Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok

Mgr. Jana Králiková

U: V tejto téme sa budeme zaoberať pojmami násobok a deliteľ v obore prirodzených čísel.

Ž: *Viem, že obor prirodzených čísel označujeme* $\mathbb{N}$.

U: Dúfam, že poznáš aj pojmy násobok a deliteľ.

Ž: *Samozrejme.* **Deliteľ** *je číslo, ktorým delím. A pojem* **násobok** *súvisí s násobením, s násobilkou.*

U: Sformulujem to presnejšie:
Ak a***,*** b ***sú prirodzené čísla, tak číslo*** a ***je násobok čísla*** b ***a číslo*** b ***je deliteľ čísla*** a ***práve vtedy, ak existuje také prirodzené číslo*** k***, že platí:***

$$a = k \cdot b.$$

Číslu a hovoríme tiež k-ty násobok čísla b.

Ž: *Jasné. Ak napríklad* $a = 20$ *a* $b = 4$*, tak číslo* 20 *je násobkom čísla* 4*, lebo* $20 = 5 \cdot 4$*. Tu je* $k = 5$*. Číslo* 20 *je piaty násobok čísla* 4*. Číslo* 4 *je deliteľ čísla* 20*.*

U: Správne. Pozri sa teraz na symbolický zápis v rámčeku.

$$\boxed{b \mid a}$$

Tento zápis sa číta „b ***delí*** a“, ale vyjadrujeme ním ľubovoľnú z nasledujúcich možností:

- ***číslo*** b ***delí číslo*** a
- ***číslo*** b ***je deliteľ čísla*** a
- ***číslo*** a ***je deliteľné číslom*** b
- ***číslo*** a ***je násobok čísla*** b

Ž: *Takže všetky štyri formulácie vyjadrujú to isté.*

U: Áno. Použitie týchto pojmov si vyskúšame na konkrétnych číslach.
Rozhodni o pravdivosti nasledujúcich výrokov:

1. ***Číslo*** 60 ***je deliteľné číslom*** 4***.***
2. ***Číslo*** 30 ***je deliteľ čísla*** 90***.***
3. ***Číslo*** 100 ***je násobok čísla*** 15***.***
4. ***Číslo*** 5 ***delí číslo*** 41***.***

Ž: *Vo všetkých prípadoch si pomôžem delením. Ak bude výsledok prirodzené číslo, výrok je pravdivý, ak výsledok bude so zvyškom, tak výrok nie je pravdivý.*

1. *Viem, že* $60 : 4 = 15$, *teda* $60 = 15 \cdot 4$. **Číslo 60 je deliteľné číslom 4.**
2. *Platí, že* $90 : 30 = 3$, *teda* $90 = 3 \cdot 30$. **Číslo 30 je deliteľ čísla 90.**
3. *Toto bude delenie so zvyškom.* $100 : 15 = 6$ *zv.*10, *takže neexistuje také číslo* $k \in \mathbb{N}$, *aby* $k \cdot 15 = 100$. **Číslo 100 nie je násobok čísla 15.**
4. *Pri delení opäť dostanem zvyšok.* $41 : 5 = 6$ *zv.*1. *Takže* **číslo 5 nedelí číslo 41.**

U: Správne.

U: Teraz bude tvojou úlohou napísať niekoľko prvých násobkov čísel 15 a 25. Množiny ich násobkov si označ n_{15} a n_{25}.

Ž: *To zvládnem:*

$$n_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, \dots\},$$

$$n_{25} = \{25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, \dots\}.$$

U: Vedel by si v týchto dvoch množinách nájsť také číslo, ktoré je násobkom aj čísla 15 aj čísla 25?

Ž: *Áno, napríklad číslo* 150.

U: Dobre. Číslo 150 je ***spoločný násobok čísel*** 15 a 25.
Každé prirodzené číslo, ktoré je násobkom prirodzeného čísla x aj prirodzeného čísla y nazývame spoločným násobkom čísel x a y.

Ž: *Okrem čísla* 150 *je spoločným násobkom čísel* 15 *a* 25 *aj číslo* 75.

U: Áno a nielen to. Množinu spoločných násobkov čísel 15 a 25 si označím $n_{15,25}$ a tvoria ju čísla:

$$n_{15,25} = \{75,\ 150,\ 225,\ 300,\ 375,\ 450, \dots\}.$$

Ž: *Je ich asi nekonečne veľa.*

U: Je. Najmenší zo spoločných násobkov dvoch čísel sa nazýva ***najmenší spoločný násobok*** týchto čísel. Označuje sa napríklad $nsn_{15,25}$ alebo $nsn(15, 25)$.

Ž: *V našom prípade je to číslo* 75*:*

$$nsn(15, 25) = 75.$$

U: Všimni si, že pomocou tohto najmenšieho spoločného násobku vieme dostať všetky ďalšie.

Ž: *Naozaj. Všetky ďalšie spoločné násobky sú násobkom toho najmenšieho. Takže stačí nájsť najmenší spoločný násobok a všetky ďalšie sú už potom hračka.*

U: Aby si našiel najmenší spoločný násobok dvoch čísel môžeš postupovať tak ako v predchádzajúcom príklade – rozpísať si množiny niekoľkých prvých násobkov oboch čísel a hľadať v nich spoločnú hodnotu. To ale môže byť pre niektoré čísla dosť zdĺhavé.

Ž: *A dá sa postupovať aj inak?*

U: Dá. K nájdeniu najmenšieho spoločného násobku môžeš využiť ***rozklad čísla na súčin prvočísel***.

Ž: **Prvočíslo** *je také číslo, ktoré má len dvoch rôznych deliteľov – jednotku a samého seba. Napríklad:* 2, 3, 5, 7, 11, ...

U: A ktoré prvočísla sú deliteľmi čísel 15 a 25?

Ž: *Číslo* 15 *je deliteľné prvočíslami* 3 *a* 5. *A číslo* 25 *je deliteľné len prvočíslom* 5.

U: Dobre. Rozklad týchto čísel na súčin prvočísel bude vyzerať takto:

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad a \qquad 25 = 5 \cdot 5.$$

Ž: *A ako mi to pomôže k získaniu najmenšieho spoločného násobka?*

U: Rozložím si aj číslo 75 na súčin prvočísel:

$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Vidíš nejakú súvislosť medzi jeho rozkladom a rozkladmi čísel 15 a 25?

