Objem a povrch zrezaného ihlana a zrezaného rotačného kužeľa

RNDr. Marián Macko

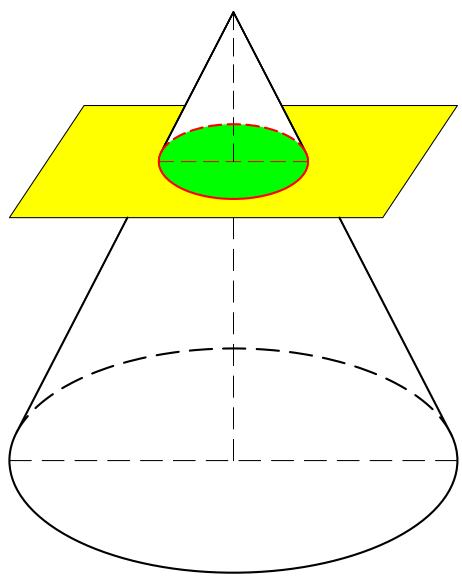
U: Počul si už niekedy o zrezanom rotačnom kuželi?

Ž: *O rotačnom kuželi som už počul, ale pojem zrezaný rotačný kužeľ počujem prvý krát. Máte na mysli nejaké teleso, ktoré vznikne rozrezaním rotačného kužeľa?*

U: Vznik zrezaného rotačného kužeľa sa dá chápať aj takto. Rovina rezu rotačného kužeľa musí byť však kolmá na os rotačného kužeľa.

Ž: *Čiže rovina rezu je rovnobežná s rovinou podstavy rotačného kužeľa.*

U: Áno. Rezom vzniknú dve telesá, ale iba jedno z nich je zrezaný rotačný kužeľ. Ktoré z týchto telies by to malo byť a akým telesom je zvyšná časť?



Ž: *To je predsa jasné. Horná časť je menší rotačný kužeľ, lebo jeho podstava je rovnobežná s podstavou pôvodného kužeľa. Skrátili sme iba výšku kužeľa. Z toho mi vychádza, že* **dolná časť** *pôvodného kužeľa je zrezaný rotačný kužeľ. Ale skôr by som povedal, že je to valec.*

U: Prečo?

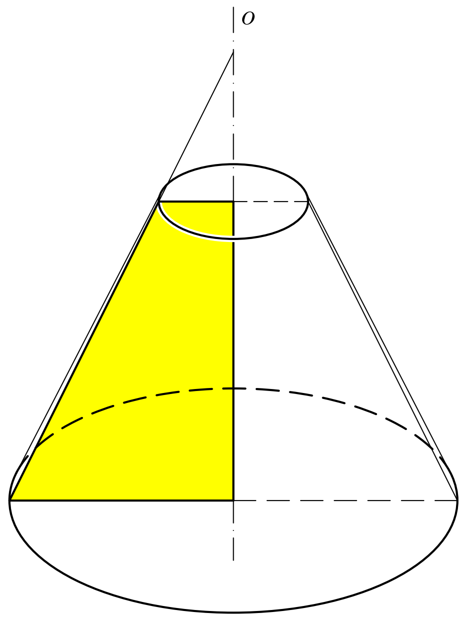
Ž: *Pretože iba valec má dve podstavy, ktoré sú rovnobežné.*

U: Istá odlišnosť tu však je. Podstavami valca sú zhodné kruhy. Pozri sa ešte raz na obrázok. Majú podstavy nášho telesa rovnaký polomer?

Ž: *Na to som celkom zabudol. Kužeľ sa smerom nahor zužuje. Preto má* **horná podstava menší polomer** *ako* **dolná podstava**.

U: Rozdielnosť medzi rotačným valcom a zrezaným rotačným kužeľom sa prejaví aj v plášti. Ten nás bude zaujímať až pri vyjadrovaní povrchu tohto nového telesa. Vráťme sa však naspäť k pomenovaniu nového telesa. Prečo má kužeľ prívlastok zrezaný, sme už vysvetlili. Ale prečo sa zároveň nazýva rotačný? Nemôže vzniknúť rotáciou nejakého rovinného geometrického útvaru?

Ž: *Viem, že rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej odvesny vznikne rotačný kužeľ. Ak teraz z tohto trojuholníka uberiem menší trojuholník, zostane lichobežník.*



U: Základňami tohto lichobežníka sú ***polomery podstáv zrezaného rotačného kužeľa***. Ako sme už povedali, polomery podstáv sú kolmé na os rotácie. Os rotácie je určená jedným ramenom lichobežníka. To ale znamená, že ***zrezaný rotačný kužeľ vznikne rotáciou pravouhlého lichobežníka*** okolo osi určenej ramenom lichobežníka, ktoré je kolmé na základne lichobežníka.

Ž: *Dĺžka tohto ramena by mala byť* **výškou zrezaného rotačného kužeľa**. *Mám pravdu?*

U: Samozrejme. Ide zároveň o vzdialenosť rovín, v ktorých ležia podstavy zrezaného rotačného kužeľa.

Ž: *Má aj druhé rameno, ktoré nie je kolmé k základniam lichobežníka, nejaký význam?*

U: Toto rameno nazývame ***strana zrezaného rotačného kužeľa***. Jeho význam je analogický ako má prepona pravouhlého trojuholníka, rotáciou ktorého vznikne rotačný kužeľ. Pomocou strany zrezaného rotačného kužeľa vyjadríme ***obsah*** jeho ***plášťa***.

Ž: *Ako vyzerá plášť zrezaného rotačného kužeľa?*

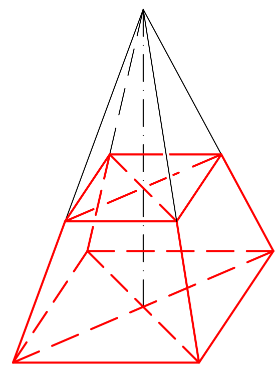
U: Zatiaľ ti to neprezradím. K odpovedi na túto otázku sa dostaneme až pri vyjadrovaní povrchu zrezaného rotačného kužeľa. Zapamätaj si, že hranica zrezaného rotačného kužeľa sa skladá z dvoch kruhov, ktoré nazývame ***podstavy*** a z ***plášťa zrezaného rotačného kužeľa***.

