Algebraické výrazy

RNDr. Jana Krajčiová, PhD.

U: Začneme pojmom algebraický výraz. Mnohí ľudia si myslia, že matematika je reč čísel. No rovnako je to aj reč písmen. A aké sú dôležité! Nazývame ich ***premenné*** a do matematiky ich v 16. storočí zaviedol istý pán Viète. ***Premenné obyčajne označujeme písmenami, najčastejšie x, y, ale aj p, q, r, či α, β, atď.*** Predtým sa matematici vyjadrovali slovne. Istý arabský matematik al-Chvárizma v 9. storočí sformuloval takúto úlohu: „Štvorec a desať jeho koreňov sa rovná tridsiatim deviatim dirhamom. Koľko dirhamov je koreň štvorca?“ Vedel by si toto zadanie napísať v matematickej symbolike?

Ž: *Znie to zaujímavo, no nemám poňatia.*

U: No a takto sa matematici vyjadrovali pred zavedením premennej. ***Štvorec a desať jeho koreňov sa rovná tridsiatim deviatim*** symbolicky zapíšeme ako rovnicu

$$x^2 + 10x = 39.$$

Ž: *To už vyzerá oveľa zrozumiteľnejšie.*

U: Teda pomocou premennej sme jednoduchým spôsobom vyjadrili tú, na prvé počutie neprehľadnú, informáciu.

Ž: *A prečo sa vlastne premenná volá premenná?*

U: Lebo sa tu bude niečo meniť.

Ž: *Jasné. Zmena je život. A čo sa bude meniť v tomto prípade?*

U: Budú sa meniť čísla. Napríklad v našom divadle detský lístok stojí polovicu z ceny lístka pre dospelú osobu.

Ž: *Teda keď „dospelácky“ lístok stojí* 6 *euro, tak detský je za* 3 *euro.*

U: Teraz sa pokúsme napísať cenu detského lístka všeobecne, bez ohľadu na cenu lístka pre dospelého, ktorá sa môže meniť.

Ž: *Takže tu je tá zmena.*

U: Cena lístka pre dospelého bude premenná. Označme ju napríklad x.

Ž: *A mohol by som ju označiť aj ináč? Napríklad srdiečkom alebo hviezdičkou?*

U: Pokojne, no najčastejšie používame písmená, lebo sa ľahko čítajú a zapisujú. Cenu lístka pre dospelého máme označenú ako x, potom cena detského lístka bude ...

Ž: *Áno, viem* $x : 2$.

U: ***Premenné používame vtedy, keď jediným zápisom chceme vyjadriť viaceré konkrétne čísla.***

$$\boxed{x : 2}$$

U: No a zápis $x : 2$ nazývame algebraickým výrazom.

Ž: *No ale ja si pamätám, že vo výrazoch môžu byť aj znamienka ako $+$, $-$, $\cdot$, $:$, a aj zátvorky.*

U: Delenie môžeme rovnocenne nahradiť aj zlomkovou čiarou. Dokonca tam môžu byť aj mocniny, odmocniny, ba aj logaritmy, či goniometrické funkcie sínus, kosínus, tangens, kotangens.

Ž: *Zhrňme si teda, čo to algebraický výraz je.*

U: ***Algebraickým výrazom nazývame zápis skladajúci sa z čísel a z písmen (tie označujú premenné), ktoré sú pospájané znakmi operácií, ako sú napríklad sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie, umocnenie, odmocnenie, goniometrické funkcie, logaritmy, absolútna hodnota, atď. Obsahujú prípadne aj zátvorky, ktoré určujú poradie (prioritu) vykonávania naznačených operácií. Výrazy sú napríklad zápisy:***

$$a^2+1, \quad \frac{4\sin x}{7}, \quad \sqrt{a}+2b^2, \quad \frac{x+y}{y}, \quad x^4-(-5x^3+6(x-6x^4)).$$

U: Skús vypočítať ***hodnotu výrazu*** $x : 2$ pre $x = 10$.

Ž: *To je ľahké. Ak do výrazu $x : 2$ dosadím za premennú x číslo 10, jeho hodnota bude* $10 : 2 = 5$.