Ž: *V jeho rozklade sa nachádzajú prvočísla* 3 *a* 5 *z rozkladu čísla* 15 *a nachádzajú sa tu aj dve päťky z rozkladu čísla* 25.

U: Prvočíselný rozklad najmenšieho spoločného násobku dvoch čísel obsahuje celý prvočíselný rozklad jedného z týchto čísel a z druhého čísla sú ešte pridané tie prvočísla, ktoré v prvom rozklade nie sú.

Ž: *Aha. V našom prípade je tu celý rozklad čísla* 15, *teda* $3 \cdot 5$ *a z rozkladu čísla* 25 *je pridaná ešte jedna päťka, lebo druhá päťka sa v rozklade čísla* 15 *nenachádza.*

U: Správne. Pomocou rozkladu na súčin prvočísel môžeš získať najmenší spoločný násobok nielen dvoch čísel, ale aj viacerých. Postupuje sa rovnako.

Ž: *Čiže jeden rozklad by som vzal celý a zo všetkých ďalších rozkladov by som pridával všetky tie prvočísla, ktoré ešte nemám.*

U: Áno. Najmenší spoločný násobok má obsahovať najvyššiu mocninu každého prvočísla, ktorá sa vyskytuje v niektorom z rozkladov.

Ž: *Aha, v našom príklade:*

$$15 = 3^1 \cdot 5^1 \qquad a \qquad 25 = 5^2,$$

$$\text{takže} \qquad 75 = 3^1 \cdot 5^2.$$

U: Prejdeme teraz k pojmu – deliteľ. Vypíš mi všetky delitele čísel 120 a 150. Množiny ich deliteľov si označ d_{120} a d_{150}.

Ž: *Vypíšem teda všetky čísla, ktoré bezo zvyšku delia číslo* 120 *a potom* 150*:*

$$d_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\},$$

$$d_{150} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}.$$

Dúfam, že som na nič nezabudol.

U: Aby si mal istotu, že máš všetky delitele, môžeš si ich zapisovať do takejto tabuľky:

150	
1	150
2	75
3	50
5	30
6	25
10	15

Všimni si aké čísla sú v jednotlivých riadkoch.

Ž: *Aha. V každom riadku mám zapísané čo s čím mi po vynásobení dá* 150 *a je to aj pekne usporiadané.*

U: Vedel by si teraz nájsť medzi deliteľmi čísel 120 a 150 rovnaké čísla?

Ž: *Áno, je ich dosť, napríklad:* 1, 2, 10,. . .

U: ***Každé také prirodzené číslo, ktoré je deliteľom prirodzeného čísla*** x ***aj prirodzeného čísla*** y***, nazývame spoločným delietľom čísel*** x ***a*** y***.*** Označ si množinu spoločných deliteľov $d_{120,150}$ a vypíš všetky jej prvky.

Ž: *Dobre:*

$$d_{120,150} = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}\,.$$

U: Budeme teraz určovať najmenší z týchto spoločných deliteľov?

U: Nie. Najmenší by mal byť jasný.

Ž: *Vlastne áno. Najmenším spoločným deliteľom každých dvoch čísel je číslo* 1.

U: Nás bude zaujímať ***najväčší spoločný deliteľ***. Je to najväčšie číslo zo všetkých spoločných deliteľov. Môžeme ho označiť $NSD_{120,150}$ alebo $NSD(120, 150)$.

Ž: *Tým je číslo* 30.

$$NSD(120, 150) = 30.$$

U: Vieš, že na určovanie najväčšieho spoločného deliteľa môžeme tiež využiť rozklad čísel na súčin prvočísel?

U: Zabijeme jednou ranou dve muchy?

Ž: *Tak akosi. Skús rozložiť čísla* 120, 150 *a aj číslo* 30 *na súčin prvočísel.*

Ž: $120 = 4 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3,$
$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 5 \cdot 10 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5.$

U: Je dobré, ak si tie prvočísla v súčine usporiadaš podľa veľkosti. Bude to prehľadnejšie.

Ž: *Aha, takže ešte raz:*
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$
$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$

U: A teraz sa pozrime, aké spoločné prvočíselné delitele majú naše dve čísla.

Ž: *Spoločnými prvočíselnými deliteľmi pre* 120 *a* 150 *sú čísla* 2, 3 *a* 5.

U: A ich súčin bude v tomto prípade najväčší spoločný deliteľ oboch čísel.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Ž: *Môžem rozklad na súčin prvočísel využiť aj pre určenie najväčšieho spoločného deliteľa viacerých čísel?*

U: Áno, môžeš. Najväčší spoločný deliteľ viacerých čísel je súčin všetkých takých prvočísel, ktoré sa nachádzajú v každom rozklade. Z každého takéhoto prvočísla vezmeš najvyššiu spoločnú mocninu, ktorá sa tam vyskytuje.

Ž: *Chcelo by to vysvetliť bližšie.*

U: Tak ti odporúčam pozrieť si riešené príklady. V nich budeme určovať spoločný násobok a spoločný deliteľ viacerých konkrétnych čísel. Všeobecný postup pre dve čísla si zhrnieme o chvíľu.

U: Zopakujeme si ešte raz ako sa vytvára najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ čísel x a y.

Ž: *Ako to urobíme, keď nevieme aké sú to čísla?*

U: Nech čísla x a y majú napríklad takýto rozklad na súčin prvočísel:

$$x = p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2 \cdot p_4,$$

$$y = p_1^3 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4^3 \cdot p_5,$$

kde $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ *a* p_5 sú navzájom rôzne prvočísla.

Ž: *A ja mám teraz nájsť ich najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ?*

U: Skús to.

Ž: *Tak najprv násobok. Vezmem si celý rozklad čísla x. K nemu pridám z rozkladu čísla y jedno prvočíslo p_1, lebo zatiaľ ho mám umocnené len na druhú, ale číslo y obsahuje jeho tretiu mocninu. Prvočíslo p_2 nepotrebujem a ani prvočíslo p_3. Zato však potrebujem pridať ešte p_4^2, lebo v rozklade čísla x mám len jedno prvočíslo p_4, ale v rozklade čísla y sa medzi sebou násobia až tri také prvočísla. No a na záver musím pridať prvočíslo p_5, lebo to v rozklade čísla x nie je vôbec.*

U: Výborne. Ako teda bude vyzerať najmenší spoločný násobok?

