Deliteľnosť v obore prirodzených čísel

Mgr. Jana Králiková

U: Čo vieš o deliteľnosti v obore prirodzených čísel?

Ž: *Poznám len pojmy* **delenie** *a* **deliteľ**. *Delenie je operácia, ktorú môžem s číslami vykonať a deliteľ je číslo, ktorým delím.*

U: Dobre. Takže asi aj vieš, že delenie môže byť so zvyškom aj bezo zvyšku.

Ž: *Jasné. Napríklad:*

$$20 : 6 = 3 \quad zv.\ 2, \qquad lebo \qquad 20 = 3 \cdot 6 + 2,$$

ale pri delení čísla 20 *číslom* 4 *zvyšok nebude.*

U: Presnejšie povedané, zvyšok pri tomto delení je nulový:

$$20 : 4 = 5 \quad zv.\ 0, \qquad lebo \qquad 20 = 5 \cdot 4 + 0.$$

Práve takémuto deleniu bezo zvyšku v obore prirodzených (ale aj celých čísel) hovoríme ***deliteľnosť v obore prirodzených*** (alebo celých) čísel.

Ž: *Deliteľnosť je teda možnosť dať sa vydeliť bezo zvyšku?*

U: Áno. S deliteľnosťou úzko súvisia pojmy ***deliteľ*** a ***násobok***. Zavedieme si ich takto: ***Ak*** a***,*** b ***sú prirodzené čísla, tak číslo*** a ***je násobkom čísla*** b ***a číslo*** b ***je deliteľom čísla*** a ***práve vtedy, ak existuje také prirodzené číslo*** k***, že platí:***

$$a = k \cdot b.$$

Číslu a hovoríme tiež k***-ty násobok čísla*** b.

Ž: *Rozumiem. Číslo* 20 *je násobkom čísla* 4 *a číslo* 4 *je deliteľom čísla* 20*, lebo existuje také číslo* k*, v našom prípade je to číslo* 5*, že platí:* $20 = 5 \cdot 4$*. Číslo* 20 *je piaty násobok čísla* 4*.*

U: Správne. Pozri sa teraz na symbolický zápis v rámčeku:

$$\boxed{b \mid a}$$

Tento zápis sa číta „b ***delí*** a“ a vyjadrujeme ním ľubovoľnú z nasledujúcich možností:

- ***číslo*** b ***delí číslo*** a
- ***číslo*** b ***je deliteľom čísla*** a
- ***číslo*** a ***je deliteľné číslom*** b
- ***číslo*** a ***je násobkom čísla*** b

Ž: *Takže všetky štyri vzťahy vyjadrujú to isté: číslo* 4 *delí číslo* 20*, číslo* 4 *je deliteľom čísla* 20*, číslo* 20 *je deliteľné číslom* 4 *a číslo* 20 *je násobkom čísla* 4*.*

U: Výborne. Rovnako by sme mohli zaviesť tieto pojmy aj pre celé čísla, v takom prípade by v definícii bolo, že a, b, k sú z množiny celých čísel.

Ž: *Rozumiem. Číslo* 20 *je násobkom aj čísla* -4*, lebo existuje také celé číslo* -5*, že platí:* $20 = (-5) \cdot (-4)$.

U: Ak neplatí vzťah $b \mid a$, hovoríme, že číslo b nie je deliteľom čísla a alebo že číslo b nedelí číslo a. Symbolický zápis je v rámčeku:

$$\boxed{b \nmid a}$$

U: Povieme si niečo o ***vlastnostiach deliteľnosti*** v množine prirodzených čísel. Ak a, b, c, m, n sú prirodzené čísla, tak platí:

- $a \mid a$.

Táto vlastnosť sa nazýva ***reflexívnosť*** deliteľnosti.

Ž: *Teda každé číslo delí samo seba. To je jasné.*

U: Takže ďalšia vlastnosť:

- ak $\quad a \mid b \quad$ potom $\quad a \leqq b$,

Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak deliteľ* a *je vždy menší alebo rovný svojmu násobku* b*.*

U: Áno. Podobná vlastnosť platí aj pre celé čísla: ak a, b sú celé čísla, tak absolútna hodnota deliteľa a je menšia alebo rovná ako absolútna hodnota jeho násobku b. Samozrejme za predpokladu, že $b \neq 0$. Uvediem ďalšiu vlastnosť:

- ak $\quad a \mid b \quad$ potom $\quad a \mid m{\cdot}b$

Ž: *Teda ak číslo* a *delí nejaké číslo* b*, tak delí aj ľubovoľný násobok čísla* b*.*

U: Táto vlastnosť platí rovnako aj pre celé čísla. V ďalšej vlastnosti sa hovorí, že ak číslo a delí oba sčítance b aj c, tak delí aj ich súčet:

- ak $\quad a \mid b \quad$ a $\quad a \mid c \quad$ potom $\quad a \mid (b + c)$.

Ž: *Z oboch sčítancov* b *aj* c *môžem vybrať pred zátvorku spoločného deliteľa* a*, takže naozaj celý súčet je áčkom deliteľný.*

U: Správne. Ak by sme uvažovali o číslach a, b, c z množiny celých čísel, tak ak číslo a delí čísla b aj c, tak delí aj ich rozdiel.

Ž: *To asi platí aj pre prirodzené čísla, ak* $a > b$*.*

U: Áno. Ďalšia vlastnosť je spojením predchádzajúcich dvoch vlastností. Ak číslo a delí čísla b aj c, tak delí nielen každý násobok jednotlivých čísel, ale aj súčet týchto násobkov:

- ak $\quad a \mid b \quad$ a $\quad a \mid c \quad$ potom $\quad a \mid (m{\cdot}b + n{\cdot}c)$.

Ž: *Rozumiem. Bude ešte niečo?*

U: Posledná vlastnosť, ktorú uvediem, sa nazýva ***tranzitívnosť deliteľnosti***. Poviem ti ju takto: ak číslo a je deliteľom čísla b a číslo b je deliteľom čísla c, tak číslo a je deliteľom nielen čísla b ale aj čísla c:

- ak $a \mid b$ a $b \mid c$ potom $a \mid c$.

Ž: *Čiže ak číslo* 10 *je deliteľom čísla* 50 *a číslo* 50 *je deliteľom čísla* 100*, tak je logické, že číslo* 10 *delí aj číslo* 100.

U: Každé prirodzené číslo n, väčšie ako 1, má dva špeciálne delitele, číslo 1 a číslo n.

$$\boxed{1 \mid n}$$

$$\boxed{n \mid n}$$

Čísla* 1 *a* n *sa nazývajú nevlastné (alebo aj samozrejmé) ***delitele čísla* n*.***

Ž: *A ak číslo n delia aj iné delitele?*

U: ***Ak existujú aj iné delitele čísla* n*, nazývajú sa vlastné*** (alebo nesamozrejmé) ***delitele.***

Ž: *Viem, že vtedy sa číslo n nazýva* **zloženým číslom***.*

U: Presne tak. Len pre zaujímavosť, v obore celých čísel sú nevlastnými deliteľmi nenulového čísla n tieto čísla: 1, -1, n, $-n$. Okrem toho v obore celých čísel platí, že ***každé nenulové celé číslo je deliteľom nuly, ale nula nie je deliteľom žiadneho celého čísla.***

Ž: *Samozrejmé delitele ľubovoľného čísla nie je problém určiť ihneď. Je to číslo* 1 *a samotné číslo. A tie ďalšie delitele môžem určiť delením.*

U: A ak by si mal určiť, či číslo 7394 je deliteľné číslom 2, zisťoval by si to delením?