U: ***Ak do algebraického výrazu dosadíme za premennú nejaké číslo, dostaneme hodnotu algebraického výrazu.***

$$\boxed{\begin{array}{c} x : 2 \\ \\ \text{pre} \quad x = 10 \quad \text{je} \quad 10 : 2 = 5 \end{array}}$$

U: Ak sa v matematike spomenie pojem algebraický výraz, väčšina si predstaví siahodlhé, úmorné úpravy. Čo myslíš, načo je to dobré?

Ž: *Nikdy som sa nad tým nezamýšľal, ja som to len do zblbnutia upravoval.*

U: Niektoré veci sa musia v matematike nadrilovať, aby si neskôr pri zložitejších veciach nemal ťažkosti so základom. Budeš sa môcť potom sústrediť na podstatu nového problému a nebudú ťa rozptyľovať taľafatky. No a dobrú znalosť štandardných úprav algebraických výrazov oceníš hlavne pri riešení rovníc, ale aj iných úloh.

$$\boxed{\text{úprava algebraických výrazov} \ \rightarrow \ \text{riešenie úloh (napr. rovníc)}}$$

Ž: *Uveďme si nejaký príklad na úpravu výrazov.*

U: Dobre, ale najprv si povedzme, čo všetko chápeme pod úpravou výrazu. ***Pri úprave výrazu najčastejšie ide o získanie výrazov v tvare súčinu, alebo o zjednodušenie výrazu. Napr. ak je výraz v tvare zlomku, tak ho chceme zjednodušiť tak, aby sa už ďalej nedal krátiť.***

Ž: *Tak, poďme už konečne na nejaký príklad.*

U: OK. Zjednodušme napr. takýto výraz:

$$\frac{x-2}{x^2-4}.$$

Ž: *Najprv menovateľa rozložím na súčin $x^2-4=(x+2)(x-2)$ a celý zlomok skrátim výrazom $x-2$. Teda*

$$\tfrac{x-2}{x^2-4}=\tfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\tfrac{1}{x+2},\ \textit{pre}\ x\neq\pm 2.$$

U: Presne tak.

Ž: *No dobre. Upravovanie výrazov sa mi zíde pri riešení rovníc. Ale načo sú dobré podmienky, ktoré pri upravovaní výrazov sústavne musím písať?*

U: ***Podmienky vymedzujú, kedy má pôvodný alebo upravený výraz zmysel.*** Napríklad pri zlomkoch nemôžeme mať v menovateli nulu, prípadne pri párnych odmocninách nesmie byť pod odmocninou záporné číslo.

Ž: *Jasné, napríklad vo výraze $\frac{4}{x}$ sa $x\neq 0$, alebo v inom výraze $\sqrt{x}$ musí byť $x\geqq 0$.*

pre	$\frac{4}{x}$	musí	$x\neq 0$
pre	$\sqrt{x}$	musí	$x\geqq 0$

U: Algebraických výrazov na upravovanie je neúrekom.

Ž: *Môžeme si tie výrazy aj nejako rozškatuľkovať?*

U: No, dá sa to. Môžeme si povedať, s akými výrazmi sa najčastejšie stretneme.

- Ak medzi čísla a premenné dáme znamienka plus, mínus, krát a mocninu, tak hovoríme o ***polynómoch***, resp. mnohočlenoch, napr. $4x^5+6x-7$.
- Ak medzi polynómy dáme zlomkovú čiaru, budeme tam niečo deliť, inými slovami lomiť, reč bude o ***racionálne lomených výrazoch***, napr. $\frac{4x^5+6x-7}{x^4-4}$.
- Ďalej môžeme upravovať ***výrazy s mocninami s racionálnym exponentom***, napr. $\frac{x^{-\frac{2}{3}}y^{-4}}{x^0\sqrt{y}}$.
- Potom tam môžeme ešte pridať ***absolútnu hodnotu***, ***goniometrické funkcie***, či ***logaritmy***.
- No a keď chceme niekoho úplne odrovnať, tak to všetko pomiešame. Napríklad taký výraz

$$\frac{\mathrm{cotg}x\sqrt{1-\cos^2 x}-\cos^3 x}{\sin x-\sin x|1-\cos^2 x|}.$$

Ž: *Ďakujem pekne.*

U: No žiaden strach. Ak sa bude všetko pridávať postupne a všetko dobre precvičíš, bez problémov zvládneš aj záverečný mix.