Ž: *Najmenší spoločný násobok čísel x a y je:*

$$nsn\,(x, y) = \underbrace{p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2 \cdot p_4}_{\textit{celý rozklad čísla } x} \cdot \underbrace{p_1 \cdot p_4^2 \cdot p_5}_{\textit{prvočísla doplnené z rozkladu čísla } y} = p_1^3 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2 \cdot p_4^3 \cdot p_5.$$

U: Dobre. Teraz nájdi ich najväčší spoločný deliteľ.

Ž: *To je ľahšie ako násobok. Prvočíslo p_1 bude v deliteli umocnené na druhú, lebo jeho druhá mocnina sa nachádza aj v rozklade čísla x aj v rozklade čísla y. Prvočísla p_2, p_3 a p_4 budú v deliteli umocnené na prvú, lebo to je ich najvyššia spoločná mocnina. A prvočíslo p_5 v deliteli nebude, lebo nie je v rozklade čísla x. Najväčší spoločný deliteľ čísel x a y je:*

$$NSD\,(x,y) = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4.$$

U: Pre najmenší spoločný násobok si použil červenú farbu a pre najväčšieho deliteľa modrú farbu. Zapíšem teraz ešte raz prvočíselný rozklad čísel x a y, ale s použitím farieb, ktoré si zvolil. Prvočísla, ktoré sú obsiahnuté v násobku budú červené a prvočísla, ktoré sú v deliteli budú modré:

$$\begin{aligned} x &= p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_3 \cdot p_4, \\ y &= p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_4 \cdot p_4 \cdot p_5. \end{aligned}$$

Ž: *Pekné, ale čo s tým?*

U: Vynásob čísla x a y.

Ž: *Súčin týchto čísel je:*

$$x \cdot y = (p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_3 \cdot p_4) \cdot (p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_4 \cdot p_4 \cdot p_5)\,.$$

Mám.

U: Dobre. Súčin všetkých červených prvočísel je predsa najmenším spoločným násobkom a súčin všetkých modrých prvočísel je najväčším spoločným deliteľom.

Ž: *Takže dostanem:*

$$x \cdot y = nsn\,(x,y) \cdot NSD\,(x,y).$$

U: A k tomu som chcel dôjsť. ***Súčin najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel sa rovná súčinu týchto čísel.***

Ž: *To by som mohol využiť v skúške správnosti nejakého príkladu, či mám dobre vypočítaný najmenší násobok a najväčší deliteľ.*

U: Len ti pripomeniem, že tento ***vzorec platí len pre dve čísla x a y***, pre viac čísel nemusí platiť.

U: Ako by si upravil zlomky $\dfrac{120}{150}$ a $\dfrac{7}{8}$ na základný tvar?

Ž: *Zlomok $\dfrac{7}{8}$ už v základnom tvare je. A v zlomku $\dfrac{120}{150}$ musím najprv vydeliť čitateľa aj menovateľa rovnakým číslom.*

U: Ktorým?

Ž: *Najprv desiatkou. Dostal by som $\dfrac{12}{15}$ a potom ešte trojkou. Základný tvar je $\dfrac{4}{5}$.*

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

U: Správne. Krátil si desiatkou a trojkou. Mohol si hneď na začiatku krátiť číslom 30.

Ž: *Pretože číslo* 30 *je najväčším spoločným deliteľom čísla* 120 *z čitateľa a čísla* 150 *z menovateľa, však?*

U: Áno. A vieš čo majú spoločné slová ***sú***rodenci, ***sú***hvezdie, ***sú***ostrovie, ***sú***zvuk, ***sú***držnosť, ***sú***lad, . . . ?

Ž: *Iba ak to slovíčko* **sú** *na začiatku každého slova.*

U: To som aj chcel počuť. Predpona ***sú*** v týchto slovách vyjadruje, že objekty majú niečo spoločné: súrodenci majú spoločných rodičov, súhvezdie sú hviezdy, ktoré tvoria nejaký obrazec,. . .

Ž: *Súzvuk nastáva, keď spolu ladí viacero zvukov.*

U: Výborne. Takže by si mi mohol vysvetliť aj pojem ***súdeliteľné čísla***.

Ž: *Mohli by to byť čísla, ktoré majú spoločnú deliteľnosť? To mi akosi neznie.*

U: A čo takto: súdeliteľné čísla sú čísla, ktoré majú spoločných deliteľov?

Ž: *To je už lepšie.*

U: Tak si to zadefinujeme:
Prirodzené čísla x ***a*** y ***sa nazývajú súdeliteľné práve vtedy, ak majú aspoň jedného spoločného deliteľa väčšieho ako*** 1***. Ak je ich spoločným deliteľom len číslo*** 1***, hovoríme, že čísla*** x ***a*** y ***sú nesúdeliteľné.***

Ž: *Takže čísla* 120 *a* 150 *sú súdeliteľné a čísla* 7 *a* 8 *sú nesúdeliteľné. Zlomok je v základnom tvare vtedy, ak jeho čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné čísla.*

U: ***Sú***hlasím. Porozmýšľaj teraz nad najväčším spoločným deliteľom a najmenším spoločným násobkom dvoch nesúdeliteľných čísel.

Ž: *Podľa definície majú nesúdeliteľné čísla jediného spoločného deliteľa a tým je číslo* 1*. To bude aj najväčším spoločným deliteľom.*

U: Dobre. A čo násobok?

Ž: *Ak si urobím rozklady na súčin prvočísel oboch nesúdeliteľných čísel, tak v tých rozkladoch nie je ani jedno spoločné prvočíslo. Budem teda musieť vynásobiť celý rozklad prvého čísla s celým rozkladom druhého čísla. Najmenším spoločným násobkom nesúdeliteľných čísel je teda ich súčin.*

U: Správne.

Príklad 1: *Pomocou rozkladu čísel na súčin prvočísel určte najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ čísel:*

a) 72 *a* 96,

b) 20 *a* 169.