Ž: *To nie. Číslo* 7394 *je párne, takže je určite číslom* 2 *deliteľné.*

U: Tak vidíš. Povieme si ako určiť niektoré delitele prirodzeného (alebo aj celého) čísla zapísaného v desiatkovej sústave, bez použitia samotného delenia. Pravidlá, ktoré to umožňujú, sa nazývajú ***kritériá*** alebo ***znaky deliteľnosti***.

Ž: *Už som na ne zvedavý.*

U: Kritériá deliteľnosti sú založené na vlastnosti deliteľnosti, ktorú sme si uviedli: ***ak sú číslom* a *deliteľné čísla* b *a* c*, potom je číslom* a *deliteľný aj ich súčet***. Táto vlastnosť sa dá rozšíriť aj na viacero sčítancov. Ukážeme si to na niečom čo poznáš.

U: ***Kritériá deliteľnosti číslami* 2*,* 5 *a* 10*:***

Ž: *Poznám len pravidlo pre deliteľnosť dvoma. Ak je číslo párne, teda končí na niektorú z číslic:* 0, 2, 4, 6 *a* 8*, je určite deliteľné číslom* 2.

U: Je to tak preto, lebo každé prirodzené (alebo aj celé) číslo vieme zapísať v rozvinutom tvare pomocou mocnín desiatky. Napríklad:

$$7394 = 7 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4 \cdot 1.$$

Prvé tri sčítance v rozvinutom tvare sú dvoma deliteľné, pretože v súčinoch $7 \cdot 1000$, $3 \cdot 100$ a $9 \cdot 10$ sú dvoma deliteľné práve mocniny desiatky. Medzi vlastnosťami deliteľnosti sme uviedli, že ***ak číslo* a *delí číslo* b*, potom* a *delí aj súčin, v ktorom jedným z činiteľov je práve to* b.**

Ž: *Jasné, prvé tri sčítance sú teda v suchu. Ale v poslednom sčítanci je nultá mocnina desiatky, teda jednotka. Tá dvoma deliteľná nie je. O tom, či číslo je deliteľné dvoma, rozhodne teda číslica na mieste jednotiek. V našom prípade je to štvorka. Tá dvoma deliteľná je, takže aj číslo* 7394 *je dvoma deliteľné.*

U: A teraz si to skúsime všeobecne. Majme päťciferné číslo $ABCDE$. Jeho rozvinutý tvar je:

$$ABCDE = A \cdot 10\,000 + B \cdot 1\,000 + C \cdot 100 + D \cdot 10 + E \cdot 1.$$

Čísla 10 000, 1 000, 100 a 10 sú deliteľné číslom 2, takže aj súčiny $A \cdot 10\,000$, $B \cdot 1\,000$, $C \cdot 100$ a $D \cdot 10$ sú číslom 2 deliteľné.

Ž: *V poslednom súčine $E \cdot 1$ jednotka nie je deliteľná dvoma. Ale ak číslica E je dvoma deliteľná, tak aj súčin $E \cdot 1$ je dvoma deliteľný a aj celý súčet $A \cdot 10\,000 + B \cdot 1\,000 + C \cdot 100 + D \cdot 10 + E \cdot 1$ je potom deliteľný dvoma. A ten súčet je vlastne rozvinutý tvar nášho päťciferného čísla $ABCDE$.*

U: Pravdepodobne ti je jasné, že nemusí ísť len o päťciferné číslo.

Ž: *Áno. Môže ísť o akékoľvek dlhé číslo. Mňa bude zaujímať len jeho posledná číslica.*

U: Správne. Ostaňme ešte chvíľu pri čísle $ABCDE$. Mocniny desiatky 10, 100, 1 000, 10 000 v jeho rozvinutom tvare sú deliteľné nielen číslom 2.

Ž: *Máte pravdu. Všetky tieto čísla sú deliteľné aj desiatimi. Alebo aj piatimi.*

U: Správne. Okrem nultej mocniny desiatky, ktorá predstavuje rád jednotiek, sú všetky vyššie mocniny desiatky násobkom päťky aj desiatky. O tom, či číslo je deliteľné piatimi alebo desiatimi, rozhodne teda opäť posledná číslica.

Ž: *Aha. Ak je posledná číslica E deliteľná piatimi, tak je aj celé číslo $ABCDE$ piatimi deliteľné.*

U: A aká číslica to teda môže byť?

Ž: *Samotná päťka.*

U: Alebo aj nula. Nula je predsa deliteľná každým nenulovým číslom. Ak je číslo zakončené na nulu alebo päťku, je piatimi deliteľné. Opäť nemusí ísť len o päťciferné číslo.

Ž: *Jasné. A pre deliteľnosť desiatimi platí asi podobné pravidlo. Okrem posledného sčítanca sú všetky predchádzajúce desiatimi deliteľné. Ľubovoľné číslo je teda deliteľné desiatimi vtedy, ak je desiatimi deliteľná číslica E. A to je len vtedy, ak $E = 0$.*

U: Dobre. Odvodili sme si kritériá pre deliteľnosť dvomi, piatimi a desiatimi:

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 2 *práve vtedy, ak je jeho posledná číslica párna.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 5 *práve vtedy, ak je jeho posledná číslica* 0 *alebo* 5*.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 10 *práve vtedy, ak je jeho posledná číslica* 0*.***

U: ***Kritériá deliteľnosti číslami 3 a 9:***

Ž: *O deliteľnosti tromi a deviatimi bude opäť rozhodovať posledná číslica?*

U: To určite nie. Vezmi si napríklad čísla 13, 16, 23, 29. Ich posledná číslica je deliteľná tromi, ale samotné čísla tromi deliteľné nie sú.

Ž: *Aha, naozaj. Tak čo mi teda pomôže zistiť deliteľnosť tromi alebo deviatimi?*

U: Ukážeme si to. Využijeme opäť rozvinutý tvar čísla $ABCDE$:

$$ABCDE = A \cdot 10\,000 + B \cdot 1\,000 + C \cdot 100 + D \cdot 10 + E \cdot 1.$$

Dajú sa jednotlivé mocniny desiatky zapísať ako súčiny, v ktorých jeden činiteľ bude trojka?

Ž: *To sa nedá, lebo všetky mocniny desiatky dávajú pri delení trojkou zvyšok* 1*:*
$10\,000 = 3 \cdot 3\,333 + 1,$
$1\,000 = 3 \cdot 333 + 1,$
$100 = 3 \cdot 33 + 1,$
$10 = 3 \cdot 3 + 1,$
$1 = 3 \cdot 0 + 1.$

U: Výborne. Po dosadení týchto zápisov do rozvinutého tvaru čísla $ABCDE$ dostaneme:

$$ABCDE = A\cdot(3\cdot 3\,333 + 1) + B\cdot(3\cdot 333 + 1) + C\cdot(3\cdot 33 + 1) + D\cdot(3\cdot 3 + 1) + E\cdot(3\cdot 0 + 1) = \cdots$$

Roznásob jednotlivé zátvorky.

Ž: *Vykonám:*

$$\cdots = A\cdot 3\cdot 3\,333 + A\cdot 1 + B\cdot 3\cdot 333 + B\cdot 1 + C\cdot 3\cdot 33 + C\cdot 1 + D\cdot 3\cdot 3 + D\cdot 1 + E\cdot 3\cdot 0 + E\cdot 1 =$$

$$= A\cdot 3\cdot 3\,333 + A + B\cdot 3\cdot 333 + B + C\cdot 3\cdot 33 + C + D\cdot 3\cdot 3 + D + E = \cdots$$

U: A teraz vyber pred zátvorku trojku zo všetkých členov, ktoré sú tromi určite deliteľné.

Ž: *To zvládnem:*

$$\cdots = 3\cdot(A\cdot 3\,333 + B\cdot 333 + C\cdot 33 + D\cdot 3) + (A + B + C + D + E)\,.$$

U: Pozrime, čo sme to vlastne dostali. Číslo $ABCDE$ sme upravili na súčet dvoch sčítancov. Prvý sčítanec má tvar

$$3\cdot(A\cdot 3\,333 + B\cdot 333 + C\cdot 33 + D\cdot 3)\,.$$

Je deliteľný tromi?