Ž: *Už sa teším.*

Príklad 1: *Test na prijímacích skúškach obsahuje u úloh. Pätina z nich sa hodnotí jedným bodom, t úloh je trojbodových, zvyšné úlohy sú dvojbodové. Aký maximálny počet bodov sa dá získať z testu?*

U: Takže, ako na to?

Ž: *Najprv by som si chcel ujasniť jednu vec. Chápem to správne, že maximálny počet bodov sa dá získať z testu vtedy, keď sa vyriešia všetky úlohy dobre?*

U: Presne tak. Predstavme si, že niekto bol veľmi šikovný a vyriešil celý test na 100%. Koľko bodov získal?

Ž: *Najprv by som si pomocou premenných zapísal počet jedno-, dvoj- aj trojbodových úloh.*

U: Dobre, poďme na to. Koľko bude ***jednobodových*** úloh?

Ž: *Pätina zo všetkých u úloh, teda zapíšem to ako $\frac{1}{5} \cdot u$.*

U: To sedí. Čo ďalej?

Ž: *Dvojbodové sú zvyšné, takže najprv určím počet* **trojbodových**. *Tých je zo zadania t.* **Jedno- a trojbodových** *je spolu $\frac{1}{5} \cdot u + t$.*

U: Koľko sa nám potom zvýšilo dvojbodových úloh?

Ž: *Zo všetkých u úloh odpočítam počty jedno aj trojbodových úloh a dostanem $u - \frac{1}{5} \cdot u - t$,* **čo je počet dvojbodových úloh**.

U: Skús si to ešte upraviť, aby to bolo jednoduchšie zapísané.

Ž: *Môžem odčítať $u - \frac{1}{5} \cdot u$. Celé u, čo je päť pätín u, mínus jedna pätina u sú štyri pätiny u, teda dostanem $\frac{4}{5} \cdot u - t$.*

U: Tak a teraz poďme na počet bodov, ktoré môžeme za ne získať.

Ž: *Za každú jednobodovú úlohu získam jeden bod, teda za $\frac{1}{5} \cdot u$* **jednobodových** *úloh získam $\frac{1}{5} \cdot u$* **bodov**.

U: Ako to bude s dvojbodovými úlohami?

Ž: *Za každú dvojbodovú úlohu získam dva body, teda za $\frac{4}{5} \cdot u - t$* **dvojbodových** *úloh získam $2 \cdot (\frac{4}{5} \cdot u - t)$ bodov.*

U: Ostávajú nám ***trojbodové*** úlohy.

Ž: *Tých je t, za každú získam tri body, za všetky trojbodové $3 \cdot t$* **bodov**.

U: Ostáva nám to dať dokopy. Spočítajme všetky body získané za jedno-, dvoj- aj trojbodové úlohy.

Ž: *Za jednobodové úlohy môžeme získať $\frac{1}{5} \cdot u$ bodov, za dvojbodové $2 \cdot (\frac{4}{5} \cdot u - t)$ bodov a za trojbodové $3 \cdot t$ bodov. Po spočítaní dostaneme $\frac{1}{5} \cdot u + 2 \cdot (\frac{4}{5} \cdot u - t) + 3 \cdot t$* **bodov**. *Aha, ale ten výraz s premennými u a t by sme mohli aj upraviť.*

U: Skús.

Ž: *Teda $\frac{1}{5} \cdot u + 2 \cdot (\frac{4}{5} \cdot u - t) + 3 \cdot t = \frac{1}{5} \cdot u + 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot u - 2t + 3 \cdot t = \frac{1}{5} \cdot u + \frac{8}{5} \cdot u + t = \frac{9}{5}u + t$. A máme, čo sme chceli.*

U: Záverečná odpoveď znie: ***Z testu možno získať maximálne $\frac{9}{5}u + t$ bodov.***

Úloha 1: *Test obsahuje* a *úloh. Tretina z nich sa hodnotí jedným bodom,* d *úloh je dvojbodových, zvyšné úlohy sú trojbodové. Aký maximálny počet bodov sa dá získať z testu?*

Výsledok: $\frac{7}{3}a - d$

Príklad 2: *Mestá A a B vzdialené d kilometrov ($d > 0$) spája jediná cesta. Nákladné auto vyrazilo z A o 12.00 a trasu z A do B prešlo priemernou rýchlosťou v km/h ($v > 0$). Osobné auto vyšlo z toho istého miesta o jednu hodinu neskôr a do mesta B došlo o dve hodiny skôr ako nákladné auto. Akou priemernou rýchlosťou išlo osobné auto?*

Ž: *Úloha o rýchlostiach, to nemám rád.*

U: Žiaden strach. Len treba ísť krok po kroku a poriadne si uvedomiť, o čom hovorí text.