Ž: **a)** *Mám určiť* **najmenší spoločný násobok** $nsn\,(72, 96)$ *a* **najväčší spoločný deliteľ** $NSD\,(72, 96)$. *Rozložím si teda čísla* 72 *a* 96 *na súčin* **prvočísel***:*
$72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$,
$96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 6 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

U: V oboch rozkladoch si prvočísla usporiadaj podľa veľkosti a využi aj skrátený zápis pomocou mocnín.

Ž: *Takže ešte raz:*

$$72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

$$96 = 2^5 \cdot 3.$$

U: A teraz pomocou týchto rozkladov urč najmenší spoločný násobok čísel 72 a 96.

Ž: *Uf. Už sa nepamätám ako sa to presne robí.*

U: Každé prvočíslo sa musí v najmenšom spoločnom násobku nachádzať toľkokrát, aká je jeho vyššia mocnina z oboch rozkladov. Číslo 2 je v prvom rozklade umocnené na tretiu a v druhom rozklade na piatu, v násobku bude teda na piatu. Číslo 3 je v prvom rozklade umocnené na druhú a v druhom rozklade na prvú.

Ž: *V rozklade bude teda na druhú. Dostanem:*

$$nsn\,(72, 96) = 2^5 \cdot 3^2 = 32 \cdot 9 = 288.$$

U: Robí sa to aj tak, že vezmeš jeden celý rozklad hociktorého z daných dvoch čísel a z druhého rozkladu pridáš do súčinu také prvočísla, ktoré v tom prvom rozklade nie sú, ale v druhom áno. Napríklad:

$$nsn\,(72, 96) = \underbrace{2^3 \cdot 3^2}_{\text{celý rozklad čísla 72}} \cdot \underbrace{2^2}_{\text{doplnené z rozkladu čísla 96}} = 72 \cdot 4 = 288.$$

V rozklade čísla 72 sa medzi sebou násobia tri dvojky. V čísle 96 sa ale násobí päť dvoják, takže ešte dve musíme pridať. V rozklade čísla 72 sú dve trojky, v čísle 96 je len jedna, nemusíme teda pridávať žiadnu.

Ž: *Zapamätám si to. S deliteľom nemám problém. Použijem spoločné prvočísla z oboch rozkladov. Spoločné sú tri dvojky a jedna trojka.*

U: Výborne. V najväčšom spoločnom deliteli sa bude každé prvočíslo nachádzať „na toľkú“, aká je jeho nižšia mocnina z oboch rozkladov.

Ž: *Takže:*

$$NSD\,(72, 96) = 2^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24.$$

Najmenší spoločný násobok čísel 72 a 96 je 288 a ich najväčší spoločný deliteľ je 24.

U: Pre kontrolu správnosti vypočítaj súčin čísel 72 a 96 a porovnaj ho so súčinom najmenšieho spoločného násobka a najväčšieho spoločného deliteľa.

Ž: *Ak som počítal správne, tak tieto súčiny budú rovnaké:*
Súčin čísel je:

$$72 \cdot 96 = 6912,$$

súčin násobka a deliteľa je:

$$24 \cdot 288 = 6912.$$

Príklad sme vypočítali správne.

Ž: **b)** *Čísla sú* 20 *a* 169*. Rozložím ich na súčin prvočísel:*
$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$**,**
$169 = 13 \cdot 13 = 13^2$**.**

U: Dobre. Začni násobkom.

Ž: *Takže vezmem celý rozklad čísla* 20 *a z čísla* 169 *pridám to, čo v rozklade dvadsiatky nie je. Ale to bude celý rozklad čísla* 169*.*

$$nsn\,(20, 169) = \underbrace{2^2 \cdot 5}_{\textit{celý rozklad čísla } 20} \cdot \underbrace{13^2}_{\textit{celý rozklad čísla } 169} = 20 \cdot 169 = 3380.$$

U: A teraz som ešte zvedavý na najväčší spoločný deliteľ.

Ž: *Deliteľ bude súčinom spoločných prvočísel. Ale žiadne spoločné prvočísla v rozkladoch nemám. V rozklade čísla* 20 *nie je prvočíslo* 13 *a v rozklade čísla* 169 *nie je ani dvojka ani päťka. Čísla* 20 *a* 169 *nemajú spoločné delitele, takže nemajú ani najväčší spoločný deliteľ.*

U: To nie je pravda. Čísla 20 a 169 spoločného deliteľa majú.

Ž: *Ale veď žiadne prvočíslo sa nenachádza v oboch rozkladoch.*

U: To je pravda. Keby si si rozpísal množiny ***všetkých deliteľov*** oboch čísel, ***nielen prvočíselných***, ktorým číslom by si pravdepodobne začal?

Ž: *Deliteľom* 1*.*

U: Presne tak. Číslo 1 je jediný spoločný deliteľ oboch čísel. V prvočíselnom rozklade sa ale nenachádza, pretože to nie je prvočíslo.

$$NSD\,(20, 169) = 1.$$

Ž: *Aha. Čísla* 20 *a* 169 *sú* **nesúdeliteľné***, kým čísla* 72 *a* 96 *z príkladu a) boli* **súdeliteľné***.* **Najmenší spoločný násobok čísel 20 a 169 je ich súčin 3380 a ich najväčší spoločný deliteľ je 1.**

Úloha : *Pomocou rozkladu čísel na súčin prvočísel určte najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ čísel:*

a) 44 *a* 125,

b) 56 *a* 264,

c) 88 *a* 132,

d) 276 *a* 282.

Výsledok:

a) $nsn\,(44, 125) = 5500$, $NSD\,(44, 125) = 1$,
b) $nsn\,(56, 264) = 1848$, $NSD\,(56, 264) = 8$,
c) $nsn\,(88, 132) = 264$, $NSD\,(88, 132) = 44$,
b) $nsn\,(276, 282) = 12\,972$, $NSD\,(276, 282) = 6$.

Príklad 2: *Určte najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ trojice čísel:*

a) 18, 42 *a* 63,

b) 80, 160 *a* 320.

Ž: **a)** *Mám určiť* **najmenší spoločný násobok** $nsn\,(18, 42, 63)$ *a* **najväčší spoločný deliteľ** $NSD\,(18, 42, 63)$. *Rozložím si teda všetky tri čísla na súčin* **prvočísel**.

