Polynómy

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Povieme si niečo o polynómoch, resp. mnohočlenoch.

Ž: *A je medzi polynómom a mnohočlenom nejaký rozdiel?*

U: Práveže žiaden. Slovo „polynóm“ je gréckeho pôvodu a v preklade znamená „mnohočlen“. Predpona „poly“ znamená „mnoho“.

$$\boxed{\text{polynóm} = \text{mnohočlen}}$$

Ž: *Poznám aj iné také slová, napríklad polyhistor, polyetylén, ... A čo to teda ten polynóm je?*

U: Už samotný názov hovorí, že bude obsahovať mnoho členov.
Výrazy

$$P(x) = 2x + 3, \quad Q(x) = 7x^4 + 5x^3 - 6x - 1$$

sú ***mnohočleny s jednou premennou*** x.
Mnohočlenmi s viacerými premennými sú napríklad výrazy:

$$R(x, y) = 3x^2y - 2xy^3 + 6y - 8 \quad \text{alebo} \quad S(x, y, z) = xyz - y^3 + 5.$$

Ž: *A prečo to označenie $P(x)$, $Q(x)$, $R(x, y)$, $S(x, y, z)$?*

U: Niekedy je vhodné použiť toto označenie. V zátvorke zapíšeme premenné použité v danom výraze.

Ž: *Jasné. Ak som to pochopil správne, v mnohočlenoch sa môžu vyskytovať iba premenné a čísla, ktoré sú pospájané znakmi sčítania, odčítania a násobenia.*

U: Tie premenné naviac ešte môžu byť umocnené len na prirodzený exponent.

Ž: *A čo sú tie členy v mnohočlene?*

U: V mnohočlene $2x + 3$ sú členy $2x$ a 3. V polynóme $7x^4 + 5x^3 - 6x - 1$ sú štyri členy, a to $7x^4$, potom $5x^3$, tretí člen je $-6x$ a posledný je -1. V každom člene sú len operácie násobenia a mocnina premennej. No a jednotlivé členy sú pospájané operáciami sčítania.

U: Teraz si to všetko zhrnieme do definície. Podotýkam, že definovať budeme iba mnohočlen s jednou premennou. Pracovať budeme aj s mnohočlenmi s viacerými premennými, no ich definícou sa zaťažovať nebudeme.
Polynómom (mnohočlenom) n-tého stupňa s premennou x nazývame výraz tvaru

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

pričom n je prirodzené číslo, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 sú reálne čísla, $a_n \neq 0$, a nazývame ich koeficientmi. Jednotlivé sčítance nazývame členmi mnohočlenu.

Ž: *Uf, naozaj tam musí byť toľko indexov? Tie konkrétne mnohočleny boli krajšie.*

U: To je síce možné, ale zápis v definícii je všeobecný.

Ž: *Prečo je v definícii podmienka $a_n \neq 0$?*

U: Táto podmienka hovorí o tom, že koeficient pri najvyššej mocnine premennej musí byť nenulový. Keby sme tam túto podmienku nedali, tak napríklad polynóm $2x+3$ by nemusel byť iba prvého stupňa, ale aj napríklad 8. stupňa. Stačilo by ho napísať v tvare $0x^8+2x+3$.

U: Niektoré členy majú ešte svoje špeciálne názvy. Posledný člen a_0, ktorý neobsahuje premennú, resp. obsahuje $x^0 = 1$, sa nazýva ***absolútny člen***. Člen a_1x, sa volá ***lineárny člen***. Ďalej a_2x^2 je ***kvadratický člen***, lebo obsahuje x^2 a a_3x^3 voláme aj ***kubický člen*** kvôli tretej mocnine premennej x.