Ž: *Skúsim to. Ešte raz si prečítam otázku: Akou priemernou rýchlosťou išlo osobné auto? Z fyziky si pamätám, že* **rýchlosť sa počíta ako dráha lomeno čas**.

U: Začal si z dobrého konca. Potrebujeme teda zistiť dráhu aj čas osobného auta.

Ž: *Obe autá išli z A do B, teda prešli rovnakú* **vzdialenosť**, *čo je d kilometrov. Dráhu teda poznám hneď zo zadania a je rovná d kilometrov.*

U: A ako to bude s časom? Skús si všimnúť vetu, ktorá hovorí, že osobné auto vyšlo z toho istého miesta o jednu hodinu neskôr a do mesta B došlo o dve hodiny skôr ako nákladné auto.

Ž: *Teda keď osobné auto vyšlo o hodinu neskôr a prišlo o dve hodiny skôr, tak išlo rýchlejšie ako nákladné auto. Cesta mu trvala o $1 + 2$, čiže o 3 hodiny kratšie, ...či dlhšie? Jasné ...kratšie.*

U: Už len vedieť čas, za ktorý prešlo danú vzdialenosť nákladné auto.

Ž: *V texte sa píše, že nákladné auto vyrazilo z A o 12.00. No neviem, kedy došlo do B. To je problém.*

U: Táto informácia je pre nás zbytočná. V podstate je tu iba na zmätenie nepriateľa. No o nákladnom aute vieme niečo iné. Vieme akú prešlo vzdialenosť, to je d kilometrov, a akou išlo rýchlosťou, čo je v km/h.

Ž: *Keďže rýchlosť je dráha lomeno čas: $v = \frac{s}{t}$, odtiaľ potrebujem vyjadriť čas.*

U: Ale skôr, než to urobíš, použi vo vzorci $v = \frac{s}{t}$ premenné zo zadania.

Ž: *Dobre, dráhu s nahradím písmenom d a rýchlosť v ostáva v. Čas v zadaní nevystupuje, tak ho ponechám označený písmenom t. Potom dostanem $v = \frac{d}{t}$.*

U: Teraz vyjadrime čas t.

Ž: *Teda $v = \frac{d}{t}$ práve vtedy keď $t = \frac{d}{v}$.*

U: Uvedomme si, že to sme vlastne počítali čas nákladného auta. ***Čas osobného auta*** je o 3 hodiny kratší.

Ž: *Zapíšeme ho preto ako $t - 3$. Vieme, že $t = \frac{d}{v}$, preto $t - 3 = \frac{d}{v} - 3$.*

U: Na vyjadrenie rýchlosti osobného auta už poznáme všetko.

Ž: *Môžeme písať:* **rýchlosť osobného auta** *je dráha d lomeno čas $\left(\frac{d}{v} - 3\right)$, teda $\frac{d}{\frac{d}{v}-3}$.*

U: Ešte to uprav, aby sme nemali zlomok v zlomku. Pripomeňme si, že zložený zlomok upravujeme ako vonkajšie krát vonkajšie lomeno vnútorné krát vnútorné.

Ž: *Teda $\frac{d}{\frac{d}{v}-3} = \frac{d}{\frac{d-3v}{v}} = \frac{\frac{d}{1}}{\frac{d-3v}{v}} = \frac{dv}{d-3v}$.*

U: A máme výsledok: ***osobné auto išlo rýchlosťou*** $\frac{dv}{d-3v}$. Ešte určme ***podmienky***.

Ž: *Zo zadania* $d > 0$, *aj* $v > 0$. *Ešte v menovateli nesmie byť nula, teda* $d \neq 3v$.

U: Správne.