Ž: *Áno, veď je to súčin trojky a ešte čohosi.*

U: Dobre. Druhý sčítanec má tvar

$$A + B + C + D + E.$$

Ž: *To je predsa súčet číslic čísla* $ABCDE$*, teda jeho ciferný súčet.*

U: Áno. Podľa vlastnosti deliteľnosti je číslo $ABCDE$ deliteľné tromi vtedy, ak sú tromi deliteľné oba tieto sčítance.

Ž: *Ten prvý sčítanec tromi deliteľný je, to sme si už povedali. Takže deliteľnosť čísla $ABCDE$ číslom 3 bude závisieť od toho, či je číslom 3 deliteľný druhý sčítanec, teda jeho ciferný súčet.*

U: Presne tak. A to je aj kritérium deliteľnosti prirodzeného alebo aj celého čísla tromi. Pri hľadaní kritéria pre deliteľnosť deviatimi by si postupoval podobne.

Ž: *Aha. Mocniny desiatky si rozpíšem pomocou násobku deviatky a nejakého zvyšku:*
$10\,000 = 9 \cdot 1\,111 + 1,$
$1\,000 = 9 \cdot 111 + 1,$
$100 = 9 \cdot 11 + 1,$
$10 = 9 \cdot 1 + 1,$
$1 = 9 \cdot 0 + 1.$

U: Áno. Po dosadení týchto výrazov do rozvinutého tvaru vyberieš pred zátvorku deviatku a podobne ako pred chvíľou dostaneš, že číslo $ABCDE$ sa dá zapísať ako súčet dvoch sčítancov. Jeden z nich je deviatimi deliteľný, lebo je to násobok čísla 9 a ten druhý je ciferným súčtom čísla $ABCDE$.

Ž: *A číslo $ABCDE$ bude deviatimi deliteľné len vtedy, ak je deviatimi deliteľný tento ciferný súčet.*

U: Odvodenie kritérií pre deliteľnosť tromi a deviatimi sme si ukázali na päťcifernom čísle. Ale rovnako by si postupoval, aj keby šlo o viac alebo menej ciferné číslo.

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom 3 práve vtedy, ak je číslom 3 deliteľný jeho ciferný súčet.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom 9 práve vtedy, ak je číslom 9 deliteľný jeho ciferný súčet.***

U: ***Kritériá deliteľnosti číslami 4 a 8:***
Rozvinutý tvar čísla ti môže pomôcť k odvodeniu aj ďalších kritérií. Napríklad pre deliteľnosť štyrmi, ôsmimi, prípadne šestnástimi.

Ž: *Ako si tieto kritériá odvodím?*

U: Opäť si pomôžeme číslom $ABCDE$ a jeho rozvinutým tvarom:

$$ABCDE = A \cdot 10\,000 + B \cdot 1\,000 + C \cdot 100 + D \cdot 10 + E \cdot 1.$$

Všimni si, že druhá mocnina desiatky a aj všetky jej vyššie mocniny sú deliteľné štyrmi. O deliteľnosti čísla $ABCDE$ štyrmi rozhodne teda číslo $D \cdot 10 + E \cdot 1 = DE$ a to je posledné dvojčíslie čísla $ABCDE$.

Ž: *A počnúc treťou mocninou desiatky sú všetky vyššie deliteľné ôsmimi. O deliteľnosti číslom 8 teda rozhoduje číslo CDE, čo je posledné trojčíslie čísla $ABCDE$.*

U: V prípade, že by si mal veľmi dlhé číslo, mohol by si podobným spôsobom vytvoriť aj kritérium pre deliteľnosť šestnástimi. Jednotka, desiatka, stovka ani tisícka šestnástimi ešte nie sú deliteľné, až desaťtisícka a všetky vyššie mocniny desiatky. Ak je teda posledné štvorčíslie nejakého čísla deliteľné šestnástimi, tak je číslom 16 deliteľné aj celé číslo.

Ž: *To je pekné. Dvojka, štvorka, osmička, šestnástka ... to sú všetko mocniny dvojky. Dvojka je prvá mocnina, pri zisťovaní deliteľnosti dvomi potrebujem vedieť len poslednú číslicu čísla, štvorka je druhá mocnina dvojky, potrebujem dve posledné číslice. Osmička je tretia mocnina dvojky, potrebujem poznať tri posledné číslice, šestnástka je štvrtá mocnina dvojky, potrebujem posledné štvorčíslie...*

U: Správne.

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 4 *práve vtedy, ak je číslom* 4 *deliteľné jeho posledné dvojčíslie.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 8 *práve vtedy, ak je číslom* 8 *deliteľné jeho posledné trojčíslie.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 16 *práve vtedy, ak je číslom* 16 *deliteľné jeho posledné štvorčíslie.***

U: ***Kritériá deliteľnosti číslami* 7 *a* 13*:***
Pre zisťovanie deliteľnosti sedmimi a trinástimi platia rovnaké pravidlá. Nebudeme ich odvádzať, len si ich uvedieme:

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 7 *práve vtedy, ak je číslom* 7 *deliteľný rozdiel jeho posledného trojčíslia a čísla vytvoreného ostatnými číslicami.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 13 *práve vtedy, ak je číslom* 13 *deliteľný rozdiel jeho posledného trojčíslia a čísla vytvoreného ostatnými číslicami.***

Ž: *Uf. To je nejaké zamotané.*

U: Bližšie vysvetlenie týchto kritérií nájdeš v riešených úlohách.

U: ***Kritériá deliteľnosti číslami* 27 *a* 37*:***
Veľmi podobné pravidlá ako pre čísla 7 a 13 platia aj pre čísla 27 a 37. Jediný rozdiel je ten, že vytvoríš súčet a nie rozdiel posledného trojčíslia a čísla zo zvyšných číslic. Uvedieme si ich:

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 27 *práve vtedy, ak je číslom* 27 *deliteľný súčet jeho posledného trojčíslia a čísla vytvoreného ostatnými číslicami.***
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom* 37 *práve vtedy, ak je číslom* 37 *deliteľný súčet jeho posledného trojčíslia a čísla vytvoreného ostatnými číslicami.***

Ž: *Dúfam, že aj použitie týchto kritérií si predvedieme na príkladoch.*

U: Samozrejme.

U: ***Kritérium deliteľnosti číslom 11:***
Nasledujúce pravidlo si opäť nebudeme odvádzať, len si ho uvedieme:

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom 11 práve vtedy, ak je číslom 11 deliteľný rozdiel súčtu číslic na párnych pozíciách a súčtu číslic na nepárnych pozíciách.***

Ž: *A tomuto už nerozumiem vôbec.*

U: Vrátim sa k použitiu päťciferného čísla $ABCDE$. Číslica E je na prvom mieste odzadu, D je na druhom mieste odzadu, C je na treťom mieste. . . .
Číslice na párnych miestach, teda pozíciách, sú: D a B. Ich súčet je $B + D$.
Číslice na nepárnych pozíciách sú: A, C a E. Ich súčet je $A + C + E$.
Vytvoríme rozdiel týchto súčtov: $(B + D) - (A + C + E)$. Ak je tento rozdiel deliteľný jedenástkou, tak je jedenástkou deliteľné celé číslo $ABCDE$.

Ž: *Je nutné rátať tie pozície odzadu?*

U: Nie. Môžeš aj spredu. Ukážeme si to v riešených príkladoch.