Ž: *A ako voláme ostatné členy?*

U: Podľa toho, akú mocninu premennej x obsahujú. Napríklad a_4x^4 je člen 4. stupňa, a_5x^5 je člen 5. stupňa, atď.

a_0 – absolútny člen,
a_1x – lineárny člen,
a_2x^2 – kvadratický člen,
a_3x^3 – kubický člen,
a_4x^4 – člen 4. stupňa,
a_5x^5 – člen 5. stupňa,
...
a_nx^n – člen n. stupňa

Ž: *Môžeme si ešte raz zopakovať, čo je to stupeň polynómu?*

U: Samozrejme. Stupeň polynómu je vlastne najvyššia mocnina premennej v polynóme. Napríklad: $2x+3$ ***je polynóm*** 1***. stupňa***, lebo najvyššia mocnina x s nenulovým koeficientom je prvá. Ďalej $7x^4+5x^3-6x-1$ ***je polynóm*** 4***. stupňa***, lebo je tam x^4 a vyššia mocnina tam už nie je.

Ž: *Uveďme si ešte jeden konkrétny príklad, aby sa mi ujasnili všetky tieto nové pojmy. Stále to mám v hlave nejaké domiešané.*

U: Fajn. Zoberme si náš známy polynóm $7x^4 + 5x^3 - 6x - 1$. Určme stupeň polynómu, jeho koeficienty a členy.

Ž: *Najvyššia mocnina x je štvrtá, preto to bude polynóm štvrtého stupňa.*

U: Pokračujme s koeficientami. Urč koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

Ž: *Takže $a_0 = -1$, $a_1 = -6$, $a_2 = \cdots$. Veď ten tu nie je?*

U: Ale je. Rovná sa nule.

Ž: *Aha. Teda $a_2 = 0$, potom $a_3 = 5$ a $a_4 = 7$.*

U: Teraz pomenuj členy daného polynómu.

Ž: *Absolútny člen je* -1. *Lineárny člen je* $-6x$, *ďalej kvadratický člen je* $0x^2$, *potom kubický člen je* $5x^3$ *a člen 4. stupňa je* $7x^4$.

U: Správne.

$$7x^4 + 5x^3 - 6x - 1 = 7x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 6x - 1$$

polynóm 4. stupňa

koeficienty: $a_0 = -1$
$a_1 = -6$
$a_2 = 0$
$a_3 = 5$
$a_4 = 7$

členy: -1, $-6x$, $5x^3$, $7x^4$

U: Ujasnime si ešte jednu vec. Aký stupeň bude mať polynóm, ktorý obsahuje iba absolútny člen, napr taký polynóm 7?

Ž: *Stupeň polynómu závisí od mocniny premennej. Tu vôbec žiadna premenná nie je. Čo s tým?*

U: Premenná tu nie je, resp. je ale v nultej mocnine: $7x^0 = 7$, lebo hocičo (okrem nuly) na nultú je vždy jedna.

Ž: *Tak potom* **mnohočlen 7 bude polynóm nultého stupňa**.

U: A ako to bude s polynómom 0?

Ž: *Obsahuje iba absolútny člen, takže to bude tiež polynóm nultého stupňa.*

U: No, nie tak rýchlo. Polynóm 0 obsahuje síce iba absolútny člen, ale ten je rovný nule, teda $a_0 = 0$. A podľa definície koeficient pri najvyššej mocnine musí byť rôzny od nuly.

Ž: *Tak jednoducho zrušme túto podmienku v definícii.*

U: To nejde. Ako sme hovorili skôr, podmienka: $a_n \neq 0$ je nevyhnutná.

Ž: *OK. Presvedčili ste ma. A čo s tým polynómom 0?*

U: Polynómu 0 nepriradíme žiaden stupeň. ***Polynóm 0 nazveme nulový mnohočlen.***

U: Teraz si povedzme, čo je to ***mnohočlen opačný k danému mnohočlenu***.