Ž: *Na to, že to bola úloha o rýchlostiach, to nebolo až také ťažké. Naozaj, treba ísť len pomaly krok po kroku.*

Úloha 2: *Mestá A a B vzdialené d kilometrov (*$d > 0$*) spája jediná cesta. Nákladné auto vyrazilo z A o 10.00 a trasu z A do B prešlo priemernou rýchlosťou* v km/h *(*$v > 0$*). Osobné auto vyšlo z toho istého miesta o tri hodiny neskôr a do mesta B došlo o hodinu neskôr ako nákladné auto. Akou priemernou rýchlosťou išlo osobné auto?*

Výsledok: $\frac{dv}{d-2v}$, *pre* $d \neq 2v$

Príklad 3: *Akú hodnotu nadobúda výraz*

$$\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} : \left(1+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$$

pre $a = 6$, $b = 2$*?*

Ž: *Takže najprv si dosadím za* $a = 6$ *a za* $b = 2$*. Naďobem to do kalkulačky a . . . moment . . . dostanem* $0,25$*.*

U: Tak a teraz to skús urobiť bez kalkulačky.

Ž: *No dobre. Dosadením za* $a = 6$ *a za* $b = 2$ *dostanem číselný výraz*

$$\frac{1}{\sqrt{6}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})} : \left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) =$$

No ani $\sqrt{2}$ *ani* $\sqrt{6}$ *nie sú celé čísla, takže musím to upravovať ďalej. Najprv zátvorky. Prvú zátvorku roznásobím, v druhej spočítam jednotku so zlomkom a dostanem*

$$= \frac{1}{6-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} =$$

U: No, neviem, neviem, či to roznásobovanie bolo najmúdrejšie, ale skús, čo by si urobil ďalej.

Ž: *Teraz delíme dva zlomky. Takže znamienko* $:$ *zamením za* $\cdot$ *a v druhom zlomku zamením čitateľa a menovateľa.*

U: Správne deliť vlastne znamená násobiť prevráteným číslom, v našom prípade je to číslo v tvare zlomku.

Ž: *Potom dostanem*

$$= \frac{1}{6-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

Teraz vynásobím tieto zlomky, teda čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom:

$$= \frac{\sqrt{6}}{(6-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})} =$$

A to je koniec, už neviem, čo s tým ďalej.

U: Už sme pri tom, čo som ti vyčítal na začiatku. Pri upravovaní výrazov sa snažíme čitateľ aj menovateľa upravovať na súčin, aby sme si pripravili situáciu na prípadné krátenie zlomkov. A ty si súčin roznásoboval.

Ž: *Dobre, tak si tú prvú zátvorku v menovateli* $\left(6-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\right)$ *späť napíšem ako súčin* $\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. *Dostaneme*

$$=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=$$

Naozaj, teraz viem skrátiť zlomok $\sqrt{6}$. *Dostanem*

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=$$

U: Teraz sa pozri na menovateľa a skús použiť vzorec $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$.

Ž: *Takže dostanem*

$$=\frac{1}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

A to je už jednoduché: $(\sqrt{6})^2=6$ *a* $(\sqrt{2})^2=2$. *Potom predchádzajúci výraz sa rovná výrazu*

$$=\frac{1}{6-2}=\frac{1}{4}$$

Ale mohol som to získať po roznásobení menovateľa aj bez vášho vzorca.

U: Mohol si. Skúsme si to napísať ešte raz celé bez tvojho neúčelného roznásobovania.

Ž: *Poďme na to:*

$$\frac{1}{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}:\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{6-2}=\frac{1}{4}$$

U: Odpoveď teda znie: ***výraz***

$$\frac{1}{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}:\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$$

nadobúda pre $a=6$ ***a*** $b=2$ ***hodnotu*** $\frac{1}{4}$.
Na záver si môžeš premyslieť, ako by si zjednodušil pôvodný výraz. Nezabudni na podmienky.

Úloha 3: *Akú hodnotu nadobúda výraz*

$$\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} : \left(1-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$$

pre $a = 5$, $b = 3$*?*

Výsledok: $\frac{1}{2}$

Príklad 4:

a) Určte súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých najmenšie je $3t$*,*

b) Určte súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých najväčšie je $8n-1$*.*

c) Určte súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých prostredné je $5s-3$*.*

U: Skús najprv vyriešiť časť a). Ako budú vyzerať tri za sebou idúce prirodzené čísla, z ktorých najmenšie je $3t$?