Ž: *To isté kritérium sa dá ale povedať aj inak:*

- **Prirodzené číslo je deliteľné číslom 11 práve vtedy, ak je číslom 11 deliteľný súčet dvojčísiel od konca.**

Ž: *Takže v čísle $ABCDE$ sú dvojčíslia vytvárané od konca tieto: DE, BC a A. A netvorí dvojčíslie.*

U: Lebo počet číslic nášho čísla $ABCDE$ je nepárny. Ak by si si doplnil nulu na začiatok, tak A je dvojčíslie $0A$. Ak tieto tri dvojčíslia sčítaš, dostaneš číslo, ktoré ak je deliteľné jedenástimi, tak aj celé číslo $ABCDE$ je jedenástimi deliteľné.

Ž: *Mám pocit, že tých niekoľko posledných kritérií mi veľmi nepomôže. Pravdepodobne si ich ani nezapamätám. Nie je jednoduchšie vziať do ruky kalkulačku alebo hoci aj len pero a papier a vykonať delenie ručne?*

U: V mnohých prípadoch určite áno. Ale budem rád, ak budeš vedieť kritériá pre čísla 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 a možno aj pre zopár čísel, ktoré sme si ešte neuviedli.

Ž: *Ktoré čísla máte na mysli?*

U: No, ostali nám také pekné čísla ako je 6, 12, 15, 18 a ešte aj 20, 25, 50, 100, 200, 500, . . .

Ž: *A čo je na nich také pekné?*

U: Vezmeme si prvú skupinku čísel: 6, 12, 15, 18. Všetky tieto čísla sa dajú rozložiť na súčin dvoch ***nesúdeliteľných čísel***. Skús to.

Ž: *To je ľahké. Nesúdeliteľné čísla sú také, ktoré okrem jednotky nemajú iného spoločného deliteľa, takže:*

$$6 = 2 \cdot 3, \qquad 12 = 3 \cdot 4, \qquad 15 = 3 \cdot 5, \qquad 18 = 2 \cdot 9.$$

U: Dobre.

- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom*** 6 ***práve vtedy, ak je deliteľné číslami*** 2 ***a*** 3.
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom*** 12 ***práve vtedy, ak je deliteľné číslami*** 3 ***a*** 4.
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom*** 15 ***práve vtedy, ak je deliteľné číslami*** 3 ***a*** 5.
- ***Prirodzené číslo je deliteľné číslom*** 18 ***práve vtedy, ak je deliteľné číslami*** 2 ***a*** 9.

Ž: *To sa mi páči. Využijem to aj pre ďalšie čísla:*
$30 = 3 \cdot 10$, *číslo je deliteľné tridsiatimi vtedy, ak je deliteľné tromi aj desiatimi zároveň,*
$20 = 2 \cdot 10$, *číslo je deliteľné dvadsiatimi vtedy, ak je deliteľné dvomi aj desiatimi.*

U: Naozaj? Číslo 50 je deliteľné dvomi aj desiatimi, takže podľa teba je deliteľné aj dvadsiatimi.

Ž: *To teda nie. Číslo* 50 *nie je číslom* 20 *deliteľné. Tak kde je chyba?*

U: Číslo musíš rozdeliť na súčin dvoch alebo viacerých ***nesúdeliteľných čísel***.

Ž: *Aha. A aké kritériá budú platiť pre zisťovanie deliteľnosti niektorým číslom z tej druhej skupiny?*

U: Veľmi jednoduché. Stačí si uvedomiť ako vyzerajú všetky násobky jednotlivých čísel z druhej skupiny. Zaujímať nás bude to, ako sú zakončené.

Ž: *Násobky čísla* 20 *sú:* 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, ... *Všetky sú zakončené na jedno z dvojčísiel* 20, 40, 60, 80 *alebo* 00.

U: Správne. Násobky čísla 25 sú zasa zakončené na jedno z dvojčísiel: 25, 50, 75 alebo 00.

Ž: *Takže mi stačí zistiť, či číslo má vhodnú koncovku a viem rýchlo určiť, či je deliteľné niektorým z čísel:* 20, 200, 2000, 50, 500, 5000, 100, 1000... *a mnohými inými.*

U: Pri odvodzovaní kritérií deliteľnosti takýmito číslami si môžeš opäť pomôcť rozvinutým tvarom nejakého čísla ***ABCDE...***, ale to už nechám na tvoju tvorivosť.

Príklad D1: *Nech je dané ľubovoľné trojciferné číslo. Z jeho číslic vytvoríme nové číslo takto: prvú číslicu daného trojciferného čísla vynásobíme dvoma, druhú číslicu vynásobíme troma a tretiu číslicu nezmeníme. Násobky číslic sčítame.*
Dokážte, že pôvodné trojciferné číslo je deliteľné siedmimi práve vtedy, ak je siedmimi deliteľný tento súčet.

U: Ak máš pracovať s číslicami daného čísla, potom je dobré mať označenú každú číslicu zvlášť. Nech je to napríklad trojciferné číslo ABC.

Ž: *Z jeho číslic mám vytvoriť nové číslo takto:*
– prvú číslicu, teda A, vynásobím dvoma. Dostanem $2A$,
– druhú číslicu, teda B, vynásobím troma. Dostanem $3B$.
– tretiu číslicu nezmením. Ostane C.

U: Správne. Tieto čísla máš sčítať.

Ž: *Výsledný súčet je:*
$$2A + 3B + C.$$

Ž: *Máme dokázať, že naše pôvodné číslo ABC je deliteľné siedmimi práve vtedy, ak je siedmimi deliteľné číslo $2A + 3B + C$. Ako to dokážem?*

U: Zisti, či je číslo ABC násobkom čísla 7 alebo či sa dá zapísať ako súčet násobku čísla 7 a nejakého zvyšku. Pomôž si rozvinutým tvarom čísla ABC.

Ž: *Ten napísať zvládnem:*
$$ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + 1 \cdot C.$$

U: A teraz mocniny desiatky napíš ako súčet násobku sedmičky a ešte nejakého zvyšku.

Ž: *Číslo 100 sa dá napísať takto:*
$$100 = 98 + 2 = 7 \cdot 14 + 2,$$
číslo 10 napíšem takto:
$$10 = 7 + 3.$$
Stačí to?

U: Stačí. Dosadíme si tieto vyjadrenia do rozvinutého tvaru čísla ABC:
$$ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C =$$
$$= (7 \cdot 14 + 2) \cdot A + (7 + 3) \cdot B + C = \cdots$$
Roznásob teraz jednotlivé zátvorky číslicami A a B.

Ž: *Dostanem:*
$$\cdots = 7 \cdot 14 \cdot A + 2 \cdot A + 7 \cdot B + 3 \cdot B + C = \cdots$$

U: Dobre. Z dvoch sčítancov vieš vybrať sedmičku pred zátvorku. Urob to.

Ž: *Násobkami čísla 7 sú sčítance $7 \cdot 14 \cdot A$ a $7 \cdot B$, takže po vybratí čísla 7 pred zátvorku dostanem:*
$$\cdots = 7 \cdot (14 \cdot A + B) + 2A + 3B + C.$$

U: A už sme takmer hotoví. Číslo ABC sme si napísali ako súčet dvoch sčítancov. Prvý sčítanec $7 \cdot (14A + B)$ je siedmimi deliteľný, pretože je násobkom čísla 7. Druhý sčítanec je číslo $2A + 3B + C$.

Ž: *Aha, podľa vlastnosti deliteľnosti platí, že ak nejaké číslo delí dva sčítance, tak delí aj ich súčet.*

U: Presne tak. Ak je teda sčítanec 2A + 3B + C deliteľný siedmimi, tak je aj pôvodné číslo ABC siedmimi deliteľné. A ak je číslo ABC deliteľné siedmimi, tak aj tento sčítanec je siedmimi deliteľný.