Ž: *Zrejme to bude niečo ako číslo opačné k danému číslu. Keď k číslu* -6 *je opačné číslo* 6, *tak k polynómu* $7x^4 + 5x^3 - 6x - 1$ *bude opačný polynóm*

$$-(7x^4 + 5x^3 - 6x - 1) = -7x^4 - 5x^3 + 6x + 1.$$

U: Správne. ***Mnohočlen, ktorý vznikne z daného mnohočlena zmenou znamienok všetkých jeho koeficientov, sa nazýva opačný mnohočlen k danému mnohočlenu.***

Príklad 1: *Daný výraz upravte a určte stupeň, členy a koeficienty mnohočlena, ktorý získate:*

$$(n-3)^2 - (n^2+1)^2 + 2(n+1)^2.$$

Ž: *Najprv výraz upravím:*

$$(n-3)^2 - (n^2+1)^2 + 2(n+1)^2 =$$
$$= n^2 - 6n + 9 - (n^4 + 2n^2 + 1) + 2(n^2 + 2n + 1) =$$
$$= n^2 - 6n + 9 - n^4 - 2n^2 - 1 + 2n^2 + 4n + 2 =$$
$$= n^2 - 2n + 10 - n^4$$

U: Zoraď ešte členy od najvyššej mocniny po najnižšiu.

Ž: *To iba* $-n^4$ *dám na začiatok. Polynóm potom bude vyzerať takto:*

$$-n^4 + n^2 - 2n + 10.$$

U: Teraz urč stupeň, členy a koeficienty mnohočlena.

Ž: *Najvyššia mocnina je štvrtá, preto* **polynóm $-n^4 + n^2 - 2n + 10$ je 4. stupňa, jeho členy sú: $-n^4$, n^2, $-2n$ a 10, koeficienty zapíšem takto: $a_4 = -1$, $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = -2$, $a_0 = 10$.**

U: Ešte si zopakujme, prečo koeficient $a_3 = 0$. Mocnina n^3 sa v mnohočlene vôbec nenachádza, teda ako by tam bolo $0 \cdot n^3 = 0$. A nulu do mnohočlena písať nemusíme.

Úloha 1: *Daný výraz upravte a určte stupeň, členy a koeficienty mnohočlena, ktorý získate:*

$$(x+3)^2 - (x+2)^2 + (x-1)^2.$$

Výsledok: 2. *stupeň; členy:* x^2, 6; *koeficienty:* $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 6$

Príklad 2: *Napíšte ľubovoľný*

a) štvorčlen tretieho stupňa s premennou x;

b) dvojčlen tretieho stupňa s premennou n a absolútnym členom 8;

c) trojčlen s dvoma premennými;

d) mnohočlen nultého stupňa;

e) mnohočlen šiesteho stupňa s jednou premennou y a s koeficientmi $a_6 = 2$, $a_5 = -3$, $a_4 = 0$, $a_3 = 5$, $a_2 = 0$, $a_1 = -1$, $a_0 = 6$.

Ž: *Idem na to postupne. Začnem úlohou* **a)**. *Mám zapísať štvorčlen tretieho stupňa s premennou x.*

U: Začnime stupňom. Čo to znamená polynóm 3. stupňa?

Ž: *Bude sa v ňom nachádzať x^3 a vyššia mocnina tam už nebude.*

U: Pokračujme ďalej. Čo znamená pojem „štvorčlen“?

Ž: *Už názov o tom hovorí, že polynóm má mať štyri členy. Takže* **štvorčlenom tretieho stupňa s premennou x je napríklad polynóm:**

$$5x^3 + 6x^2 - x + 78.$$

Jeho štyri členy sú: $5x^3$, $6x^2$, $-x$ a 78.

U: Správne. Pokračujeme úlohou ***b)***. Zapíš ***dvojčlen tretieho stupňa s premennou n a absolútnym členom 8***.