U: Nezabudni hneď prvočísla usporiadať, aby si v nich mal lepší prehľad. Využi aj mocninový tvar.

Ž: *Vykonám.*
$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$,
$42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$,
$63 = 9 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$.

U: Rozpísal si to správne. Ako budeš pokračovať?

Ž: *Začnem násobkom. Ak chcem nájsť najmenší spoločný násobok troch čísel, tak si vezmem rozklad prvého z nich. Potom z druhého a tretieho rozkladu pridám tie prvočísla, ktoré v rozklade prvého čísla nie sú.*

U: Nemusíš si voliť len rozklad prvého čísla v poradí. Môže to byť ktorékoľvek číslo, najlepšie to, ktoré má „najdlhší" rozklad.

Ž: *Teraz je to asi jedno. Rozklady sú skoro rovnako dlhé. Vezmem predsa len ten prvý rozklad:*

$$nsn\,(18, 42, 63) = \underbrace{2 \cdot 3^2}_{\text{rozklad čísla } 18} \cdot \underbrace{7}_{\text{pridané z rozkladu čísla } 42} \cdot \underbrace{\cdots}_{\text{pridané z rozkladu čísla } 63}$$

Čo mám vlastne dodať z rozkladu čísla 63*?*

U: Číslo 63 je súčinom dvoch troják a jednej sedmičky. Pri vytváraní najmenšieho spoločného násobku už máš aj dve trojky aj jednu sedmičku. Z rozkladu čísla 63 už teda nepotrebuješ pridať nič.

Ž: *Takže ešte raz:*

$$nsn\,(18, 42, 63) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 18 \cdot 7 = 126.$$

U: Dobre. Teraz najväčší spoločný deliteľ.

Ž: *Pomôžem si tými istými rozkladmi na súčin prvočísel, len v nich budem hľadať spoločné prvočísla.*

U: Nezabudni, že hľadáš také prvočíslo, ktoré sa nachádza vo všetkých troch rozkladoch.

Ž: *Uhm. Dvojka to nebude, lebo nie je v rozklade čísla* 63*. Ani sedmička, lebo tá nedelí číslo* 18*. Trojka by to mohla byť.*

U: Len jedna?

Ž: *V rozklade čísel* 18 *a* 63 *sú síce dve trojky, ale v rozklade čísla* 42 *je len jedna. Súčin dvoch troják je* 9 *a deviatka nedelí číslo* 42*. Takže najväčším spoločným deliteľom bude číslo* 3*:*

$$NSD\,(18, 42, 63) = 3.$$

Najmenší spoločný násobok čísel 18, 42 a 63 je číslo 126, ich najväčší spoločný deliteľ je číslo 3.

U: Dobre. Poď na príklad b).

Ž: b) *Postupovať budem rovnako. Čísla* 80, 160 *a* 320 *si rozložím si na súčin prvočísel.*

U: A nevidíš nič? Pozri sa na tie čísla lepšie.

Ž: *Číslo* 160 *je dvojnásobkom čísla* 80 *a číslo* 320 *je dvojnásobkom čísla* 160.

U: Čiže štvornásobkom čísla 80. Dá sa to využiť?

Ž: *Myslím, že keďže číslo* 320 *je násobkom čísla* 160 *aj čísla* 80 *a aj samého seba, tak by mohlo byť ich najmenším spoločným násobkom.*

U: Správne. A čo najväčší spoločný deliteľ?

Ž: *Keďže všetky čísla sú deliteľné číslom* 80, *tak práve to bude ich najväčším spoločným deliteľom.*
Najmenší spoločný násobok čísel 80, 160 a 320 je číslo 320, ich najväčší spoločný deliteľ je číslo 80.

Úloha : *Určte najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ trojice čísel:*

a) 86, 129, 215,

b) 178, 356, 534,

c) 10, 20, 30,

d) 100, 101, 102.

Výsledok:
a) $nsn\,(86, 129, 215) = 1290, \quad NSD\,(86, 129, 215) = 43,$
b) $nsn\,(178, 356, 534) = 1068, \quad NSD\,(178, 356, 534) = 178,$
c) $nsn\,(10, 20, 30) = 60, \quad NSD\,(10, 20, 30) = 10,$
b) $nsn\,(100, 101, 102) = 1\,030\,200, \quad NSD\,(100, 101, 102) = 1.$

Príklad 3: *Určte, či sú čísla súdeliteľné alebo nesúdeliteľné. Ak sú súdeliteľné, určte ich najväčší spoločný deliteľ.*

a) 78 *a* 325*,*

b) 132*,* 286 *a* 385*.*

U: Aké čísla nazývame ***súdeliteľné*** a aké ***nesúdeliteľné***?

Ž: **Súdeliteľné sú také čísla, ktoré majú aspoň jeden spoločný deliteľ väčší ako 1. A ak je spoločným deliteľom čísel len číslo 1, tak sú nesúdeliteľné.**

U: Dobre. Takže otázka, či sú čísla súdeliteľné alebo nesúdeliteľné, sa zmení na otázku, či majú alebo nemajú spoločný deliteľ, ktorý je väčší ako 1.

Ž: *Môžem to zistiť pomocou rozkladu oboch čísel na súčin prvočísel.*
a) *Rozložím pekne postupne najprv čísla* 78 *a* 325*:*
$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13,$
$325 = 5 \cdot 65 = 5 \cdot 5 \cdot 13.$

U: Správne. A čo si zistil?

Ž: **Čísla 78 a 325 sú súdeliteľné, pretože ich spoločný deliteľ je číslo 13. Číslo 13 je aj ich najväčším spoločným deliteľom.**

Ž: **b)** *Teraz si rozložím na súčin prvočísel čísla* 132*,* 286 *a* 385*. Bude to fuška, sú to už väčšie čísla.*

U: Ak poznáš ***kritériá deliteľnosti*** čísel a ak poznáš ***prvočísla*** a malú násobilku, tak by to nemal byť problém.

Ž: *Veď práve. Čísla* 132 *a* 286 *sú párne, takže sú deliteľné dvojkou a číslo* 385 *končí na číslicu* 5*, takže je deliteľné päťkou. Využijem to a potom sa uvidí:*
$132 = 2 \cdot 66 = 2 \cdot 6 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11,$
$286 = 2 \cdot 143,$
$385 = 5 \cdot 77 = 5 \cdot 7 \cdot 11.$
Zdá sa, že čísla 132*,* 286 *a* 385 *sú nesúdeliteľné, lebo nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako* 1*.*

U: Všetky čísla v jednotlivých rozkladoch sú prvočísla?