Ž: *Aha, takže číslo $2A + 3B + C$ rozhodne o tom, či číslo ABC je deliteľné siedmimi. A platí to aj naopak. Číslo ABC rozhodne o tom, či je toto číslo deliteľné siedmimi. Pekný prepletenec.*

U: ***Číslo ABC je siedmimi deliteľné práve vtedy, ak je siedmimi deliteľné číslo $2A + 3B + C$.*** A tým sme tvrdenie dokázali.

Príklad D2: *Nech je dané ľubovoľné trojciferné číslo. Z jeho číslic vytvoríme nové číslo tak, že ich zapíšeme v opačnom poradí než sú v pôvodnom čísle. Dokáže, že rozdiel týchto dvoch trojciferných čísel je deliteľný deviatimi aj jedenástimi.*

U: Ak máš pracovať s číslicami daného čísla, potom je dobré mať označenú každú číslicu zvlášť. Nech je to napríklad trojciferné číslo ABC.

Ž: *Z jeho číslic mám vytvoriť nové číslo tak, že prehodím poradie číslic za opačné:* CBA.

U: Teraz máš vytvoriť ich rozdiel.

Ž: *Dostanem:*

$$ABC - CBA.$$

A teraz čo?

U: Musíš pracovať s rozvinutými tvarmi oboch čísel.

Ž: *Aha. Takže:*

$$ABC = 100A + 10B + C,$$

$$CBA = 100C + 10B + A.$$

Rozdiel vyzerá takto:

$$ABC - CBA = (100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) =$$

$$= 100A + 10B + C - 100C - 10B - A = \cdots$$

U: Zlúč jednotlivé násobky číslic A, B, C.

Ž: *Béčka sa od seba odčítajú, takže ostane:*

$$\cdots = 100A + C - 100C - A = 99A - 99C.$$

U: Je tento výsledok deliteľný deviatimi?

Ž: *Áno, pretože viem z oboch členov vybrať deviatku pred zátvorku:*

$$9 \mid 9 \cdot (11A - 11C) \qquad \textit{a teda} \qquad 9 \mid (ABC - CBA)\,.$$

U: A je výsledok, ktorý si dostal, deliteľný aj jedenástimi?

Ž: *Áno. Aj číslo* 11 *viem vybrať pred zátvorku.*

$$11 \mid 11 \cdot (9A - 9C) \qquad \textit{a teda} \qquad 11 \mid (ABC - CBA)\,.$$

Tým sme dokázali tvrdenie zo zadania príkladu.

Príklad D3: *Dokážte, že pre prirodzené čísla a, b, c platí nasledujúce tvrdenie:*
ak číslo a je deliteľom čísla b a číslo b je deliteľom čísla c, tak číslo a je deliteľom čísla c.

U: Zapíšem toto tvrdenie symbolicky:

$$\textit{pre } a, b, c \in \mathbb{N}: \quad \textit{ak} \quad a \mid b \quad \textit{a} \quad b \mid c \quad \textit{potom} \quad a \mid c.$$

Táto vlastnosť sa nazýva ***tranzitívnosť deliteľnosti***.

Ž: *A ako dokážeme jej platnosť?*

U: Pôjdeme pekne postupne. Čo to znamená, že ***číslo*** a ***delí číslo*** b?

Ž: **Číslo a je deliteľom čísla b vtedy, ak existuje také prirodzené číslo n, že platí:**

$$b = n \cdot a.$$

U: Dobre. A čo to znamená, že ***číslo*** b ***delí číslo*** c?

Ž: **Číslo b je deliteľom čísla c vtedy, ak existuje také prirodzené číslo m, že platí:**

$$c = m \cdot b.$$

U: A už sme skoro hotoví. Zapísal si, že:

$$c = m \cdot b \qquad a \qquad b = n \cdot a.$$

Dosaď teraz za premennú b výraz $n \cdot a$.

Ž: *Dostanem:*

$$c = m \cdot n \cdot a.$$

U: To ale znamená, že číslo c je násobkom čísla a a číslo a je teda deliteľom čísla c, pretože existuje také prirodzené číslo $k = m \cdot n$, že platí:

$$c = k \cdot a.$$

Ž: *Číslo k je naozaj prirodzené, lebo sme ho dostali ako súčin dvoch prirodzených čísel m a n. Takže sme dokázali, že ak číslo a delí číslo b a číslo b delí číslo c, tak číslo a delí aj toto číslo c.*

U: Presne tak.

Príklad 1: *Z číslic* 7, 3, 2 *a* 0 *vytvorte aspoň* 5 *rôznych štvorciferných čísel tak, že každú číslicu použijete práve raz. Zistite, či vzniknuté čísla sú deliteľné číslom* 3.

U: Najprv prvá časť príkladu. Vytvor z daných štyroch číslic štvorciferné číslo.

Ž: *Tak napríklad* 7320.

U: Rôznym poprehadzovaním týchto číslic dostaneš aj ďalšie štvorciferné čísla.

Ž: *Potrebujem ich aspoň päť, takže nech to budú tieto:* 7320, 7203, 3720, 3207, 2730, 2037.

U: A teraz mi povedz kritérium deliteľnosti číslom 3.

Ž: **Číslo je deliteľné tromi práve vtedy, ak je tromi deliteľný jeho ciferný súčet.** *Musím teda pre jednotlivé čísla vytvoriť ich ciferné súčty a zistiť, či sú deliteľné tromi.*

U: Ciferný súčet čísla 7320 si označ takto: $CS(7320)$.

Ž: *Dobre:*

$$CS(7320) = 7 + 3 + 2 + 0 = 12,$$

$$3 \mid 12 \qquad \Rightarrow \qquad 3 \mid 7320.$$

Číslo 12 je deliteľné tromi, takže aj číslo 7320 je tromi deliteľné.

U: Správne.

Ž: *Druhé číslo je* 7203.

$$CS(7203) = 7 + 2 + 0 + 3 = 12,$$

ciferný súčet má rovnakú hodnotu ako v predchádzajúcom čísle.

U: Veď je tvorený tými istými sčítancami.

Ž: *Naozaj. Ak zmením poradie číslic v nejakom čísle, deliteľnosť tromi mi to neovplyvní. Poradie sčítancov sa môže meniť a súčet bude ten istý, nezmení sa.*

U: Správne. Na poradí sčítancov nezáleží.

Ž: **Všetky štvorciferné čísla vytvorené z číslic 7, 3, 2 a 0 sú tromi deliteľné.**

Úloha : *Zistite, či sú tromi deliteľné čísla* 8145, 20 357, 24 900 *a* 561 108.

Výsledok:

$CS(8145) = 18$, $3 \mid 18$, *takže* $3 \mid 8145$,
$CS(20\,357) = 17$, $3 \nmid 17$, *takže* $3 \nmid 8145$,
$CS(24\,900) = 15$, $3 \mid 15$, *takže* $3 \mid 24\,900$,
$CS(561\,108) = 21$, $3 \mid 21$, *takže* $3 \mid 561\,108$.

Príklad 2: *V čísle* $128\,6*5$ *nahraďte hviezdičku takou číslicou, aby vzniknuté šesťciferné číslo bolo deliteľné*
a) dvoma,
b) tromi,
c) piatimi.
Nájdite všetky riešenia.

Ž: **a)** *Aby číslo bolo deliteľné dvoma, musí byť párne.*

U: Čo to znamená?

Ž: *Musí byť zakončené na jednu z číslic* 0, 2, 4, 6 *a* 8*. V našom prípade je ale číslo zakončené na číslicu* 5*, takže nie je párne.* **Číslo $128\,6*5$ nie je deliteľné dvoma,**

$$2 \nmid 128\,6*5.$$

Ž: **b)** *Aby číslo bolo deliteľné tromi, musí byť tromi deliteľný jeho ciferný súčet.*

U: Áno. Vypočítať môžeš len čiastočný ciferný súčet - bez číslice, ktorá by mala byť na mieste hviezdičky.