Ž: *To nie je ťažké. Tretí stupeň znamená, že najvyššia mocnina premennej n bude tretia. Ak to má byť dvojčlen s absolútnym členom 8, lineárny ani kvadratický člen sú nulové. Napríklad $4n^3 + 8$.*

U: Dobre. Pokračujme ***c)***. Doteraz sme používali iba jednu premennú, teraz máš napísať polynóm s dvoma premennými, napr. x a y. A má to byť trojčlen.

Ž: *Na stupni nezáleží?*

U: Nie. Môže byť hocijaký.

Ž: *Tak nech tie tri členy vyzerajú napr. takto: $4x^3y$, $-x^2$ a $5y$. Potom* **trojčlen s dvoma premennými x, y môže vyzerať napr. takto:** $4x^3y - x^2 + 5y$.

U: Fajn. Aj toto si zvládol. Možno by bolo zaujímavé určiť stupeň tvojho vymysleného polynómu. Ale nechajme to zatiaľ tak. Nasleduje úloha ***d)***. Máš zapísať mnohočlen nultého stupňa.

Ž: *To bude polynóm 0. Ako hovorí názov.*

U: No, nie tak rýchlo. Poplietol si si nulový polynóm s polynómom nultého stupňa. Tvoj polynóm 0 je nulový polynóm, lebo všetky koeficienty sú nulové. Polynóm nultého stupňa musí mať podľa definície koeficient pri x^0 rôzny od nuly.

Ž: *Aha. Takže, ak som to správne pochopil, polynóm nultého stupňa obsahuje iba absolútny člen a aj ten musí byť rôzny od nuly.*

U: Presne tak.

Ž: *Takže* **mnohočlenom nultého stupňa je napríklad polynóm 45.**

U: Ostáva nám ešte posledná časť úlohy, a to ***e)*** napísať mnohočlen šiesteho stupňa s jednou premennou y a s koeficientmi $a_6 = 2$, $a_5 = -3$, $a_4 = 0$, $a_3 = 5$, $a_2 = 0$, $a_1 = -1$, $a_0 = 6$.

Ž: *To je jednoduché. Koeficient a_6 bude stáť pri y^6, ďalej koeficient a_5 bude stáť pri y^5, a_4 bude stáť pri y^4, atď..*

U: Velmi dobre. Index koeficientu sa zhoduje s exponentom mocniny premennej.

Ž: *OK. Vyhovuje tomu polynóm* $2y^6 - 3y^5 + 0y^4 - 1y + 6 = 2y^6 - 3y^5 - y + 6$.

U: Správne. Úloha je vyriešená.

Úloha 2: *Napíšte mnohočlen 5. stupňa s jednou premennou x a s koeficientmi $a_5 = -\sqrt{3}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = -81$, $a_0 = 6$.*

Výsledok: $-\sqrt{3}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 81x + 6$

Príklad 3: *K mnohočlenu $V(n) = n^3 - n^2 + n - 1$ napíšte mnohočlen opačný a určte hodnotu obidvoch mnohočlenov pre $n = 2$ a pre $n = -2$.*

Ž: *To nebude ťažké. Opačný mnohočlen je niečo ako opačné číslo.*

U: Pozor, pozor. Čo je to opačné číslo?

Ž: *No...*

U: Poznáme iba pojem opačné číslo k danému číslu, resp. opačný mnohočlen k danému mnohočlenu.

Ž: *OK. Opačné číslo k danému číslu dostanem tak, že pred dané číslo dám znamienko mínus. Rovnaké to bude aj s opačným mnohočlenom k danému mnohočlenu. Pred pôvodný mnohočlen dám znamienko mínus.*

U: Veľmi dobre. Tak to skús urobiť.

Ž: **Opačný mnohočlen k mnohočlenu $V(n) = n^3 - n^2 + n - 1$ je polynóm**

$$-V(n) = -(n^3 - n^2 + n - 1).$$

U: Uprav to. Odstráň zátvorky.