Ž: *No, mám trošku problém s číslom* 143*. Nie je párne, nie je deliteľné trojkou ani deviatkou, nie je deliteľné ani päťkou. Takže asi bude prvočíslom.*

U: Preveril si teda základné kritériá deliteľnosti. Musíš ešte skúsiť deliteľnosť číslami, ktoré nemajú pekné kritériá deliteľnosti.

Ž: *Myslíte* 7*,* 11*,* 13*,...*

U: Áno. Prever ich.

Ž: *Sedmičku môžem vylúčiť, lebo keďže je sedmičkou deliteľné číslo* 140*, tak* 143 *určite nie je. Skúsim číslo deliť jedenástkou. Hops.* $143 : 11 = 13$*. Takže doplním rozklad čísla* 286*:*
$286 = 2 \cdot 143 = 2 \cdot 11 \cdot 13.$
Najväčším spoločným deliteľom danej trojice čísel je teda číslo 11.

Úloha : *Určte, či sú čísla súdeliteľné alebo nesúdeliteľné:*

a) 165, 728, *c)* 231, 459,

b) 111, 360, *d)* 132, 65.

Výsledok:

a) nesúdeliteľné, *c) súdeliteľné,*

b) súdeliteľné, *d) nesúdeliteľné.*

Príklad 4: *Určte najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok mnohočlenov:*

$$x^2 - 1 \qquad a \qquad x^3 - x^2 + x - 1.$$

U: Rovnakým spôsobom ako sa určuje spoločný deliteľ pre čísla sa môže určovať aj pre mnohočleny.

Ž: *A to mám tie mnohočleny rozložiť na súčin prvočísel?*

U: Na súčin prvočísel nie. Ale rozložiť tieto mnohočleny na súčin mnohočlenov nižšieho stupňa by si mohol vedieť.

Ž: *Ten prvý mnohočlen je jasný. Využijem vzorec* $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$.

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1).$$

U: Dobre. Druhý mnohočlen môžeš na súčin rozložiť vyberaním pred zátvorku.

Ž: *Aha. Z prvých dvoch členov môžem pred zátvorku vybrať* x^2*. Dostanem:*

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2 \cdot (x - 1) + x - 1 = \cdots$$

U: A teraz vyberieme pred zátvorku výraz $x - 1$. Takto:

$$x^2 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1).$$

Ž: *V rozkladoch oboch mnohočlenov sa nachádza výraz* $(x - 1)$*, je to ich najväčší spoločný deliteľ.*

U: Dobre. Násobok získaš tak, že si napíšeš rozklad na súčin jedného z týchto dvoch mnohočlenov a z druhého rozkladu pridáš to, čo v prvom nie je.

Ž: *Uf. Vezmem si rozklad mnohočlena* $x^3 - x^2 + x - 1$*, teda* $(x - 1) \cdot (x^2 + 1)$*. Z rozkladu mnohočlena* $x^2 - 1$ *mi tu chýba zátvorka* $(x + 1)$*. Takže ju pridám k súčinu. Dostanem* $(x - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 1)$.
Najväčším spoločným deliteľom oboch mnohočlenov je výraz $x - 1$, ich najmenším spoločným násobkom je výraz $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$.

U: Vzhľadom k tomu, že hodnota výrazu závisí od hodnoty premennej, tak musí platiť, že výraz, ktorý je spoločným deliteľom je nenulový.

Ž: *Aha. Teda* $x - 1$ *má byť nenulovým výrazom. To je vtedy, ak* $x \neq 1$*. A čo ak sa* $x = 1$*?*

U: Ak by si dosadil $x = 1$ do oboch výrazov, zistil by si, že majú nulovú hodnotu. Najväčší spoločný deliteľ sa vtedy nedá určiť.

Ž: *Lebo akékoľvek veľké prirodzené číslo by mohlo byť ich spoločným deliteľom.*

Úloha : *Určte najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok mnohočlenov:*

$$2x^2 - 4x, \qquad x^2 - 9 \qquad a \qquad x^3 + 3x^2 - 4x - 12.$$

Výsledok: *Najväčší spoločný deliteľ je 1,*
najmenší spoločný násobok je $2x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$.

Príklad 5: *Určte dve čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je* 6 *a najmenší spoločný násobok je* 72.

Ž: *Doteraz som sa stretol len s príkladmi, v ktorých boli dané dve čísla a mali sme určiť ich najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok. A teraz je to naopak.*

U: Najmenší spoločný násobok aj najväčší spoločný deliteľ dvoch čísel získaš pomocou rozkladu oboch čísel na súčin prvočísel. Využi to.

Ž: *Ako mám využiť rozklad čísel, ktoré nepoznám?*

U: Využi to, že deliteľ aj násobok sme dostali ako súčin prvočísel, ktoré sa nachádzajú v prvočíselných rozkladoch čísel, ktoré máš určiť.

Ž: *Aha. Nech čísla, ktoré hľadám sú x a y. Keďže deliteľ* 6 *sa dá rozložiť na súčin dvojky a trojky, tak prvočísla* 2 *a* 3 *sa musia nachádzať v rozkladoch oboch čísel x aj y.*

U: Správne. Z rozkladu čísla 72 získaš tiež nejaké prvočísla.

Ž: *Číslo* 72 *je súčin osmičky a deviatky, teda troch dvoják a dvoch troják. Zhrniem, čo zatiaľ máme:*

najväčší spoločný deliteľ $6 = 2 \cdot 3$
najmenší spoločný násobok $72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Teda:
$x = 2 \cdot 3 \cdot \ldots$
$y = 2 \cdot 3 \cdot \ldots$
Okrem jednej dvojky a jednej trojky, ktoré sa nachádzajú v deliteli 6*, teda aj v oboch číslach x a y, mi násobok* 72 *dodal ešte dve dvojky a jednu trojku. Nastrkám tieto čísla do rozkladov čísel x a y.*

U: Čo dáš kam?