Ž: *To by nemalo byť zložité. Každé ďalšie prirodzené číslo je o jedna väčšie od predchádzajúceho. Teda máme čísla:* $3t$, $3t+1$, $3t+2$. *Tie už iba spočítam:* $3t+(3t+1)+(3t+2)=9t+3$.

U: Teraz poď na časť b). Najprv nájdi tri za sebou idúce prirodzené čísla, z ktorých najväčšie je $8n-1$.

Ž: *Tu pôjdem do dola. Každé predchádzajúce prirodzené číslo je o jedna menšie. Keď najväčšie je* $8n-1$*, o jedna menšie je číslo* $8n-1-1$*, teda* $8n-2$ *a ešte menšie prirodzené číslo je* $8n-3$*. Keď ich spočítam, dostanem* $(8n-3)+(8n-2)+(8n-1)=24n-6$.

U: Ostáva nám ešte vyriešiť časť c). Ako budú vyzerať tri za sebou idúce prirodzené čísla, ak prostredné je $5s-3$?

Ž: *Predchádzajúce číslo bude o jedna menšie, teda* $5s-3-1$*, čo je* $5s-4$*. Nasledujúce bude zase o jedna väčšie, čiže* $5s-3+1$*, čo je* $5s-2$*. Teraz to spočítam a mám* $(5s-4)+$ $+(5s-3)+(5s-2)=15s-9$.

U: Zhrňme to do odpovede.

Ž: *Takže*

a) Súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých najmenšie je $3t$ je $9t+3$.

b) Súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých najväčšie je $8n-1$ je $24n-6$.

c) Súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých prostredné je $5s-3$ je $15s-9$.

Úloha 4:

a) Určte súčet štyroch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých najmenšie je $4t$*,*

b) Určte súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých najväčšie je $5n-2$*.*

c) Určte súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých prostredné je $7s-4$*.*

Výsledok: *a)* $16t+6$; *b)* $15n-9$; *c)* $21s-12$

Príklad 5: *Pomocou dvoch premenných a, b zapíšte*

a) druhú mocninu súčtu druhých odmocnín dvoch čísel zväčšenú o súčin obidvoch čísel,

b) trojnásobok rozdielu druhých mocnín dvoch čísel.

U: Začnime úlohou ***a)***. Zopakujme si ešte raz, čo chceme. Chceme zapísať ***druhú mocninu súčtu druhých odmocnín dvoch čísel zväčšenú o súčin obidvoch čísel***.

Ž: *Súčet druhých odmocnín dvoch čísel a, b viem zapísať jednoducho ako*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Súčin čísel a, b viem tiež zapísať ako

$$a \cdot b.$$

Ak súčet má byť zväčšený o súčin, tak dám medzi ne znamienko plus, čiže

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + a \cdot b.$$

Nakoniec urobím z toho druhú mocninu. Tak dostanem výsledok, ktorý je

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + a \cdot b\right)^2.$$

U: Mám pocit, že si sa veľmi unáhlil. Skús si ešte raz prečítať, ***čo*** má byť zväčšené o súčin čísel a, b.

Ž: *Chceme zapísať* **druhú mocninu** *súčtu druhých odmocnín dvoch čísel* **zväčšenú** *o súčin obidvoch čísel. Aha, slovíčko „zväčšenú“ sa vzťahuje na druhú mocninu. A ja som zväčšoval súčet odmocnín.*

U: Ty si zapísal druhú mocninu súčtu druhých odmocnín dvoch čísel zväčšeného o súčin obidvoch čísel. Teda slovíčko „zväčšenú“ si si zamenil za slovo „zväčšeného“.

Ž: *Dobre, pochopil som to. Takže v pôvodnej úlohe musím urobiť najprv mocninu súčtu odmocnín, teda*

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$

a to zväčšiť o súčin

$$a \cdot b.$$

Tak dostanem

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + a \cdot b.$$

U: A to je to, čo sme chceli. Ešte určme ***podmienky***.

Ž: *Premenné a a b vystupujú pod odmocninou, preto musí platiť:* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$

U: Správne. Teraz poďme zapísať pomocou výrazu zadanie ***b)***. Chceme napísať ***trojnásobok rozdielu druhých mocnín dvoch čísel***.