Ž: *Všetky znamienka v zátvorke zmením na opačné. Teda dostanem:*

$$-V(n) = -(n^3 - n^2 + n - 1) = -n^3 + n^2 - n + 1.$$

U: Správne. Teraz urč hodnoty pôvodného polynómu $V(n)$, aj polynómu k nemu opačnému $-V(n)$ pre $n = 2$ a pre $n = -2$. To znamená vypočítať $V(2)$, $V(-2)$, $-V(2)$, $-V(-2)$. Nebudú sa niektoré hodnoty rovnať?

Ž: *Mali by? Neviem.*

U: Skús to teda najskôr vypočítať.

Ž: *Fajn. Takže najprv počítam hodnoty pôvodného polynómu $V(n)$ pre $n = 2$:*

$$V(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 1 = 8 - 4 + 2 - 1 = 5.$$

Teraz pre $n = -2$, teda:

$$V(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1 = -8 - 4 - 2 - 1 = -15.$$

U: Dobre. Pokračuj s počítaním hodnôt polynómu $-V(n)$.

Ž: *Najprv za n dosadím číslo 2. Teda $-V(2) = \cdots$*

U: Naozaj to musíš celé počítať?

Ž: *A prečo nie.*

U: Dobre, tak počítaj.

Ž: *Čiže do polynómu $-V(n) = -n^3 + n^2 - n + 1$ dosadím za $n = 2$:*

$$-V(2) = -2^3 + 2^2 - 2 + 1 = -8 + 4 - 2 + 1 = -4 - 2 + 1 = -6 + 1 = -5.$$

U: No teraz si všimni vzťah medzi tvojimi vypočítanými hodnotami $V(2) = 5$ a $-V(2) = -5$.

Ž: *Aha, sú to navzájom opačné čísla. To som vlastne nemusel počítať.*

U: To som sa ti snažil naznačiť.

Ž: *Tak poslednú hodnotu $-V(-2)$ skúsim určiť takto. Mám vypočítané $V(-2) = -15$. Potom $-V(-2)$* **má byť číslo opačné k číslu** *$V(-2) = -15$. Takým číslom je číslo 15. Teda $-V(-2) = +15$.*

U: Správna úvaha.

Úloha 3: *K mnohočlenu $V(n) = 2n^4 - n^2 + 2n - 5$ napíšte mnohočlen opačný a určte hodnotu obidvoch mnohočlenov pre $n = 1$ a pre $n = -1$.*

Výsledok: $-V(n) = -2n^4 + n^2 - 2n + 5$; $V(1) = -2$; $V(-1) = -6$; $-V(1) = 2$; $-V(-1) = 6$

Príklad 4: *Ktoré dvojice nasledujúcich mnohočlenov sa rovnajú a ktoré dvojice sú navzájom opačné polynómy?*

a) $P_1(x) = -x^2$, $P_2(x) = (-x)^2$;

b) $Q_1(x) = -x^3$, $Q_2(x) = (-x)^3$;

c) $T_1(x) = -(-2x)^4$, $T_2(x) = (2x)^4$;

d) $M_1(x) = -(2x)^5$, $M_2(x) = -(-2x)^5$.

U: Budeme sa snažiť upravovať polynómy tak, aby v zátvorkách neboli záporné znamienka.

Ž: *Začnem úlohou* **a)**. *Mám tu dva polynómy, ktoré sa líšia len zátvorkami:* $P_1(x) = -x^2$, $P_2(x) = (-x)^2$.

U: A načo sú tam tie zátvorky?

Ž: *Ak je niečo v zátvorkách, tak to mám vypočítať ako prvé.*

U: Správne. V polynóme $P_1(x) = -x^2$ nemáme zátvorky, teda najprv umocníme x na druhú a potom pred výsledok dáme znamienko mínus. V polynóme $P_2(x) = (-x)^2$ máme $-x$ v zátvorkách, teda celé $-x$ budeme umocňovať na druhú.