U: Tak ako existuje zrezaný rotačný kužeľ, existuje aj ***zrezaný ihlan***.

Ž: *Zrezaný ihlan však nemôže byť rotačné teleso. Veď ihlan tiež nepatrí medzi rotačné telesá.*

U: Preto ho zadefinujeme pomocou rezu. ***Zrezaný ihlan*** vznikne ***rezom ihlana rovinou rovnobežnou s rovinou jeho podstavy***.

Ž: *Čiže je to podobné ako zrezaný rotačný kužeľ. Aj on môže vzniknúť rezom rotačného kužeľa. Rezom ihlana rovinou rovnobežnou s rovinou podstavy však vznikne ešte jedno teleso. Je ním opäť ihlan s kratšou telesovou výškou ako mal pôvodný ihlan.*



U: Máš pravdu. Medzi zrezaným ihlanom a zrezaným rotačným kužeľom existuje analógia. Preto ťa neprekvapí, že aj zrezaný ihlan má dve podstavy. ***Podstavami zrezaného ihlana*** sú jeho dve rovnobežné steny, ktorými sú podobné n-uholníky. Ako vyzerajú ostatné steny zrezaného ihlana?

Ž: *Keďže strany hornej podstavy sú rovnobežné so zodpovedajúcimi stranami dolnej podstavy, a sú navyše kratšie,* **bočnými stenami** *sú* **lichobežníky**.

U: Zjednotením bočných stien dostaneme ***plášť zrezaného ihlana***. Je časťou hranice zrezaného ihlana. Zvyšok hranice tvoria podstavy zrezaného ihlana.

Ž: *Veľmi jednoducho sa teda dá vyjadriť* **povrch zrezaného ihlana**. *Povrch bude súčtom obsahov jeho dvoch podstáv a obsahu plášťa. Preto platí*

$$S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl}.$$

Nedá sa to vyjadriť aj v inom tvare?

U: Výpočet obsahov podstáv závisí od ***tvaru n-uholníka***, ktorý je podstavou. Plášťom je síce zjednotenie lichobežníkov, ale aj výpočet obsahov lichobežníkov je podmienený viacerými faktormi. Lichobežníky nemusia byť zhodné. To vtedy, ak napríklad každá strana n-uholníka, ktorý je podstavou, má inú dĺžku. Preto si pamätaj vzorec na výpočet povrchu zrezaného ihlana v tomto všeobecnom tvare.

Ž: *Teraz si uvedomujem, že aj* **povrch zrezaného rotačného kužeľa** *sa dá počítať podľa toho istého vzorca. Veď aj zrezaný rotačný kužeľ má dve podstavy a plášť.*

U: Máš dobrý postreh. Tento všeobecný vzorec platí tak pre povrch zrezaného ihlana, ako aj pre povrch zrezaného rotačného kužeľa. S tým rozdielom, že ***podstavami zrezaného rotačného kužeľa*** sú ***podobné kruhy***, takže obsahy podstáv vieme vyjadriť.

Ž: *Obsah kruhu závisí iba na jeho polomere r a to podľa vzorca*

$$S = \pi r^2.$$

Ž: *Dá sa vyjadriť aj obsah plášťa zrezaného rotačného kužeľa?*

U: Samozrejme. Spomenieš si, aký geometrický útvar je plášťom rotačného kužeľa?

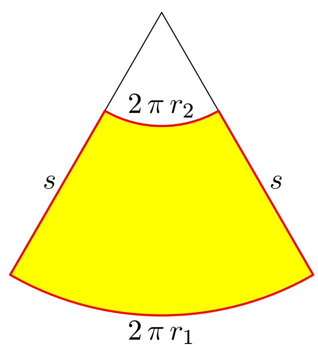
Ž: *Plášťom rotačného kužeľa bol* **kruhový výsek**. *Polomerom kruhového výseku je strana rotačného kužeľa a* **dĺžka kružnicového oblúka**, *ktorý prislúcha kruhovému výseku je rovnaká ako* **obvod podstavy kužeľa**. *Ešte si pamätám, že obsah plášťa rotačného kužeľa vypočítam podľa vzorca*

$$S_{pl} = \pi r s',$$

kde r je polomer podstavy rotačného kužeľa a s' je strana rotačného kužeľa. Prečo ste sa na to pýtali?

U: Pretože s plášťom zrezaného rotačného kužeľa to bude dosť podobné. Máš predstavu, ako vyzerá?

Ž: *Neviem to pomenovať, ale istú predstavu mám. Budem vychádzať z kruhového výseku, ktorý je plášťom pôvodného rotačného kužeľa s polomerom podstavy r_1. Horná časť rotačného kužeľa po rozrezaní je tiež rotačný kužeľ. Polomer jeho podstavy je teraz r_2 a menší kruhový výsek plášťom. Ten odoberiem z kruhového výseku. Plášťom zrezaného rotačného kužeľa je vyšrafovaný útvar na obrázku.*



U: Tento útvar nazývame výsek medzikružia. To znamená, že ***plášťom zrezaného rotačného kužeľa je výsek medzikružia***.

Ž: *Ako vypočítame jeho obsah?*

U: Jeho obsah závisí od polomerov podstáv a strany s zrezaného rotačného kužeľa. Dá sa vyjadriť v tvare

$$S_{pl} = \pi \left(r_1 + r_2\right) s,$$

kde s je strana zrezaného rotačného kužeľa.