Ž: *Pokúsim sa vyvarovať chyby z úlohy a). Budem pozorne čítať každé jedno slovo. „Trojnásobok“ znamená, že to budeme násobiť tromi, „rozdiel“ je výsledok po odčítaní. Začnem druhými mocninami a z nich urobím rozdiel. Dostanem*

$$a^2 - b^2.$$

A teraz z toho trojnásobok, teda

$$3(a^2 - b^2).$$

U: Takže aj túto časť úlohy máme vyriešenú.

Úloha 5: *Pomocou dvoch premenných a, b zapíšte*

a) *tretiu mocninu súčinu druhých odmocnín dvoch čísel zväčšenú o súčet obidvoch čísel,*

b) *odmocnina z podielu tretích mocnín dvoch čísel.*

Výsledok: *a)* $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^3 + a + b$, *b)* $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$

Príklad 6: *Ochranári vysadili v lese s listnatých stromov a o štvrtinu menej ihličnatých stromov. V priebehu roka 20% stromov vyhynulo. Koľko stromov zasadených ochranármi prežilo?*

Ž: *Tak, najprv by som si vyjadril výrazom všetky stromy, ktoré ochranári vysadili.*

U: No, ja by som najprv začal tými ihličnatými.

Ž: *To je fakt. Viem, že ich je o štvrtinu menej ako listnatých, ktorých je s. Preto ihličnatých je $\frac{1}{4}s$.*

U: Pozor, tvoj zápis $\frac{1}{4}s$ hovorí, že ihličnatých stromov je štvrtina z počtu listnatých. No ich má byť ***o štvrtinu menej***.

Ž: *Aha, už by som to celé vyriešil zle. Ak ich má byť o štvrtinu menej ako listnatých stromov, ktorých je s, tak ich bude vlastne vysadených $s - \frac{s}{4} = \frac{3}{4}s$.* **Ihličnatých stromov je** *potom $\frac{3}{4}s$.*

U: Takže teraz môžeme zapísať počet všetkých vysadených stromov.

Ž: *To len spočítam počet listnatých, ktorých je s, s počtom ihličnatých, tých je $\frac{3}{4}s$. Dostanem $s + \frac{3}{4}s$.*

U: Ešte si to uprav.

Ž: *Celé s, čo sú štyri štvrtiny s, plus tri štvrtiny s je sedem štvrtín s. Teda* **všetkých vysadených stromov je** $\frac{7}{4}s$.

U: Teraz vieme, že 20% stromov vyhynulo. Pýtame sa, koľko ich prežilo.

Ž: *To je jasné,* **keď** 20% **vyhynulo, prežiť muselo** *to, čo ostáva do 100%, teda* 80% **zo všetkých stromov, ktorých je** $\frac{7}{4}s$*. Ach, percentá, ... čo s tým?*

U: Žiaden strach, percento nie je nič iné, ako stotina z celku. Teda 80% bude osemdesiat stotín z celku, teda z $\frac{5}{4}s$. To znamená, že celok rozdelíme na 100 častí a zoberieme 80 z nich. Matematicky to zapíšeme ako $\frac{80}{100}$ z celku, čo je vlastne súčin $\frac{80}{100}$ a celku,ktorý je v našom prípade $\frac{7}{4}s$.

Ž: *Tak to je $\frac{80}{100} \cdot \frac{7}{4}s$.*

U: Ešte to zjednoduš.

Ž: *Dobre, zlomok $\frac{80}{100}$ skrátim 20 a dostanem*

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{7}{4}s = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{4}s = \frac{7}{5}s = \frac{14}{10}s = 1{,}4s.$$

U: Sformuluj ešte slovnú odpoveď.

Ž: **Ak ochranári vysadili v lese s listnatých stromov a o štvrtinu menej ihličnatých stromov, pričom v priebehu roka 20% stromov vyhynulo, tak prežilo $1{,}4s$ stromov.**

Úloha 6: *Ochranári vysadili v lese s listnatých stromov a o tretinu viac ihličnatých stromov. V priebehu roka 25% stromov vyhynulo. Koľko stromov zasadených ochranármi prežilo?*

Výsledok: $1,75s$

Príklad 7: *V kine je r radov a v každom rade je s sedadiel. Vstupenka do prvých troch radov stojí 2 €, do ostatných radov 3 €. Koľko sa vyzbiera pri vypredanom predstavení?*

Ž: *Najprv si ujasnime, kedy je predstavenie vypredané. Zrejme je to vtedy, keď sú všetky sedadlá obsadené.*

U: Na tom sa zhodneme. Čo ďalej?