Ž: *Tak skúsim upraviť polynóm* $P_2(x)$*:* $P_2(x) = (-x)^2 = (-x)\cdot(-x) = x^2$. *Dostal som polynómy líšiace sa iba znamienkom, a to:*

$$P_1(x) = -x^2,\ P_2(x) = x^2.$$

Sú to teda **polynómy navzájom opačné**.

U: Správne. Pokračujme úlohou ***b)***. Tu máme polynómy $Q_1(x) = -x^3$, $Q_2(x) = (-x)^3$,

Ž: *Opäť chcem odstrániť znamienko mínus v zátvorkách, teda upravujem polynóm* $Q_2(x)$*:*

$$Q_2(x) = (-x)^3 = (-x)\cdot(-x)\cdot(-x) = -x^3.$$

A to je to isté ako polynóm $Q_1(x)$.

U: Áno.

Ž: *Teda* **polynómy $Q_1(x) = -x^3$ a $Q_2(x) = (-x)^3$ sa rovnajú.**

U: Nasleduje úloha ***c)***. Máme polynómy $T_1(x) = -(-2x)^4$, $T_2(x) = (2x)^4$.

Ž: *Tu budem upravovať polynóm* $T_1(x)$, *lebo tu sa nachádza v zátvorke záporné znamienko:* $T_1(x) = -(-2x)^4 = (2x)^4$, *lebo mínus a mínus nám dáva plus.*

U: Pozor, pozor. Najprv musíš umocniť $-2x$ na štvrtú a až pred výsledok mocniny dáš ďalšie znamienko mínus.

Ž: *OK. Opravím to.* $(-2x)^4 = (2x)^4$, *lebo záporné číslo umocnené na párnu mocninu je kladné. Potom*

$$T_1(x) = -(-2x)^4 = -(2x)^4.$$

U: To je už správne. Zhrň to do odpovede.

Ž: **Polynómy $T_1(x) = -(2x)^4$ a $T_2(x) = (2x)^4$ sa líšia len znamienkom, teda sú navzájom opačné.**

U: Ostáva nám posledná úloha ***d)***. Máme polynómy $M_1(x) = -(2x)^5$ a $M_2(x) = -(-2x)^5$.

Ž: *Po tých troch príkladoch to už budem mať raz, dva. Budem upravovať polynóm $M_2(x)$. Nemôžem hneď dať dohromady obe záporné znamienka. Najprv $-2x$ umocním na piatu. Záporné číslo umocnené na nepárnu mocninu je záporné, preto*

$$(-2x)^5 = (-1)^5 \cdot (2x)^5 = -(2x)^5.$$

U: Veľmi dobre. Upravuj to ďalej.

Ž: *Teda*

$$M_2(x) = -(-2x)^5 = -(-(2x)^5).$$

Tu už môžem namiesto dvoch záporných znamienok napísať znamienko plus, takže dostanem:

$$M_2(x) = (2x)^5$$

Opäť sa polynómy $M_1(x) = -(2x)^5$ a $M_2(x) = (2x)^5$ líšia iba znamienkom, teda sú navzájom opačné.

Úloha 4: *Ktoré dvojice nasledujúcich mnohočlenov sa rovnajú a ktoré dvojice sú navzájom opačné polynómy?*

a) $P_1(x) = -(-x)^4$, $P_2(x) = -x^4$;

b) $Q_1(x) = -(-x)^3$, $Q_2(x) = -x^3$.

Výsledok: *a) rovnajú sa; b) opačné*

Príklad 5: *Určte stupeň a absolútny člen mnohočlena*

$$(x - 2x^2 + 6) \cdot (2x^5 - 1) \cdot (5x^2 - 2x + 7).$$

U: Zopakujme si najprv, čo je to ***stupeň*** a čo je to ***absolútny člen*** mnohočlena.