Ž: *Je to dosť podobné vzorcu pre obsah plášťa rotačného kužeľa. Rozdiel je iba v tom, že vo vzorci je teraz* **súčet polomerov podstáv**. *Asi preto, lebo kužeľ má iba jednu podstavu a zrezaný kužeľ má dve podstavy.*

U: Všeobecný vzorec $S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl}$ pre povrch ***zrezaného rotačného kužeľa*** sa dá nahradiť vzorcom

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi \left(r_1 + r_2\right) s.$$

Ž: *Ako vyjadrím objem týchto dvoch zrezaných telies? Bude vzorec rovnaký pre obe telesá?*

U: Áno, aj ***objem zrezaného ihlana***, aj ***objem zrezaného rotačného kužeľa*** sa dá vyjadriť tým istým vzorcom, ktorý má tvar

$$V = \frac{v}{3}\left(S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1}S_{p_2}} + S_{p_2}\right).$$

Ž: *Niečo jednoduchšie neexistuje?*

U: Sklamem ťa, ale nie. Pokús sa však tento vzorec pochopiť. Hľadaj analógie s inými telesami.

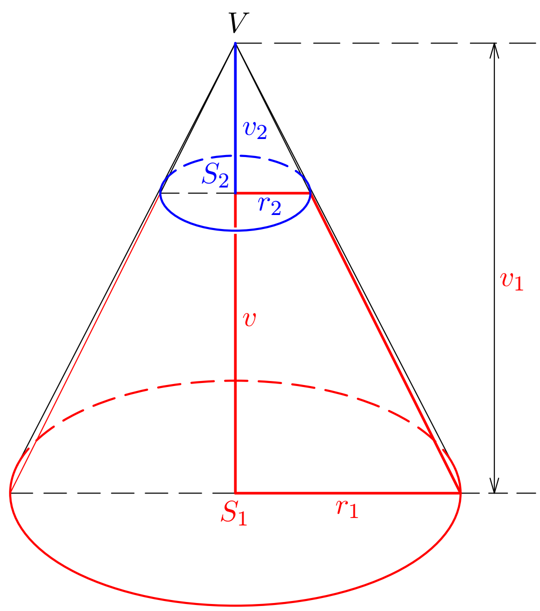
Ž: *To, že vo vzorci je* **jedna tretina**, *by som pochopil. Veď aj objemy ihlanov a kužeľov sú vyjadrené týmto spôsobom. Dokonca aj výška v určovala objem týchto telies. Analógiu pre výraz v zátvorke však budem hľadať zbytočne.*

U: Objem ihlana, respektíve rotačného kužeľa je daný vzorcom $V = \frac{v}{3}S_p$, kde S_p je obsah podstavy. Aj vo vzorci pre objem zrezaného ihlana, respektíve zrezaného rotačného kužeľa, je tretina výšky násobená výrazom, ktorý súvisí s ***obsahmi podstáv***.

Ž: *To áno, ale prečo sú tam až tri sčítance?*

U: Získame ich pri odvádzaní vzorca, ktoré nie je triviálne. Je založené na myšlienke vytvorenia zrezaných telies. Vedel by si túto myšlienku vysvetliť pre zrezaný rotačný kužeľ?

Ž: *Od objemu pôvodného rotačného kužeľa by som* **odrátal objem** *horného odrezaného* **rotačného kužeľa**.



U: Presne tak. Jediný problém by bol v tom, že výraz pre výsledný objem by obsahoval výšky v_1 a v_2 týchto rotačných kužeľov. Ale ***objem zrezaného rotačného kužeľa*** má byť vyjadrený pomocou jeho ***výšky*** v. Musel by si využiť ***podobnosť trojuholníkov***. Toto však nie je teraz predmetom nášho záujmu.

Ž: *Musím sa teda zmieriť s tým, že sa ten vzorec musím naučiť.*

U: Nič iné ti nezostáva. Veď tých vzorcov nemáš až tak veľa. To, čo by si ale mal byť schopný zvládnuť aj bez učenia, je ***odvodiť vzorec*** pre ***objem zrezaného rotačného kužeľa*** zo všeobecného vzorca $V = \frac{v}{3}\left(S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}} + S_{p_2}\right)$. Pokús sa o to.

Ž: *Chcete, aby som objem vyjadril pomocou* **polomerov podstáv***?*

U: Áno.

Ž: *Obsahy podstáv, čo sú kruhy, vyjadrím známym vzorcom $S = \pi r^2$ a dostávam*

$$V = \frac{v}{3} \cdot \left(\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2\right).$$

V druhom sčítanci výrazu v zátvorke bude pod odmocninou výraz $\pi^2 r_1^2 r_2^2$, ktorý odmocním. Preto platí

$$V = \frac{v}{3} \cdot \left(\pi r_1^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2\right).$$

To by mohol byť výsledok.

U: Pozri sa ešte raz na výraz v zátvorke. Čo majú všetky sčítance spoločné?

Ž: *Aha. Pred zátvorku môžem vybrať reálne číslo π a pre* **objem zrezaného rotačného kužeľa** *dostávam*

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

U: Aj tento vzorec by si si mal zapamätať. Ak ho ale zabudneš, tak ho môžeš odvodiť tým istým spôsobom, ako si to urobil teraz.

Príklad 1: *Vypočítajte objem a povrch zrezaného rotačného kužeľa, ak sú dané polomery podstáv* $r_1 = 13$ cm, $r_2 = 6$ cm *a strana* $s = 20$ cm.

U: Čo potrebuješ poznať na výpočet objemu zrezaného rotačného kužeľa?

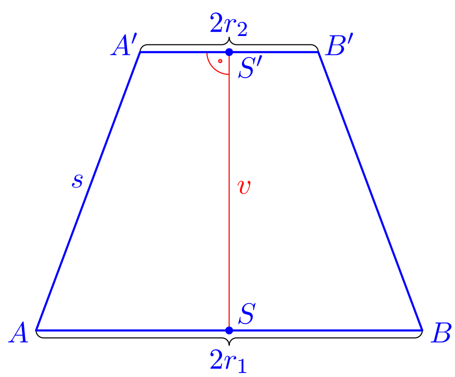
Ž: *Okrem polomerov podstáv, ktoré sú zadané, potrebujem poznať aj výšku zrezaného rotačného kužeľa. To preto, lebo vzorec pre objem takého telesa má tvar*

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

U: Vieš vypočítať výšku?

Ž: *Zatiaľ celkom presne neviem, ale skúsim využiť* **osový rez zrezaného rotačného kužeľa**.