Ž: *Premyslím si to. Tie dve dvojky musím umiestniť spolu.*

U: A prečo nie jednu k číslu x a jednu k číslu y?

Ž: *Keby som ich dal po jednej ku každému z čísel x a y, tak by to znamenalo, že ich deliteľ by bol $2 \cdot 3 \cdot 2$ a to nie je pravda. Takže tie dve dvojky musím dať spolu napríklad k číslu x. Trojku môžem dať k x alebo k y.*

U: Zdá sa, že budeš mať dve riešenia.

Ž: *Áno.* **Prvé riešenie** *dostanem tak, že dve dvojky dám do rozkladu čísla x a trojku do rozkladu čísla y:*
$x = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24,$
$y = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$
Hľadané čísla sú 24 a 18.

U: Dobre. Ako bude vyzerať druhé riešenie?

Ž: **Druhé riešenie** *dostanem tak, že aj dve dvojky aj jednu trojku dám spolu do rozkladu napríklad čísla x:*
$x = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 72,$
$y = 2 \cdot 3 = 6.$
Druhou možnou dvojicou hľadaných čísel je 72 a 6.

Úloha 1: *Určte dve čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je* 8 *a najmenší spoločný násobok je* 120*.*

Výsledok: 24 *a* 40 *alebo* 8 *a* 120*.*

Úloha 2: *Určte dve čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je* 2 *a najmenší spoločný násobok je* 180*.*

Výsledok: 18 *a* 20 *alebo* 90 *a* 4 *alebo* 36 *a* 10 *alebo* 180 *a* 2*.*

Príklad 6: *Obdĺžnikový pozemok s rozmermi* 1820 *cm a* 1330 *cm treba pokryť čo najmenším počtom rovnakých štvorcových dlaždíc. Aké rozmery majú mať dlaždice a koľko ich bude?*

Ž: *Aby dlaždičiek bolo čo najmenej, tak musia byť čo najväčšie.*

U: To je rozumná úvaha. Pokračuj.

Ž: *Štvorcové dlaždičky musia mať takú veľkú stranu, aby sa dali bezo zvyšku poukladať na dĺžku aj šírku pozemku.*

U: Ja to poviem takto: veľkosť strany dlaždičky musí bezo zvyšku deliť dĺžku aj šírku strany pozemku.

Ž: *Tak je to jasné: strana dlaždičky bude deliteľom dĺžky aj šírky pozemku. A ak má byť dlaždička čo najväčšia, tak to bude najväčší spoločný deliteľ rozmerov pozemku.*

U: Správne. Máš teda určiť najväčší spoločný deliteľ čísel 1820 a 1330. Pusť sa do toho.

Ž: *Rozložím si obe čísla na súčin prvočísel:*
$1820 = 10 \cdot 182 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 91 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13$,
$1330 = 10 \cdot 133 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$.

U: Čísla si rozložil správne. Ako z vytvorených rozkladov získaš najväčší spoločný deliteľ?

Ž: *Nájdem v oboch rozkladoch spoločné prvočísla a vynásobím ich: v oboch rozkladoch sa nachádzajú prvočísla* 2, 5 *a ešte* 7. *Najväčší spoločný deliteľ bude*

$$NSD\,(1820, 1330) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70.$$

Toto číslo je vlastne rozmer štvorcovej dlaždičky v centimetroch.

U: Dobre. Koľko takýchto dlaždičiek potrebujeme?

Ž: *Pozemok má plochu*

$$1820cm \cdot 1330cm = 2\,420\,600cm^2.$$

Dlaždička má obsah

$$70cm \cdot 70cm = 4\,900cm^2.$$

U: Ako sa teda vypočíta počet dlaždičiek, ktoré pokryjú pozemok?

Ž: *Vydelím rozlohu pozemku plochou dlaždičky:*

$$2\,420\,600 : 4\,900 = 494.$$

Na vydláždičkovanie pozemku potrebujeme 494 štvorcových dlaždičiek so stranou dlhou 70 cm.

Úloha : *Obdĺžnik so stranami* 56 *cm a* 98 *cm sa má rozdeliť priečkami rovnobežnými so stranami na najväčšie možné rovnaké štvorce. Koľko štvorcov vznikne a aké budú ich rozmery?*

Výsledok: *Vznikne* 28 *štvorcov, strana štvorca je* 14 *cm.*

Príklad 7: *Z tej istej konečnej zastávky vychádzajú ráno o* $5:10$ *autobusy štyroch liniek. Prvý bude opäť na konečnej zastávke o* 1 *hodinu, druhý o* 40 *minút, tretí o* 2 *hodiny a štvrtý o* 1 *hodinu a* 20 *minút. O ktorej hodine najskôr sa na konečnej znova všetky stretnú? Koľkokrát sa na konečnej stretnú v čase od* $5:00$ *do* $22:00$*?*

U: Skús si rozpísať, v akom čase budú autobusy jednotlivých liniek odchádzať z konečnej zastávky.

Ž: *Autobus* 1*. linky bude z konečnej vychádzať každú hodinu, teda* $5:10$, $6:10$, $7:10$, ...
Autobus 2*. linky tam bude každých* 40 *minút, v čase* $5:10$, $5:50$, $6:30$, $7:10$, $7:50$, ...
Autobus 3*. linky tam bude každé* 2 *hodiny, takže na hodinkách bude* $5:10$, $7:10$, $9:10$, ...
No a autobus 4*. linky tam bude vždy o hodinu a* 20 *minút, teda* $5:10$, $6:30$, $7:50$, ...

U: Dobre. Ak by si takto pokračoval v rozpisovaní časov, skôr či neskôr by si prišiel k času, ktorý sa vyskytne pri všetkých štyroch autobusoch. Mohlo by to ale byť časovo náročné. Poďme na to inak.

Ž: *Ale ako?*

U: Uprav si najprv doby jázd jednotlivých autobusov tak, aby si ich mal v rovnakých časových jednotkách.

Ž: *Najvýhodnejšie budú asi minúty:*
Autobus 1*. linky bude z konečnej vychádzať každých* 60 *minút,*
Autobus 2*. linky tam bude každých* 40 *minút,*
Autobus 3*. linky tam bude každých* 120 *minút*
a a autobus 4*. linky tam každých* 80 *minút.*

U: Máš určiť, koľko minút prejde, kým sa na konečnej nestretnú všetky štyri autobusy.