Ž: *Takže:*

$$CS(128\,6*5) = 1+2+8+6+*+5 = 22+*.$$

A teraz čo?

U: Aké najbližšie väčšie číslo než 22 je deliteľné tromi?

Ž: *Mohlo by to byť číslo* 24*, je o* 2 *väčšie než* 22*. Takže za hviezdičku môžem dať číslicu* 2*.*

U: Správne. A čo iné ciferné súčty väčšie ako 22 a deliteľné tromi?

Ž: *Ďalšou možnosťou by mohlo byť číslo* 27*. To je o* 5 *väčšie ako* 22*, takže namiesto hviezdičky môžem dosadiť číslicu* 5*. Ešte by som mohol skúsiť aj možnosť, keď ciferný súčet je* 30*, ten je o* 8 *väčší ako* 22*, za hviezdičku teda môžem dosadiť aj číslicu* 8*.*

U: Má táto úloha aj iné riešenie? Existuje ešte aj iná číslica, ktorú môžem dosadiť za hviezdičku?

Ž: *Ďalší násobok trojky je číslo* 33*, to je o* 11 *väčšie ako* 22*. Ale číslo* 11 *už za hviezdičku nemôžem dosadiť, lebo to nie je číslica. Úloha má teda len tri riešenia.* **Za hviezdičku môžem dosadiť niektorú z číslic 2, 5, 8. Vzniknuté číslo bude potom deliteľné tromi.**

$$3 \mid 128\,625, \qquad 3 \mid 128\,655, \qquad 3 \mid 128\,685.$$

U: Áno. Všimni si, že všetky vyhovujúce číslice sú od seba vždy o 3 väčšie.

Ž: **c)** *Aby číslo bolo deliteľné piatimi, musí byť zakončené na nulu alebo päťku. To splnené je. Číslo* $128\,6*5$ *má na konci päťku, takže je deliteľné piatimi.*

U: Čo teda môžeš dosadiť za hviezdičku?

Ž: *Asi hocičo.*

U: To hocičo znamená, že za hviezdičku môžeš dosadiť ľubovoľnú z číslic 0 až 9.

Ž: *Úloha má teda* 10 *riešení.* **Za hviezdičku môžem dosadiť ľubovoľnú číslicu, vzniknuté číslo bude vždy deliteľné piatimi.**

$$5 \mid 128\,605, \qquad 5 \mid 128\,615, \qquad \dots \qquad 5 \mid 128\,695.$$

Úloha : *V čísle* $532\,61*$ *nahraďte hviezdičku takou číslicou, aby vzniknuté šesťciferné číslo bolo deliteľné*
a) dvoma,
b) tromi,
c) štyrmi,
d) piatimi.
Nájdite všetky riešenia.

Výsledok:
a) posledná číslica musí byť párna, za hviezdičku sa môže dosadiť niektorá z číslic 0, 2, 4, 6, 8.
b) ciferný účet je $17 + *$, *za hviezdičku sa môže dosadiť niektorá z číslic* 1, 4, 7.
c) posledné dvojčíslie musí byť deliteľné štyrmi, za hviezdičku sa môže dosadiť číslica 2 *alebo* 6.
d) posledná číslica musí byť 0 *alebo* 5.

Príklad 3: *V čísle* $128\,6*5$ *nahraďte hviezdičku takou číslicou, aby vzniknuté šesťciferné číslo bolo deliteľné jedenástimi.*

U: Spomenieš si na kritérium pre deliteľnosť jedenástimi?

Ž: *Spočítajú sa číslice na párnych pozíciách, potom číslice na nepárnych pozíciách a tieto súčty sa od seba odčítajú.*

U: Výborne. Tak to skús urobiť.

Ž: *V čísle* $128\,6*5$ *sú nepárne pozície prvá, tretia a piata. Počítam odpredu. Označil som ich červenou farbou. Párne pozície – druhá, štvrtá a šiesta som označil modrou farbou.*

U: Vytvor teda súčet modrých a súčet červených číslic.

Ž: **Súčet modrých číslic – z párnych pozícií je:** $2+6+5=13.$
Súčet červených číslic – z nepárnych pozícií je: $1+8+*=9+*.$

U: A teraz tie súčty od seba odčítaj.

Ž: *Dobre:*

$$13-(9+*)=4-*.$$

A teraz čo?

U: Číslo $1286*5$ je jedenástimi deliteľné práve vtedy, ak je jedenástimi deliteľný tento výsledok.

Ž: *Čísla deliteľné jedenástimi sú napríklad* 11, 22, 33. *Ale žiadne z nich nedostanem ako výsledok rozdielu* $4-*$.

U: Čo teda môžeš dosadiť za hviezdičku, aby rozdiel $4-*$ bol jedenástimi deliteľný?

Ž: *Neviem, vzdávam sa.*

U: Zaoberáme sa deliteľnosťou v obore prirodzených čísel, ale rovnaké je to aj v obore celých čísel. Aby rozdiel $4-*$ bol deliteľný jedenástimi, musíš jeho výsledok hľadať medzi celými číslami.

Ž: *Tak dobre. Čísla deliteľné jedenástimi sú napríklad aj* -11, -22, -33, ... *No neviem. Žiadna číslica dosadená za hviezdičku mi po odčítaní od štvorky nedá takýto výsledok.*

U: Zabudol si na jedno pekné číslo. Na nulu. Nulu delí každé nenulové číslo, teda aj jedenástka.

Ž: *Aha, takže rozdiel* $4-*$ *sa môže rovnať len nule:*

$$4-*=0, \qquad \textit{teda} \qquad *=4.$$

Namiesto hviezdičky môžem dosadiť číslicu 4**, vzniknuté číslo** $128\,645$ **by malo byť deliteľné jedenástimi.**

U: To neznie veľmi presvedčivo.

Ž: *Keď na tom čísle nie je vidieť, či je alebo nie je deliteľné jedenástimi.*

U: Tak to prever delením.

Ž: *Dobre:*

$$128\,645 : 11 = 11\,695 \quad zv.0,$$

teraz je to už v poriadku:

$$11 \mid 128\,645.$$

U: Dobre. V prípade, že by si na začiatku určoval párne a nepárne pozície číslic odzadu, dostal by si rozdiel $* - 4$.

Ž: *Zdá sa, že sa tým nič nezmení. Aj tak by som za hviezdičku mohol dosadiť len štvorku.*

U: Presne tak. Je úplne jedno, či párne a nepárne pozície určuješ odpredu alebo odzadu a tiež je jedno, či odčítavaš súčet číslic z párnych pozícií od súčtu číslic z nepárnych pozícií alebo naopak.

Úloha : *V číslach* $532\,61*$ *a* $532\,64*$ *nahraďte hviezdičky takými číslicami, aby vzniknuté šesťciferné čísla boli deliteľné jedenástimi.*

Výsledok:

V čísle $532\,61*$ *sa hviezdička nedá nahradiť žiadnou číslicou, úloha nemá riešenie.*
(Žiadne z čísel $532\,610,\ 532\,611,\ \ldots 532\,619$ *nie je deliteľné jedenástimi.)*
V čísle $532\,64*$ *sa hviezdička môže nahradiť číslicou* 2.

Príklad 4: *Určte všetky jednociferné delitele čísla* 475 863.

Ž: *Prvým samozrejmým deliteľom čísla* 475 863 *je číslo* 1. *Jednotkou je totiž deliteľné každé číslo.*

U: Tak to už máš za sebou tú „najťažšiu“ prácu. Teraz už len ten ľahký zvyšok.

Ž: *Pôjdem pekne postupne. Najprv preverím deliteľnosť dvomi. Číslo je deliteľné dvomi vtedy, ak je párne. Ale číslo* 475 863 *nie je párne, jeho posledná číslica je* 3, *takže* **číslo 475 863 nie je deliteľné dvomi.**

$$\boxed{2 \nmid 475\,863}$$

Ž: *Teraz deliteľnosť tromi. Potrebujem ciferný súčet čísla* 475 863.

