bodiek doplniť zopár členov. Dostaneme:

$$= a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^3 + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \cdots - a^3 - a^2 - a - 1 =$$

Ž: *Tak tu od seba skoro všetko odčítam: $a^{n-1} - a^{n-1} = 0$, $a^{n-2} - a^{n-2} = 0$, $\ldots$, $a^3 - a^3 = 0$, $a^2 - a^2 = 0$, $a - a = 0$. Potom upravený výraz vyzerá takto:*

$$= a^n - 1$$

U: Správne.

Úloha 4: *Pre $n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ vynásobte a upravte:*

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Výsledok: $a^n - b^n$

Príklad 5: *Umocnite:*

a) $(-n)^3$;

b) $(-n-1)^3$;

c) $(n-1)^3 - (-n)^3 - (-n-1)^3$.

Ž: *Nepáči sa mi, že je tam tak veľa záporných znamienok.*

U: Žiaden strach. Po vyriešení úloh a), b) úlohu c) už zvládneš hravo. Takže poďme postupne na to. Začneme úlohou ***a)***. Tu ide len o to, čo urobí tretia mocnina so záporným znamienkom.

Ž: *Ak -1 vynásobím trikrát, dostanem opäť -1.*

U: Správne. Môžeme teda napísať:

$$(-n)^3 = (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) = -n^3.$$

U: Pokračujme úlohou ***b)***.

Ž: *No, poznám vzorec $(A+B)^3$ aj $(A-B)^3$, ale nepoznám vzorec $(-A-B)^3$. Čo s tým?*

U: Tak si to skús upraviť tak, aby si mohol použiť vzorec, ktorý poznáš. Skús vybrať -1 pred zátvorku. Ale pozor, aby si to správne zapísal.

Ž: *Skúsim:*

$$(-n-1)^3 = [(-1)(n+1)]^3 = (-1)^3(n+1)^3 = (-1)(n+1)^3 =$$

U: No a to, čo ti vyšlo, môžeme skrátene zapísať takto:

$$= -(n+1)^3 =$$

A na to už vzorec poznáš:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Ž: *Takže po poslednej úprave dostanem:*

$$= -(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = -n^3 - 3n^2 - 3n - 1.$$

U: Vidíš, že si to zvládol.

U: No a na záver vyrieš úlohu ***c)***.

Ž: *Snáď to po predchádzajúcich úlohách nebude problém.*

U: Nemal by byť.

Ž: *Takže:*

$$(n-1)^3 - (-n)^3 - (-n-1)^3 = (n-1)^3 - (-n^3) - (-(n+1)^3) =$$
$$= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 =$$

Využil som pri tom fakt, že mínus krát mínus je plus.

U: Správne. Pokračuj ďalej.

Ž: *Teraz roznásobím zátvorky* $(n-1)^3$ *a* $(n+1)^3$ *pomocou vzorcov. Tak dostanem:*

$$= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =$$

$$= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2).$$

U: Dopracovať sa k správnemu výsledku nebolo až také ťažké.

Úloha 5: *Zjednodušte:*

$$(3x + 7)^2 - (-3x - 5)^2 - 4(3x + 6).$$

Výsledok: 0

Príklad 6: *Umocnite:*

a) $\left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2$*;*

b) $\left(-2x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2$*;*

c) $\left(2x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2$*;*

d) $\left(-2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2$*.*

U: Čo majú tieto štyri úlohy spoločné?

Ž: *Tak, vo všetkých štyroch úlohách vystupujú* $2x^2$ *aj* $\frac{1}{2}xy$*. Akurát znamienka pred nimi sa menia.*

U: Presne tak. Sú to všetky štyri možnosti, ako môžu byť umiestnené znamienka $+$ a $-$ pred dvoma členmi.

Ž: *Ako sa tak na to pozerám, v úlohe a) použijem vzorec* $(a+b)^2$*, v úlohe c) zase* $(a-b)^2$*. No čo s úlohami b) a d)?*

U: Neboj sa, použiješ presne tie isté vzorce, len najprv trochu pouvažuješ. Ale poďme pekne zaradom. Začnime úlohou ***a)***.

Ž: *Ako som už povedal, použijem vzorec* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$*. Za premennú a dosadím jednočlen* $2x^2$*, za premennú b jednočlen* $\frac{1}{2}xy$*. Preto môžem písať:*

$$\left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2 = \left(2x^2\right)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{1}{2}xy + \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 =$$

$$= 4x^4 + 2x^3y + \frac{1}{4}x^2y^2.$$

A s tým už asi nič viac neurobím. To už bude konečný výsledok.

U: Pokračuj s úlohou ***b)***.

Ž: *Tu ma mätú tie dve záporné znamienka.*

U: Vyber záporné znamienko pred zátvorku. Presnejšie povedané, vyber -1 pred zátvorku.

Ž: *Dobre. Teda:*

$$\left(-2x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 = -\left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2.$$

U: No, pozor, pozor. To nie je správne. V tvojom zápise sa druhá mocnina netýka znamienka mínus. No v zadaní je to ináč. Správne to musíme zapísať takto:

$$\left(-2x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 = \left[-\left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)\right]^2 = \left[(-1)\left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)\right]^2 =$$

Skús pokračovať ďalej.

Ž: *Takže:*

$$= (-1)^2 \left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2 = \left(2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2 =$$

U: Správne. Teraz si všimni, že to je vlastne zadanie úlohy a).

Ž: *Vlastne áno. Takže rovno odpíšem výsledok z úlohy a):*

$$= 4x^4 + 2x^3y + \frac{1}{4}x^2y^2.$$

U: Pokračuj úlohou ***c)***.

Ž: *Tu použijem vzorec* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. *Takže oproti úlohe a) sa to zmení len v jednom znamienku. Preto môžem písať:*

$$\left(2x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 = 4x^4 - 2x^3y + \frac{1}{4}x^2y^2.$$

U: No a ostáva nám už len úloha ***d)***.

Ž: *Aha, tu opäť môžem použiť vzorec* $(a-b)^2$. *Len prehodím členy, samozrejme aj so znamienkami. Preto:*

$$\left(-2x^2 + \frac{1}{2}xy\right)^2 = \left(\frac{1}{2}xy - 2x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2y^2 - 2x^3y + 4x^4.$$

A to je vlastne výsledok zhodný s výsledkom úlohy c). Len sú tu poprehadzované členy.

U: Dobrý postreh.

Úloha 6: *Zjednodušte:*

$$(2x^2 + 3y^3 + 5)^2 + (-2x^2 - 3y^3 - 5)^2.$$

Výsledok: $8x^4 + 24x^2y^3 + 18y^6 + 40x^2 + 60y^3 + 50$