Ž: *Viem, že hľadám najbližší spoločný čas stretnutia všetkých štyroch autobusov. Aha, takže mám určiť najmenší spoločný násobok čísel* 60, 40, 120 *a* 80.

U: Áno. Použi rozklad jednotlivých čísel na súčin prvočísel.

Ž: *Dobre:*
$60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$,
$40 = 4 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$,
$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
$80 = 8 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5$.

U: A teraz sa pozrime na to, aké sú najvyššie mocniny jednotlivých prvočísel.

Ž: *Prvočíslo* 2 *má najvyššiu mocninu – štvrtú, vo štvrtom rozklade,*
prvočíslo 3 *má najvyššiu mocninu prvú, v prvom a treťom rozklade*
a prvočíslo 5 *má tiež najvyššiu mocninu prvú, v každom rozklade.*

U: Najmenší spoločný násobok bude teda:

$$nsn\,(60, 40, 120, 80) = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 16 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Autobusy sa budú na konečnej stretávať každých 240 ***minút.***

Ž: *Mám vypočítať o ktorej hodine to bude najskôr. Tých* 240 *minút sú* 4 *celé hodiny, takže ak prvé stretnutie bolo* $5:10$*, tak ďalšie bude o* 4 *hodiny.* **Najbližšie sa teda stretnú v čase** $9:10$**.**

U: A koľko stretnutí bude počas celého dňa až do $22:00$?

Ž: *Stretnú sa v čase* $5:10$, $9:10$, $13:10$, $17:10$ *a* $21:10$. *Teda spolu päťkrát.*
V čase od $5:00$ do $22:00$ sa autobusy stretnú na konečnej zastávke spolu päťkrát.

Úloha 1: *Tri parníky vyplávali na svoje trasy z jedného prístavu v rovnakom čase. Prvý sa vracia do prístavu každý tretí deň, druhý parník každý štvrtý deň a tretí parník každý šiesty deň. V koľký deň od spoločného vyplávania sa všetky tri parníky opäť stretnú v prístave?*

Výsledok: *Stretnú sa najskôr v* 12. *deň od spoločného vyplávania.*

Úloha 2: *Elektrotechnická firma s nepretržitou prevádzkou má* 5 *druhov prístrojov, ktorých chod sa musí pravidelne kontrolovať. Prístroj A sa kontroluje každý druhý deň, prístroj B každý tretí deň, prístroj C každý štvrtý deň, prístroj D každý piaty deň a prístroj E každý šiesty deň.* 1. *marca skontroloval kontrolór všetky prístroje. Ktoré ďalšie dni v čase od* 1. *marca do* 30. *apríla sa bude kontrolovať všetkých* 5 *prístrojov naraz? Koľko je takých dní, že sa nemusí kontrolovať ani jeden prístroj?*

Výsledok: *Všetkých* 5 *prístrojov sa bude opäť kontrolovať* 30. *apríla. Dní bez kontroly je* 16.

Príklad 8: *Ak vytvoríme dvoj, troj, štvor, päť alebo šesťčlenné skupiny žiakov, ostane vždy jeden žiak nezaradený. Koľko je žiakov, ak ich počet je trojciferné číslo menšie ako* 200*?*

U: Ako by sa zmenila úloha, keby ten jeden nezaraditeľný žiak neprišiel do školy?

Ž: *Ak by chýbal, tak zvyšný počet žiakov by som vedel rozdeliť do skupín po dvoch, troch, štyroch, piatich alebo aj šiestich žiakoch a nikto by nezvýšil.*

U: Aby si ich vedel rozdeliť do dvojíc, musí byť ich počet párny. Aby si vedel vytvoriť trojice, musí byť ich počet deliteľný číslom 3. . .

Ž: *Aha. Hľadám číslo, ktoré je deliteľné dvojkou aj trojkou aj štvorkou aj päťkou aj šestkou. Teda ich spoločný násobok. Nájdem najmenší spoločný násobok čísel* 2, 3, 4, 5 *a* 6*. Mám použiť rozklad na súčin prvočísel?*

U: Nemusíš, nie sú to veľké čísla.

Ž: *Tak ako mám postupovať?*

U: Najmenší spoločný násobok pre čísla 5 a 6 je 30. Súhlasíš?

Ž: *Áno. Sú to čísla* **nesúdeliteľné***, takže ich najmenším spoločným násobkom je ich súčin.*

U: Číslo 30 je zároveň násobkom čísla 2 aj čísla 3. Ostalo nám určiť najmenší spoločný násobok pre čísla 30 a 4.

Ž: *To bude číslo* 60*. Je to najmenší spoločný násobok čísel* 2, 3, 4, 5 *a* 6*.*

U: Hľadáme ale trojciferné číslo menšie ako 200.

Ž: *Takže by mohlo ísť o dvojnásobok a trojnásobok čísla* 60*. Teda čísla* 120 *a* 180*.*

U: Výborne. Stále riešime situáciu, keď ten jeden žiak nie je v škole. Koľko je ale žiakov, ak príde do školy?

Ž: *O jedného viac.* **Žiakov môže byť** 121 **alebo** 181**.**

Úloha 1: *Určte najmenší možný počet žiakov, ak pri ich nastúpení do dvojstupov, trojstupov, štvorstupov, päťstupov alebo šesťstupov, bude do úplného tvaru vždy jeden žiak chýbať.*

Výsledok: *Najmenší spoločný násobok čísel* 2, 3, 4, 5 *a* 6 *je* 60*. Keďže pri nastupovaní do rôznych tvarov vždy jeden chýba, tak ich je* $60 - 1 = 59$*.*

Úloha 2: *Nájdite všetky prirodzené čísla menšie ako* 400*, ktoré pri delení číslami* 2, 3, 5 *alebo* 7*, dávajú zvyšok* 2*.*

Výsledok: *Najmenší spoločný násobok čísel* 3, 5 *a* 7 *je* 105*. Hľadané číslo ale nie je deliteľné ani jedným z čísel* 3, 5 *a* 7*, ale dáva pri delení zvyšok* 2*. Úlohe vyhovujú čísla* $105+2 = 107$, $2 \cdot 105 + 2 = 212$ *a* $3 \cdot 105 + 2 = 317$*.*