Ž: *Zoberiem si najvyššiu mocninu premennej v polynóme a exponent tejto mocniny nám určuje stupeň daného polynómu. Absolútny člen je zase ten člen mnohočlena, ktorý neobsahuje premennú vôbec.*

U: Správne. Takže, čo s tým?

Ž: *Najprv musím daný výraz roznásobiť. Uf, to bude fuška ... trojčlen krát dvojčlen krát trojčlen ....*

U: No práve. To by znamenalo vynásobiť každý jednočlen z prvej zátvorky s každým jednočlenom z druhej zátvorky a všetky tieto výsledky vynásobiť ešte s každým jednočlenom z poslenej, tretej zátvorky. Je toho naozaj dosť. Naozaj to musíš všetko roznásobovať?

Ž: *A vari nie?*

U: Pýtame sa iba na stupeň a absolútny člen mnohočlena. Teda nás zaujímajú iba dve veci: najvyššia mocnina premennej a nultá mocnina premennej. Ako by si dostal pri roznásobovaní najvyššiu mocninu?

Ž: *Aha... Už viem.* **Z každej zátvorky zoberiem najvyššiu mocninu a všetky spolu vynásobím.** *Z prvej zátvorky zoberiem $2x^2$, z druhej $2x^5$ a z tretej $5x^2$.*

U: Úvaha je to správna, len musíme popraviť jeden dôležitý detail. Všetky jednočleny musíme zobrať aj so znamienkami pred nimi. Teda ***z prvej zátvorky zoberieme*** $-2x^2$, nie $2x^2$. ***Z druhej zátvorky vezmeme*** $2x^5$ ***a z tretej*** $5x^2$***.***

Ž: *OK. Takže už to môžem vynásobiť:*

$$-2x^2 \cdot 2x^5 \cdot 5x^2 = -20x^{2+5+2} = -20x^9.$$

Daný mnohočlen je 9. stupňa. *Ale veď to som nemusel násobiť koeficienty, stačilo len premenné.*

U: Máš pravdu, no nič sa nestalo, keď si urobil niečo naviac. Ešte ostáva určiť ***absolútny člen***. Budeme postupovať rovnako. Čo budeš teraz násobiť.

Ž: *Zrejme z každej zátvorky vezmem absolútne členy a tie medzi sebou vynásobím.*

U: Správne.

Ž: *Dobre, takže* **z prvej zátvorky vezmem číslo 6, z druhej -1 a z tretej 7**. *Po vynásobení dostanem:*

$$6 \cdot (-1) \cdot 7 = -42.$$

Absolútny člen je -42.

U: Výborne.

Úloha 5: *Určte stupeň a absolútny člen mnohočlena*

$$(y - 5y^3 + 3) \cdot (4y^6 - 2) \cdot (2y^2 + 2y - 2).$$

Výsledok: 11. *stupeň; absolútny člen:* 12

Príklad 6: *Pre ktoré číslo p má výraz $x^2 - 7x + 3$ štyrikrát menšiu hodnotu, ako je hodnota toho istého výrazu pre $2p - 3$?*

Ž: *Vôbec nechápem, čo odo mňa v tejto úlohe chcú.*

U: Tak, poďme si pomaly rozobrať zadanie, aby sme ho pochopili. Označme si výraz x^2-7x+3 ako $V(x)$. Zo zadania vyplýva, že máme porovnávať hodnoty výrazu $V(x)$ pre p a pre $2p - 3$, teda hodnoty $V(p)$ a $V(2p - 3)$. A máme nájsť také p, pre ktoré bude hodnota $V(p)$ štyrikrát menšia ako hodnota $V(2p - 3)$.

Ž: *To znie pochopiteľnejšie. Teda, ak $V(p)$ má byť štyrikrát menšia ako $V(2p - 3)$, tak $V(p)$ sa musí rovnať $\frac{V(2p-3)}{4}$.*

U: No vidíš, že to ide. Teraz zapíšme hodnoty $V(p)$ a $V(2p - 3)$.