Ž: *Vieme, že vstupenka do prvých troch radov stojí 2 € a tiež vieme, že v jednom rade je s sedadiel.* **V troch radoch je** *potom* $3s$ **sedadiel** *a za tieto obsadené sedadlá* **získajú**

$$3s \cdot 2\,€ = 6s\,€.$$

U: Poďme na zvyšné rady. Tie sú už drahšie, každé sedadlo stojí 3 €. Čo s tým?

Ž: *Najprv by som zistil, koľko je tých radov. Keďže 3 z r radov je už obsadených, ostáva nám $r-3$ radov. V každom je s sedadiel. Takže* **v $r-3$ radoch je $(r-3)s$ sedadiel**. *Za každé sedadlo získajú 3 €, spolu je to $(r-3)s \cdot 3$€.*

U: Tak, ostáva nám už len spočítať peniaze získané za vypredané sedadlá v prvých troch radoch, ktorých je $6s$, s peniazmi získanými zo zvyšných radov, ktorých je $(r-3)s \cdot 3$. Celková suma v € potom bude:

$$6s + (r-3)s \cdot 3 = 6s + 3rs - 9s = 3rs - 3s = 3s(r-1).$$

Ž: **Ak je r radov a v každom rade s sedadiel, pričom vstupenka do prvých troch radov stojí 2 €, do ostatných radov 3 €, tak pri vypredanom predstavení sa vyzbiera $3s(r-1)$ €.**

Úloha 7: *V kine je v sedadiel a v každom rade je s sedadiel. Vstupenka do prvých štyroch radov stojí 2 €, do ostatných radov 3 €. Koľko sa vyzbiera pri vypredanom predstavení?*

Výsledok: $3v - 4s$ €

Príklad 8: *Podľa plánu malo budovu vymaľovať p rovnako výkonných maliarov ($p > 3$) a malo im to trvať h hodín ($h > 0$). Traja maliari však ochoreli. Koľko hodín bude trvať vymaľovanie budovy zvyšným $p - 3$ maliarom?*

Ž: *Neviem, z akého konca mám začať. Zatiaľ mi napadá toľko, že keď bude maliarov menej, tak im tá istá práca bude trvať dlhšie. No zrejme to nie je také jednoduché, že keď je maliarov o troch menej, tak im to trvá o tri hodiny dlhšie.*

U: No, to teda nie. To jedine keby ich bolo trikrát menej, tak by im to trvalo trikrát dlhšie. Ale to nie je náš prípad. Tak, poďme na to postupne. Vieme, že p ***maliarov vymaľuje budovu za*** h ***hodín***. Koľko by trvalo vymaľovanie celej budovy iba jednému maliarovi.

Ž: *No, zrejme by to robil dlhšie ako h hodín.*

U: Áno. Trvalo by mu to p-krát dlhšie.

Ž: *Aha. Takže* **jeden maliar by celú budovu vymaľoval za $p \cdot h$ hodín**.

U: Teraz máme $p-3$ maliarov. Tým bude trvať vymaľovanie celej budovy dlhšie alebo kratšie ako jednému maliarovi?

Ž: *No, čím je viac ľudí na prácu, tým ju urobia rýchlejšie. Teda malo by im to trvať kratšie, ako keby to robil iba sám.*

U: Áno. A keď ich bude $p - 3$, tak im to bude trvať $(p - 3)$-krát kratšie ako keby maľoval iba jeden maliar, ktorému by to trvalo ph hodín.

Ž: *Teda* $(p - 3)$ **maliarov vymaľuje celú budovu za $\frac{ph}{p-3}$ hodín**.

U: Správne. To platí pre $p > 3$ a $h > 0$.

Úloha 8: *Podľa plánu malo budovu vymaľovať p rovnako výkonných maliarov ($p > 3$) a malo im to trvať h hodín ($h > 0$). Dvaja maliari však v polovici práce dostali úpal a museli odísť domov. Tak prácu dokončili len zvyšní $p - 2$ maliari. Koľko hodín trvalo vymaľovanie budovy?*

Výsledok: $\frac{ph}{2(p-2)}$