U: Označ si ho $CS(475\,863)$.

Ž: *Dobre:*

$$CS(475\,863) = 4 + 7 + 5 + 8 + 6 + 3 = 33.$$

Ciferný súčet je tromi deliteľný, takže aj **číslo 475 863 je tromi deliteľné**.

U: Správne.

$$\boxed{3 \mid 33 \quad \Rightarrow \quad 3 \mid 475\,863}$$

Ž: *Aby číslo bolo deliteľné štyrmi, musí byť jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi.*

U: Keďže číslo 475 863 nie je párne, tak nie je deliteľné ani žiadnym párnym deliteľom.

Ž: *Aha, tak tým máme vybavenú aj deliteľnosť šiestimi a ôsmimi.*

$$\boxed{4 \nmid 475\,863}$$

$$\boxed{6 \nmid 475\,863}$$

$$\boxed{8 \nmid 475\,863}$$

Ž: *Ostáva mi deliteľnosť piatimi, siedmimi a deviatimi.*

U: Deliteľnosť číslom 5 vybavíš rýchlo.

Ž: *Jasné. Číslo* 475 863 *nie je zakončené ani na nulu ani na päťku, takže nie je piatimi deliteľné.*

$$\boxed{5 \nmid 475\,863}$$

U: Kritérium pre deliteľnosť siedmimi hovorí, že musíš vytvoriť rozdiel posledného trojčíslia a čísla vytvoreného zvyšnými číslicami. V čísle 475 863 je posledné trojčíslie 863 a číslo vytvorené z ostávajúcich číslic je 475.

Ž: *Vytvorím ich rozdiel:*

$$863 - 475 = 288.$$

U: Mal si preveriť, či je siedmimi deliteľné šesťciferné číslo 475 863. Použitím kritéria postačí, ak zistíš, či je siedmimi deliteľné len trojciferné číslo 288.

Ž: *K násobkom čísla* 7 *patrí číslo* 280 *aj číslo* 287, *ale* 288 *nie je násobkom sedmičky.* **Číslo 475 863 nie je deliteľné siedmimi.**

$$\boxed{7 \nmid 475\,863}$$

U: Ostalo nám zistiť, či je toto číslo deliteľné deviatkou. Ciferný súčet už máš vypočítaný.

Ž: *Aha, vypočítal som ho pri zisťovaní deliteľnosti tromi. Super, použijem ho:*

$$\boxed{9 \nmid 33 \quad \Rightarrow \quad 9 \nmid 475\,863}$$

U: Zhrň mi na záver, ktorými jednocifernými deliteľmi je číslo 475 863 deliteľné.

Ž: **Číslo 475 863 je deliteľné číslami 1 a 3.**

Úloha : *Použitím kritérií deliteľosti určte všetky jednociferné delitele čísla* 129 456.

Výsledok: *Jednociferné delitele čísla* 129 456 *sú:* 1, 2, 3, 4, 6, 8 *a* 9.

Príklad 5: *V čísle* 758 609 214 *škrtnite* 2 *číslice tak, aby ste dostali:*
a) čo najväčšie číslo deliteľné číslom 12,
b) čo najmenšie číslo deliteľné číslom 12.

U: Kedy je číslo deliteľné dvanástimi?

Ž: *Číslo* 12 *je* **zložené číslo** *a viem ho rozložiť na súčin dvoch* **nesúdeliteľných čísel** 3 *a* 4*:*

$$12 = 3 \cdot 4,$$

takže dvanástimi je číslo deliteľné vtedy, ak je deliteľné tromi a zároveň aj štyrmi.

U: A aké kritériá platia pre deliteľnosť číslami 3 a 4?

Ž: *Číslo je deliteľné tromi, ak jeho ciferný súčet je tromi deliteľný. A štyrmi je číslo deliteľné vtedy, ak je štyrmi deliteľné jeho posledné dvojčíslie.*

U: Dobre. Všimni si, že číslo 758 609 214 končí na dvojčíslie 14, to nie je deliteľné štyrmi. Niečo z neho musíš vyškrtnúť.

Ž: *No, poslednú štvorku nemá význam škrtať, lebo by som dostal číslo zakončené na jednotku. Vzniklo by teda nepárne číslo a nebolo by deliteľné štvorkou.*

U: A keby si škrtol dve posledné číslice?

Ž: *Ak by som škrtol jednotku aj štvorku z konca, dostal by som číslo zakončené na dvojčíslie* 92*. Takže štyrmi deliteľné bude.*

U: Ale musíš zistiť, či bude deliteľné aj tromi.

Ž: *Jasné:*

$$\boxed{758\,609\,2\mathbf{14} \quad \longrightarrow \quad 7\,586\,092,}$$

$$CS(7\,586\,092) = 7 + 5 + 8 + 6 + 0 + 9 + 2 = 37.$$

Ciferný súčet nie je deliteľný tromi, takže škrtnúť posledné dve číslice pôvodného čísla nebol dobrý nápad.

U: Preveriť sme to museli. Tak čo navrhuješ?

Ž: *Mohol by som vyškrtnúť len predposlednú číslicu, teda číslo* 1*:*

$$\boxed{758\,609\,2\mathbf{1}4 \quad \longrightarrow \quad 75\,860\,924.}$$

Na konci tak dostanem dvojčíslie 24*, to štyrmi deliteľné je.*

U: Dobre. Máme zatiaľ škrtnutú jednu číslicu a zabezpečenú deliteľnosť štyrmi. Potrebujeme škrtnúť ešte jednu číslicu, ale tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné tromi.

Ž: *Tak si vypočítam ciferný súčet čísla* 75 860 924*, aby som vedel, čo mám navyše:*

$$CS(75\,860\,924) = 7 + 5 + 8 + 6 + 0 + 9 + 2 + 4 = 41.$$

Čísla, ktoré sú menšie než 41 *a deliteľné tromi sú:* 39, 36, 33, 30, . . .

U: Už ani tú tridsiatku nemusíš uvažovať. Od čísla 41 je menšia o 11 a to už nie je číslica.

Ž: *Takže ani číslo* 30 *ani žiadny menší násobok čísla* 3 *ma nemusí zaujímať.*

U: Ostalo ti teda preveriť možnosti: 39, 36 a 33.

Ž: *Ak ciferný súčet budúceho čísla bude* 39*, tak to znamená, že musím vyškrtnúť číslicu* 2*, lebo:*

$$41 - 39 = 2.$$

$$\boxed{75\,860\,924 \quad \longrightarrow \quad 7\,586\,094.}$$

U: Práve si si ale pokazil deliteľnosť štyrmi na konci čísla. Toto nie je vyhovujúce riešenie.

Ž: *Aha. Tak preverím nasledujúce čísla. Ak ciferný súčet budúceho čísla bude* 36*, tak musím vyškrtnúť číslicu* 5*, pretože:*

$$41 - 36 = 5.$$

$$\boxed{75\,860\,924 \quad \longrightarrow \quad 7\,860\,924.}$$

Sláva. Mám pekné riešenie.

U: Prever ešte aj možnosť, že ciferný súčet je 33.

Ž: *Dobre. Ak ciferný súčet budúceho čísla bude* 33*, tak musím vyškrtnúť číslicu* 8*, lebo:*

$$41 - 33 = 8.$$

$$\boxed{75\,860\,924 \quad \longrightarrow \quad 7\,560\,924.}$$

U: Po vyškrtnutí dvoch číslic z daného čísla 758 609 214 vznikli teda dve vhodné čísla deliteľné číslom 12: 7 860 924 a 7 560 924. Podľa zadania úlohy máš určiť najmenšie a najväčšie z vhodných čísel.