Ž: *Dobre.*

$$V(p) = p^2 - 7p + 3.$$

A ako mám zapísať $V(2p - 3)$?

U: Vo $V(p)$ si za premennú x dosadil p. Rovnako na získanie $V(2p-3)$ za premennú x dosaď $2p - 3$.

Ž: *Znie to rozumne. Teda*

$$V(2p - 3) = (2p - 3)^2 - 7(2p - 3) + 3 =$$

$$= 4p^2 - 12p + 9 - 14p + 21 + 3 = 4p^2 - 26p + 33.$$

U: Už máš vyjadrenú hodnotu $V(p)$ a $V(2p-3)$. Dosaď to do $V(p) = \frac{V(2p-3)}{4}$, ktorý si napísal skôr.

Ž: *Aha, to je ten vzťah, ktorý hovorí, že $V(p) = p^2 - 7p + 3$ je štyrikrát menšie ako $V(2p - 3) = 4p^2 - 26p + 33$. Tak dostanem:*

$$p^2 - 7p + 3 = \frac{4p^2 - 26p + 33}{4}.$$

Riešim vlastne rovnicu. Najprv odstránim zlomok, teda celú rovnicu vynásobím číslom 4. Dostanem:

$$4(p^2 - 7p + 3) = 4p^2 - 26p + 33.$$

Roznásobím zátvorky:

$$4p^2 - 28p + 12 = 4p^2 - 26p + 33,$$

$4p^2$ je na ľavej aj pravej strane rovnice, môžem to od oboch strán odčítať a dostanem:

$$-28p + 12 = -26p + 33.$$

U: Správne. Pokračuj ďalej.

Ž: *Teda*

$$-28p + 26p = 33 - 12,$$
$$-2p = 21,$$
$$p = -\frac{21}{2} = -10{,}5.$$

U: Vyzerá to byť správne. No napriek tomu by som urobil ***skúšku***. Mohli sme sa niekde pomýliť. Hoci numericky.

Ž: *Tak, najprv vypočítam hodnotu výrazu* $V(x) = x^2 - 7x + 3$ *pre* $x = p = -10{,}5$. *Teda*

$$V(-10{,}5) = (-10{,}5)^2 - 7 \cdot (-10{,}5) + 3.$$

Nahodím to do kalkulačky a dostávam ....

$$V(-10{,}5) = 186{,}75.$$

U: Ďalej by sme chceli vypočítať $V(2p-3)$ pre $p = -10{,}5$. Preto najprv vypočítajme, čomu sa rovná $2p - 3$ pre $p = -10{,}5$. Teda

$$2p - 3 = 2 \cdot (-10,5) - 3 = -21 - 3 = -24.$$

Ž: *To mám vlastne vypočítať* $V(-24)$. *Preto do polynómu* $V(x) = x^2 - 7x + 3$ *dosadím za* x *číslo* -24. *Teda*

$$V(-24) = (-24)^2 - 7 \cdot (-24) + 3.$$

Opäť použijem kalkulačku ... a mám

$$V(-24) = 747.$$

U: Ešte porovnaj, či naozaj je $V(p) = V(-10{,}5) = 186{,}75$ štyrikrát menšie ako $V(2p-3) = V(-24) = 747$.

Ž: *Takže do kalkulačky nahodím* $747 : 4 = 186,75$. *Sedí to.*

U: Fajn. Ešte sformuluj slovnú odpoveď.

Ž: **Výraz $x^2 - 7x + 3$ má pre $p = -10,5$ štyrikrát menšiu hodnotu, ako je hodnota toho istého výrazu pre $2p - 3$, teda pre číslo -24.**

U: Správne.

Úloha 6: *Pre ktoré číslo* p *má výraz* $x^2 + x + 1$ *štyrikrát menšiu hodnotu, ako je hodnota toho istého výrazu pre* $2p$*?*

Výsledok: $p = -\frac{3}{2}$