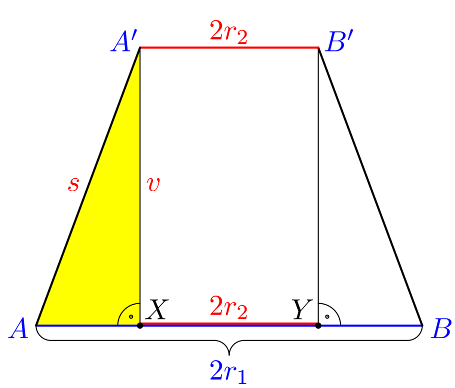
U: Ideš na to dobre. Vieme, že osovým rezom zrezaného rotačného kužeľa je ***rovnoramenný lichobežník***. Aký je súvis medzi jeho rozmermi a rozmermi zrezaného kužeľa?



Ž: *Priemery podstáv zrezaného rotačného kužeľa sú vlastne* **základne lichobežníka** *a jeho* **rameno** *určuje stranu tohto telesa. Neznáma výška zrezaného kužeľa bude výškou lichobežníka.*

U: Úlohou teda je vypočítať výšku rovnoramenného lichobežníka, pričom poznáme dĺžky všetkých jeho strán. Dá sa to?

Ž: *Postup výpočtu si pamätám. Musím však využiť fintu. Rovnoramenný lichobežník rozdelím na dva pravouhlé trojuholníky a medzi nimi bude obdĺžnik. Tak, ako to je na obrázku.*



U: A odkiaľ budeš počítať výšku?

Ž: *Využijem predsa pravouhlý trojuholník AXA' s pravým uhlom pri vrchole X. Jeho prepona AA' má dĺžku strany zrezaného rotačného kužeľa, teda $s = 20$ cm.*

U: Dobre, ale poznáš dĺžku niektorej odvesny?

Ž: *Dĺžku odvesny XA' nepoznám. To mám vypočítať. Ale viem najskôr vypočítať dĺžku odvesny AX.*

U: Ako?

Ž: *Povedal som, že štvoruholník $XYB'A'$ je* **obdĺžnik**. *Teda strana XY má dĺžku 12 centimetrov, tak ako horná základňa lichobežníka. Na úsečky AX a YB dolnej základne zvýšilo 14 centimetrov. Je to rozdiel dolnej a hornej základne. No a z* **rovnoramennosti lichobežníka** *vyplýva, že úsečky AX a YB sú zhodné. Preto má úsečka AX* **dĺžku 7 centimetrov**.

U: Musím uznať, že to máš namakané. Na to, ako vypočítaš výšku sa už ani nepýtam. Veď ty zvládneš výpočet výšky aj sám.

Ž: *Teraz využijem* **Pytagorovu vetu** *v pravouhlom trojuholníku AXA'. Preto pre výšku lichobežníka, čo je odvesna tohto trojuholníka, platí*

$$v = |XA'| = \sqrt{s^2 - |AX|^2}.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávam

$$v = \sqrt{20^2 - 7^2} = \sqrt{400 - 49} = \sqrt{351}.$$

Dá sa to odmocniť?

U: Iba čiastočne. Číslo 351 je súčinom čísel 9 a 39. Výška má dĺžku $v = 3\sqrt{39}$ cm. Vypočítaj objem zrezaného rotačného kužeľa.

Ž: *Do vzťahu*

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

dosadím číselné hodnoty a dostávam

$$V = \frac{3\sqrt{39}\pi}{3} \cdot \left(13^2 + 13 \cdot 6 + 6^2\right).$$

Čísla umocním, sčítam a trojky vykrátim. Výsledok bude

$$V = 283\sqrt{39} \cdot \pi.$$

U: Vidím, že dnes exceluješ. Zostal ti len výpočet povrchu.

Ž: *Teraz to už bude horšie. Zabudol som totiž vzorec.*

U: Nič z povrchu by si nedokázal vypočítať?

Ž: *Obsahy podstáv by som vedel, lebo sú to kruhy. Ale obsah plášťa? Netuším.*

U: A pritom je to v tejto úlohe tá jednoduchšia časť. Samozrejme, ak vieš vzorec

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2) s.$$

Všetko je zadané, stačí dosadiť.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$S = \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot (13 + 6) \cdot 20.$$

Výsledok je 585π **centimetrov štvorcových**.

U: Aj napriek malému zaváhaniu v závere riešenia si zaslúžiš pochvalu. Chápeš a vieš popísať súvislosti. To, že si zabudol vzorec, nie je tragédia. Dá sa predsa nájsť v tabuľkách.

Príklad 2: *Polomery podstáv a výška zrezaného rotačného kužeľa sú v pomere* $r_1 : r_2 : v = 11 : 3 : 15$. *Vypočítajte objem zrezaného rotačného kužeľa, ak jeho povrch je* $92\pi\ \mathrm{cm}^2$.

Ž: *Nevyzerá to dobre. Nepoznáme ani polomery podstáv, ani výšku zrezaného rotačného kužeľa. To sú tri neznáme rozmery, ktoré potrebujeme k výpočtu objemu.*

U: Vieme však, v akom pomere sú ich dĺžky. To nám dáva možnosť zredukovať počet neznámych veličín. ***Pomer*** vyjadruje, že polomer jednej podstavy možno rozdeliť na jedenásť rovnakých dielov, kým polomer druhej podstavy iba na tri takéto diely.

Ž: *Pochopil som. Dĺžku jedného dielu označíme ako neznámu x a pre rozmery zrezaného rotačného kužeľa máme*

$$r_1 = 11x,\ r_2 = 3x,\ v = 15x.$$

Potrebujeme určiť hodnotu neznámej x.

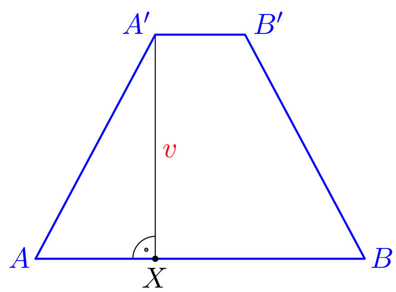
U: Na to využijeme zadaný ***povrch zrezaného rotačného kužeľa***. Ako sa vypočíta?