Ž: **Najmenšie vzniknuté číslo, deliteľné dvanástimi, je číslo 7 560 924 a najväčšie je 7 860 924.**

Úloha 1:

Z čísla 5 781 427 *vyškrtnite* 3 *číslice tak, aby vzniknuté štvorciferné číslo bolo deliteľné číslom* 36.

Výsledok:

5 781 427 $\longrightarrow$ 7812.

Úloha 2:

Z čísla 137 248 056 *vyškrtnite* 4 *číslice tak, aby ste dostali:*

a) čo najmenšie päťciferné číslo deliteľné číslom 6,

b) čo najväčšie päťciferné číslo deliteľné číslom 6.

Výsledok:

a) 137 248 056 $\longrightarrow$ 12 405,

b) 137 248 056 $\longrightarrow$ 74 805.

Príklad 6: *Pomocou kritérií deliteľnosti zistite, či číslo* 430 976 *je deliteľné číslami* 7, 11, 13, 27 *a* 37.

U: Začnime číslami 7 a 13, pretože kritériá pre deliteľnosť týmito číslami sú rovnaké. Spomenieš si?

Ž: *Hm. Asi nie.*

U: ***Číslo je deliteľné číslom 7 (alebo číslom 13) práve vtedy, ak je číslom 7 (alebo číslom 13) deliteľný rozdiel jeho posledného trojčíslia a čísla vytvoreného ostatnými číslicami.***

Ž: *Číslo* 430 976 *si teda rozdelím na dve čísla. Jedným je jeho* **posledné trojčíslie**, *teda číslo* 976 *a druhým je* **to, čo ostalo**, *teda* 430. *Takto:*

$$430\,976 \left\{ \begin{array}{l} 976 \\ 430 \end{array} \right.$$

U: Správne. Teraz vytvor ich rozdiel.

Ž: *Odrátam menšie od väčšieho:*

$$976 - 430 = 546.$$

U: A teraz zisti, či toto číslo je deliteľné siedmimi alebo trinástimi.

Ž: *To bude ľahké:*

$$546 = 490 + 56,$$

čísla 490 *aj* 56 *sú násobkami sedmičky, lebo* $490 = 7 \cdot 70$ *a* $56 = 7 \cdot 8$, *takže aj ich súčet je násobkom sedmičky. Rozdiel červeného a modrého čísla je deliteľný siedmimi, takže aj* **číslo 430 976 je deliteľné siedmimi**.

U: Ako to bude vyzerať pre číslo 13?

Ž: *Teraz si vytvorím takýto súčet:*

$$546 = 520 + 26 = 4 \cdot 130 + 26 = 40 \cdot 13 + 2 \cdot 13.$$

Opäť sú oba sčítance násobkami trinástky, takže aj číslo 546 *je násobkom čísla* 13. *To ale znamená, že aj pôvodné* **číslo 430 976 je trinástimi deliteľné**.

U: Teraz preveríme deliteľnosť číslami 27 a 37. Pripomeniem ti kritérium pre deliteľnosť týmito číslami:
Číslo je deliteľné číslom 27 (alebo číslom 37) práve vtedy, ak je číslom 27 (alebo číslom 37) deliteľný súčet jeho posledného trojčíslia a čísla vytvoreného ostatnými číslicami.

Ž: *To je niečo podobné ako pri číslach* 7 *a* 13.

U: Áno. Rozdelenie čísla na posledné trojčíslie a zvyšnú časť je rovnaké, len teraz vytvoríš ich súčet.

Ž: *Dobre.*

$$976 + 430 = 1406.$$

Ciferný súčet tohto čísla je 11, *nie je teda deliteľný tromi a teda určite nebude deliteľný ani číslom* 27, *lebo* 27 *je násobok trojky.* **Číslo 430 976 nie je deliteľné číslom 27.**

U: Súhlasím.

Ž: *Ostalo mi preveriť deliteľnosť číslom* 37*. Súčet* 1406 *si rozpíšem takto:*

$$1406 = 370 + 370 + 370 + 296 = 3 \cdot 370 + 8 \cdot 37 = 30 \cdot 37 + 8 \cdot 37 = 38 \cdot 37.$$

Číslo 1406 *je teda deliteľné číslom* 37*, takže aj pôvodné* **číslo 430 976 je číslom 37 deliteľné**.

U: Teraz si spomeň na kritérium deliteľnosti jedenástimi.

Ž: *To náhodou viem:*
Číslo je deliteľné číslom 11 práve vtedy, ak je číslom 11 deliteľný rozdiel súčtu číslic na párnych pozíciách a súčtu číslic na nepárnych pozíciách.

U: Potešil si ma. Poďme teda preveriť, či naše číslo je alebo nie je deliteľné číslom 11.

Ž: *V čísle* 430 976 *si spredu označím* **nepárne** *a* **párne** *pozície:*
na nepárnych pozíciách (prvej, tretej a piatej) sú číslice: 4, 0 a 7,
na párnych pozíciách (druhej, štvrtej a šiestej) sú číslice 3, 9 a 6.

U: Výborne. Môžeš vytvoriť súčty týchto číslic.

Ž: *Idem na to:*

$$4 + 0 + 7 = 11,$$

$$3 + 9 + 6 = 18.$$

U: A teraz rozdiel týchto vytvorených súčtov.

Ž: *Opäť odčítam menšie číslo od väčšieho:*

$$18 - 11 = 7,$$

Výsledok 7 *nie je deliteľný číslom* 11*, takže ani pôvodné* **číslo 430 976 nie je deliteľné jedenástimi**.

U: A ak by si odpočítaval väčšie od menšieho?

Ž: *Dostal by som* $11 - 18 = -7$*. Ani číslo* -7 *nie je deliteľné jedenástimi. Znamienko mi deliteľnosť nezmení.*

U: Správne. A keby si párne a nepárne pozície určoval zozadu a nie spredu?

Ž: *Nepárne by boli teraz modré a párne červené. Aj tak je to isté. Je úplne jedno, či to rátam spredu alebo odzadu, či odčítavam menšie od väčšieho alebo naopak, nič sa tým pre deliteľnosť nezmení.*

U: Súhlasím s tebou. Pre deliteľnosť číslom 11 existuje aj iné kritérium:
Číslo je deliteľné číslom 11 práve vtedy, ak je číslom 11 deliteľný súčet dvojčísiel od konca. Poďme si preveriť aj to.

Ž: *Takže číslo* 430 976 *si odzadu rozdelím na tri dvojčíslia. Takto:*

$$430\,976 \left\{ \begin{array}{l} 43 \\ 09 \\ 76 \end{array} \right.$$

U: Z prostredného dvojčíslia dostaneš vďaka nule na začiatku len jednociferné číslo. Sčítaj teraz tieto tri čísla.

Ž: *Dobre:*

$$43 + 9 + 76 = 128,$$

číslo 128 *ale nie je deliteľné jedenástimi, takže ani pôvodné číslo ním deliteľné nie je.*

U: Samozrejme. Iné kritérium by nemalo vyrobiť iný výsledok.

Ž: *Rozdelenie na dvojčíslia sa v tomto kritériu žiada robiť od konca. Záleží na tom, či od konca alebo od začiatku? Veď keby som oddeľoval dvojčíslia od začiatku, dostanem tie isté skupinky.*

U: Pri čísle, ktoré má párny počet číslic, ako naše, je to naozaj jedno. Ale pri čísle s nepárnym počtom číslic už by to nebolo to isté. Takže pri používaní tohto pravidla – oddeľuj od konca!

Úloha : *Pomocou kritérií deliteľnosti zistite, či číslo* 10 395 *je deliteľné číslami* 7, 11, 13, 27 *a* 37.

Výsledok: *Je deliteľné číslami* 7, 11 *a* 27. *Nie je deliteľné číslami* 13 *a* 37.