Ž: *Vzorec na výpočet povrchu je*

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s.$$

Nepoznáme však **stranu s zrezaného kužeľa**.

U: Tak ju vyjadríme. Pozri sa na ***osový rez zrezaného rotačného kužeľa***. Čo by sa dalo využiť?

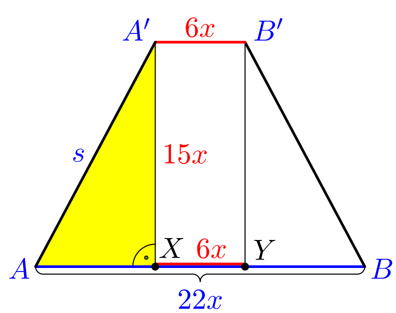


Ž: *Jasné! Rezom je* **rovnoramenný lichobežník**. *Mám vyjadrené dĺžky jeho základní a výšku. Potrebujem vypočítať dĺžku ramena AA' rovnoramenného lichobežníka. To je vlastne strana zrezaného kužeľa. Ale ako to urobím? Nič mi nenapadá.*

U: Poradím ti. Využi pravouhlý trojuholník AXA'.

Ž: *Priznám sa, že zatiaľ mi nedochádza. Mám vypočítať nejaký uhol? Ako? Veď poznám iba jednu odvesnu dĺžky $15x$.*

U: Dobre teda. Zostroj si výšku $B'Y$ na základňu AB lichobežníka aj z bodu B'. Akú dĺžku má úsečka XY?



Ž: *Jasné! Je taká istá, ako horná základňa. Platí teda* $|XY| = 6x$. *Zvyšné dve časti* AX *a* YB *základne sú rovnako dlhé. Keďže celá úsečka má dĺžku* $22x$, *tak úsečka* AX *má dĺžku* $8x$.

U: Teraz už vieš vypočítať dĺžku strany AA'?

Ž: *Stačí, keď pre* **pravouhlý trojuholník** AXA' *zapíšem* **Pytagorovu vetu**. *Poznám dĺžky odvesien. Pre preponu* $s = |AA'|$ *preto platí*

$$s = \sqrt{v^2 + |AX|^2} = \sqrt{(15x)^2 + (8x)^2}.$$

Výrazy pod odmocninou umocním a sčítam

$$s = \sqrt{225x^2 + 64x^2} = \sqrt{289x^2}$$

a po odmocnení dostávam výsledok $s = 17x$.

U: Vráťme sa teraz k vzorcu pre povrch zrezaného rotačného kužeľa. Povedali sme, že nám poslúži na výpočet dĺžky x.

Ž: *Do vzorca*

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$$

dosadím získané vyjadrenia a zadanú hodnotu povrchu. Takže mám rovnicu

$$92\pi = \pi \cdot (11x)^2 + \pi \cdot (3x)^2 + \pi \cdot (11x + 3x) \cdot 17x.$$

Po umocnení, vynásobení a sčítaní dostávam

$$92\pi = 368x^2\pi.$$

Rovnicu môžem vydeliť číslom 368π, *preto dostávam rovnicu*

$$x^2 = \frac{1}{4}.$$

Jej riešením je $x = \frac{1}{2}$. *Dĺžkou úsečky môže byť iba kladné číslo.*

U: Vieme teda vyjadriť aj rozmery zrezaného rotačného kužeľa v centimetroch

$$r_1 = \frac{11}{2}, \quad r_2 = \frac{3}{2}, \quad v = \frac{15}{2}.$$

Môžeš vypočítať jeho objem.

Ž: *Použijem vzorec na výpočet objemu zrezaného rotačného kužeľa v tvare*

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávam

$$V = \frac{\pi \cdot \frac{15}{2}}{3} \cdot \left(\frac{121}{4} + \frac{33}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{15\pi}{6} \cdot \frac{163}{4} = \frac{815\pi}{8}.$$

U: Objem zrezaného rotačného kužeľa je $\frac{815\pi}{8}$ centimetrov kubických.

Príklad 3: *Vypočítajte povrch zrezaného pravidelného štvorbokého ihlana, ak sú dané dĺžky hrán jeho podstáv $a_1 = 16$ cm, $a_2 = 10$ cm a telesová výška $v = 4$ cm.*

Ž: *Vypočítať obsahy podstáv zrezaného ihlana nebude problém. Horšie to bude s obsahmi jeho bočných stien.*

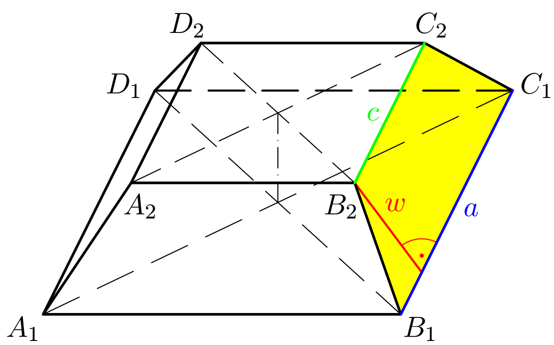
U: Máš pravdu v tom, že ***povrch zrezaného ihlana*** je daný ***súčtom obsahov jeho stien***. Prečo vidíš problém v bočných stenách a v podstavách nie?

Ž: *Podstavami sú predsa* **štvorce** *a dĺžky hrán oboch podstáv poznám zo zadania úlohy. Bočnými stenami sú lichobežníky, ale vzorec na výpočet jeho obsahu mi nič nehovorí.*

U: Vidím, že ti budem musieť pomôcť. Zrezaný štvorboký ihlan je pravidelný, preto všetky jeho ***bočné hrany*** majú rovnakú dĺžku. ***Bočnými stenami*** sú teda zhodné ***rovnoramenné lichobežníky***. Ich obsahy vypočítaš podľa vzorca

$$S = \frac{(a+c)\cdot w}{2},$$

kde a a c sú ***základne*** lichobežníka a w jeho ***výška***. Niečo z toho by si mal poznať.



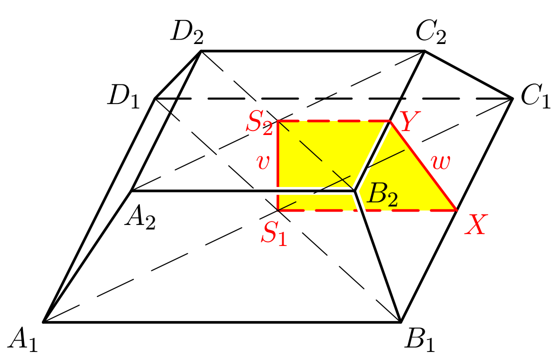
Ž: *Poznám predsa základne lichobežníka, lebo základňami sú dve rovnobežné hrany podstáv zrezaného ihlana. Ich dĺžky sú v zadaní úlohy. Nepoznám však výšku w lichobežníka.*

U: Kde by si ju v rovnoramennom lichobežníku $B_1C_1C_2B_2$ zostrojil?

Ž: *No predsa ako kolmicu na stranu B_1C_1 z vrchola B_2, alebo C_2.*

U: Nedá sa výška lichobežníka zostrojiť aj zo stredu Y kratšej základne?

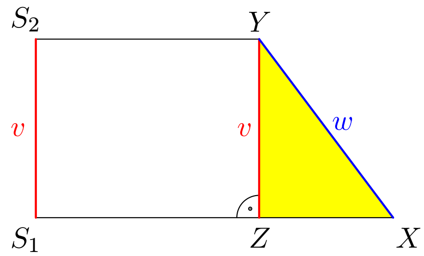
Ž: *To áno. Päta výšky bude opäť v strede X, ale dolnej základne.*



U: Body X a Y vytvoria so stredmi S_1 a S_2 podstáv zaujímavý rovinný geometrický útvar. Vieš aký?

Ž: *Zase to bude lichobežník, navyše pravouhlý. To preto, lebo rameno S_1S_2 je telesová výška zrezaného ihlana. Tá je kolmá na jeho podstavy, preto je kolmá aj na základne* **pravouhlého lichobežníka**.

U: V tomto pravouhlom lichobežníku poznáme dĺžky jeho základní a výšku. Vypočítať dĺžku zvyšného ramena by nemal byť problém.



Ž: *Pravouhlý lichobežník si rozdelím na obdĺžnik a pravouhlý trojuholník XYZ s pravým uhlom pri vrchole Z.* **Základne** *lichobežníka majú* **polovičné dĺžky ako hrany** *podstáv. Preto platí*

$$|S_1X| = 8 \text{ cm}, \quad |S_2Y| = 5 \text{ cm}.$$

Úsečka S_1Z je rovnako dlhá ako úsečka S_2Y, preto má úsečka XZ dĺžku 3 centimetre.

U: Odvesna YZ pravouhlého trojuholníka má veľkosť 4 centimetrov, tak ako telesová výška v zrezaného ihlana. Môžeš vypočítať dĺžku prepony.

Ž: *Tá má veľkosť 5 centimetrov, lebo je to klasický pravouhlý trojuholník so stranami 3, 4 a 5 centimetrov, teda*

$$w = 5 \text{ cm}.$$

U: Máme všetky číselné hodnoty na to, aby sme vypočítali povrch zrezaného ihlana. Vzorec má tvar

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}.$$

Ž: *Výpočet už zvládnem aj sám. Obsah* **dolnej podstavy**, *ktorou je* **štvorec** *so stranou $a_1 = 16$ cm je $S_1 = a_1^2 = 256$. Analogicky vyjadrím aj obsah $S_2 = 100$ hornej podstavy s hranou dĺžky 10 centimetrov. Plášť tvoria štyri rovnoramenné lichobežníky, preto obsah plášťa vyjadrím v tvare*

$$S_{pl} = 4 \cdot S_{lich} = 4 \cdot \frac{(a_1 + a_2)w}{2} = 2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot w.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávam

$$S_{pl} = 2 \cdot (16 + 10) \cdot 5 = 260.$$

U: Sčítaním obsahov podstáv a obsahu plášťa dostaneme výsledok 616 cm^2. To je celkový povrch zadaného zrezaného ihlana.

Príklad 4: *Vyjadrite povrch a objem rotačného zrezaného kužeľa s polomermi podstáv* r, $\dfrac{r}{2}$ *a výškou* $v = \dfrac{2r}{3}$.

Ž: *To mám riešiť bez číselných hodnôt?*

U: A je v tom problém? Veď namiesto čísel budeš pracovať s premennými. Tam, kde by si napísal číslo, napríklad 5, v tejto úlohe napíšeš výraz $\dfrac{2r}{3}$.

Ž: *Budem sa s tým musieť zmieriť. Vzhľadom na to, čo mám zadané, začal by som objemom. V podstate to až také náročné nebude. Stačí, ak do vzorca*

$$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$$

dosadím vyjadrenia zo zadania úlohy a dostávam

$$V = \frac{\pi \cdot \dfrac{2r}{3}}{3} \cdot \left(r^2 + r \cdot \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right).$$

Zlomok v zátvorke umocním a zložený zlomok pred zátvorkou zjednoduším. Preto viem objem vyjadriť v tvare

$$V = \frac{2\pi r}{9} \cdot \left(r^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}\right).$$

U: Rozbehol si sa dobre. Čo urobíš ďalej?

Ž: *Veď som tesne pred cieľom. Členy v zátvorke upravím na spoločného menovateľa, čo je číslo štyri. Nakoniec čísla vykrátim dvomi a zlomky vynásobím. Týmito úpravami pre objem dostávam*

$$V = \frac{2\pi r}{9} \cdot \left(\frac{4r^2 + 2r^2 + r^2}{4}\right) = \frac{7\pi r^3}{18}.$$

U: Tvoj výkon bol excelentný. Vidíš! Najskôr si sa obával premenných a nakoniec si si to pri vyjadrovaní ani neuvedomoval. Odpoveďou na prvú časť úlohy je: objem zadaného zrezaného rotačného kužeľa sa dá vyjadriť v tvare

$$V = \frac{7\pi r^3}{18}.$$

U: Ako to bude s jeho povrchom?

Ž: *Vzorec na výpočet povrchu zrezaného rotačého kužeľa má tvar*

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl},$$

kde prvé dva sčítance vyjadrujú obsah podstáv a posledný sčítanec je obsah plášťa. Obsahy podstáv vypočítam veľmi jednoducho. Použijem vzorec $S = \pi r^2$ *pre obsah kruhu. Preto platí*

$$S_1 = \pi r^2, \quad S_2 = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{r^2}{4}.$$

Ž: *Horšie to bude s obsahom plášťa* $S_{pl} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$.

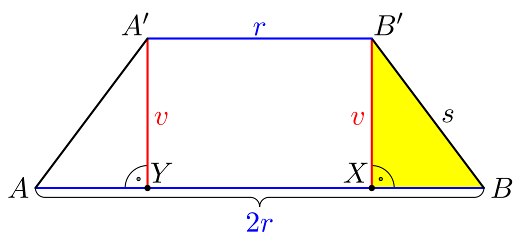
U: Prečo?

Ž: *Nepoznám* **stranu** s *zrezaného rotačného kužeľa.*

U: Strana sa dá vyjadriť zo zadaných údajov. Využi ***osový rez zrezaného kužeľa***.

Ž: *Viem, že osovým rezom je* **rovnoramenný lichobežník**, *v ktorom poznám základne a výšku. Netuším však, ako vypočítam dĺžku ramena, čo je strana* s.

U: V rovnoramennom lichobežníku si zostroj výšky z vrcholov kratšej základne na dlhšiu základňu. To by ti malo pomôcť. Uvedom si, aké geometrické útvary získaš.



Ž: *Získam dva pravouhlé trojuholníky a obdĺžnik. Asi využijem pravouhlý trojuholník* XBB', *lebo strana* s *je jeho preponou. Ale akú dĺžku má odvesna* XB*?*

U: Takú istú ako úsečka AY. Keďže AB je priemer dolnej podstavy a $|YX| = r$, lebo $YXB'A'$ je obdĺžnik, tak na úsečky AY a XB zostáva dĺžka r. Preto má úsečka XB dĺžku $\frac{r}{2}$.

Ž: *No!? Priznávam, že som na tento výsledok mohol prísť aj sám. Pre stranu* s *potom na základe* **Pytagorovej vety** *dostávam*

$$s = \sqrt{\left(\frac{2r}{3}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4r^2}{9} + \frac{r^2}{4}}.$$

Zlomky upravím na spoločného menovateľa, sčítam a výsledný zlomok odmocním. Mám

$$s = \sqrt{\frac{16r^2 + 9r^2}{36}} = \sqrt{\frac{25r^2}{36}} = \frac{5r}{6}.$$

U: Teraz sú už všetky potrebné vyjadrenia známe. Pre povrch dostávame

$$S = \pi r^2 + \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \pi \cdot (r + \frac{r}{2}) \cdot \frac{5r}{6}.$$

Ž: *Môžem pokračovať ja? Zlomok umocním a členy v zátvorke sčítam. Potom sčítam tri zlomky tak, že ich upravím na spoločného menovateľa, čo je číslo 4. Nakoniec čísla v zlomku vykrátim. Pri týchto úpravách mám*

$$S = \pi r^2 + \pi \cdot \frac{r^2}{4} + \pi \cdot \frac{3r}{2} \cdot \frac{5r}{6} = \frac{4\pi r^2 + \pi r^2 + 5\pi r^2}{4} = \frac{10\pi r^2}{4} = \frac{5\pi r^2}{2}.$$

U: Povrch daného zrezaného rotačného kužeľa sa dá vyjadriť v tvare

$$S = \frac{5\pi r^2}{2}.$$

Príklad 5: *Zrezaný pravidelný štvorboký ihlan má objem* 70 cm^3*, výšku* $v = 6$ cm *a obsah dolnej podstavy o* 15 cm^2 *väčší ako obsah hornej podstavy. Vypočítajte obsah hornej podstavy.*

U: Vzorec pre objem zrezaného ihlana by nemal byť problém.

Ž: *Objem vypočítam podľa vzorca*

$$V = \frac{v}{3} \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right).$$

Poznám objem, výšku, obsah S_2 *podstavy mám vypočítať. Nepoznám však obsah dolnej podstavy.*

U: Ale podľa zadania úlohy vieš, ako súvisí s neznámym obsahom S_2.

Ž: *Aha! Je o* 15 *centimetrov štvorcových väčší. Zapíšem si teda rovnosť*

$$S_1 = S_2 + 15.$$

Dosadím do vzorca pre objem a dostávam

$$70 = \frac{6}{3} \cdot \left(15 + S_2 + \sqrt{(15 + S_2) \cdot S_2} + S_2\right).$$

Toto mám riešiť? Nevyzerá to dobre.

U: Uznávam, čísla sú trochu väčšie. Ale druh rovnice by ti mal byť známy. Budeme riešiť iracionálnu rovnicu. Neznáma S_2 sa totiž vyskytuje aj vo výraze pod odmocninou. Výrazy v rovnici najskôr zjednoduš. Potom si pripomenieme, ako riešiť iracionálnu rovnicu.

Ž: *Zlomok pred zátvorkou na pravej strane dá číslo dva a v zátvorke sčítam neznáme* S_2*. Rovnicu potom vydelím dvomi a dostávam*

$$35 = 2S_2 + 15 + \sqrt{(S_2 + 15) \cdot S_2}.$$

Na pravej strane rovnice ponechám výraz s odmocninou. Všetky ostatné členy dám na ľavú stranu rovnice a mám

$$20 - 2S_2 = \sqrt{(S_2 + 15) \cdot S_2}.$$

U: Postup riešenia iracionálnych rovníc je založený na ***odstránení odmocnín***. Dosiahneme to umocnením výrazov na oboch stranách rovnice. Nezabudni však, že výraz $20 - 2S_2$ na ľavej strane rovnice umocňujeme ako dvojčlen.

Ž: *Dobre, že ste to pripomenuli. Na ľavú stranu rovnice by som bol napísal výraz* $20^2 - (2S_2)^2$.

U: Takže teraz to urob správne. Umocňujeme dvojčlen.

Ž: *Radšej použijem zátvorky a mám*

$$(20-2S_2)^2=\left(\sqrt{S_2^2+15S_2}\right)^2.$$

Na ľavej strane využijem vzorec $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ *a vo výraze na pravej strane sa odmocnina s mocninou rušia. Preto dostávam*

$$400-80S_2+4S_2^2=S_2^2+15S_2.$$

U: Máme kvadratickú rovnicu s neznámou S_2. ktorú upravíme na tvar

$$3S_2^2-95S_2+400=0.$$

Ž: *Ani som si to neuvedomoval. Môžem si obsah nahradiť neznámou* x*?*

U: Myslím si, že to nepotrebuješ. Veď zápisy zvládneš aj s premennou S_2. Pamätáš si vzorec na výpočet koreňov kvadratickej rovnice?

Ž: *No?! Nejako mi to vypadlo. Viete, už dlhší čas berieme iba geometriu.*

U: Tak ti ho pripomeniem. Korene kvadratickej rovnice vypočítaš podľa vzorca

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

U: Dúfam, že koeficienty už určíš sám.

Ž: *V tom nemám problém. Do vzorca dosadím hodnoty koeficientov* $a=3,\ \ b=-95,\ \ c=400$ *a dostávam*

$$S_2=\frac{95\pm\sqrt{(-95)^2-4\cdot3\cdot400}}{2\cdot3}=\frac{95\pm\sqrt{9025-4800}}{6}=\frac{95\pm\sqrt{4225}}{6}.$$

U: Číslo 4225, ktoré je pod odmocninou sa nazýva diskriminant.

Ž: *Spomínam si. Určuje počet riešení kvadratickej rovnice. Teraz je diskriminant kladný, preto dostaneme dve riešenia kvadratickej rovnice, a to riešenie*

$$S_2=\frac{95+65}{6}=\frac{80}{3}$$

a riešenie

$$S_2'=\frac{95-65}{6}=5.$$

Zaujímavé. Úlohe vyhovujú až dva rôzne zrezané ihlany?

U: Nie tak celkom. Na niečo si zabudol. Umocňovanie iracionálnej rovnice nie je ekvivalentná úprava. Musíme urobiť skúšku správnosti, alebo sa pozrieme na podmienky v rovnici

$$20 - 2S_2 = \sqrt{S_2^2 + 15S_2}$$

pred jej umocňovaním.

Ž: *Vravíte podmienky? Skúsim. Viem, že* **výraz pod odmocninou** *musí nadobúdať* **nezáporné hodnoty**. *Teda*

$$S_2^2 + 15S_2 \geqq 0.$$

Ale to určite platí, veď obsah je kladné číslo. Platí teda

$$S_2^2 + 15S_2 > 0.$$

U: A čo výraz na ľavej strane rovnice?

Ž: *Jasné. Veď odmocnina na pravej strane dá iba kladné čísla, teda aj výraz na ľavej strane musí byť väčší ako nula*

$$20 - 2S_2 > 0.$$

Čiže obsah druhej podstavy musí byť menší ako číslo desať,

$$S_2 < 10.$$

Mám dojem, že riešenie $\dfrac{80}{3}$ *tejto* **podmienke nevyhovuje**.

U: Máš pravdu. Riešením úlohy je iba obsah $S_2 = 5\ \text{cm}^2$.

Príklad 6: *Povrch zrezaného rotačného kužeľa so stranou* $s = 13$ cm *je* $S = 510\pi$ cm^2. *Určte polomery podstáv, ak ich rozdiel je* 10 cm.

Ž: *Pre povrch zrezaného kužeľa platí*

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s.$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostávam

$$510\pi = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot 13.$$

Rovnicu vydelím reálnym číslom π *a mám*

$$510 = r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot 13.$$

U: To je jedna rovnica pre neznáme polomery podstáv zrezaného kužeľa. Podľa zadania úlohy však vieme, že $r_1 - r_2 = 10$. Preto platí

$$r_1 = 10 + r_2.$$

Ž: *Dosadím to do mojej rovnice. Získam rovnicu*

$$510 = (10 + r_2)^2 + r_2^2 + (10 + r_2 + r_2) \cdot 13.$$

Výrazy na pravej strane rovnice umocním respektíve roznásobím a dostávam

$$510 = 100 + 20r_2 + r_2^2 + r_2^2 + 130 + 26r_2.$$

U: Kvadratickú rovnicu s ***neznámou*** r_2 upravíme na anulovaný tvar

$$r_2^2 + 23r_2 - 140 = 0.$$

Ž: *Kvadratická rovnica? Budete mi musieť pripomenúť vzorec na výpočet jej koreňov.*

U: Korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ vypočítaš podľa vzorca

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dúfam, že koeficienty vieš určiť.

Ž: *V našom prípade* $a = 1$, $b = 23$ *a* $c = -140$. *Dosadím do vzorca a dostávam*

$$r_2 = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-140)}}{2 \cdot 1}.$$

Radšej to rozdelím na dva prípady. Po umocnení a vynásobení čísel pod odmocninou pre prvý koreň kvadratickej rovnice dostávam

$$r_2 = \frac{-23 + \sqrt{529 + 560}}{2} = \frac{-23 + \sqrt{1089}}{2} = \frac{-23 + 33}{2} = 5.$$

Druhý koreň vypočítam analogicky. Znamienko plus pred odmocninou vo výraze v čitateli sa však zmení na mínus. Preto to skrátim a mám

$$r_2' = \frac{-23 - 33}{2} = -28.$$

Môže byť toto číslo riešením?

U: Rozmýšľaš správne. Číslo -28 nie je riešením úlohy. To preto, lebo polomer podstavy musí byť vyjadrený ***kladným*** reálnym číslom.

Ž: *Zatiaľ teda viem, že polomer hornej podstavy je* $r_2 = 5$ cm. *Polomer dolnej podstavy je o desať centimetrov väčší, teda* $r_1 = 15$ cm.