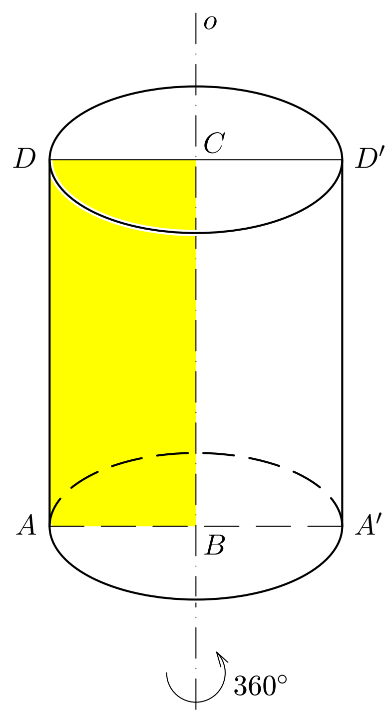
Objem a povrch rotačného valca

RNDr. Marián Macko

Ž: *Prečo má valec prívlastok rotačný?*

U: Vysvetľuje podstatu vzniku tohto telesa. Rotačný valec vznikne rotáciou, čiže ***otočením obdĺžnika okolo priamky***, ktorá obsahuje jednu stranu obdĺžnika.



Ž: *Obdĺžnik zrejme otáčame v priestore o* 360 *stupňov.*

U: Áno. Priamku, okolo ktorej otáčame, nazývame ***osou valca***.

Ž: *Mám os valca chápať ako os symetrie valca?*

U: Máš pravdu. Rotačný valec je osovo súmerný podľa svojej osi. Súmernosť sa prejaví aj v každom rovinnom útvare, ktorý vznikne prienikom rotačného valca s rovinou. Tento prienik nazývame ***osový rez rotačného valca***. Rovina rezu však musí obsahovať os valca.

Ž: *Aha! Osovým rezom nášho rotačného valca na obrázku je obdĺžnik* $AA'D'D$.

U: Strany obdĺžnika, ktorého otáčaním vznikol rotačný valec, popisujú ďalšie pojmy valca. Čo vzniklo rotáciou úsečky AB?

Ž: *Bod* A *sa pri otáčaní pohybuje po kružnici s polomerom rovnajúcim sa dĺžke strany* AB*. Úsečka* AB *teda vytvorí kruh s tým istým polomerom.*

U: Tento kruh nazývame ***podstavou rotačného valca***. Podstava je vždy v rovine kolmej na os valca. Dĺžku úsečky AB preto nazývame ***polomer podstavy rotačného valca***.

Ž: *Je zrejmé, že rotačný valec má dve podstavy. Sú nimi zhodné kruhy s polomerom $r = |AB|$. Ležia v navzájom rovnobežných rovinách, ktoré sú kolmé na os valca.*

U: Úsečka AD rotujúceho obdĺžnika vytvorí pri rotácii okolo osi plochu, ktorú nazývame ***plášť rotačného valca***. Dĺžka tejto úsečky predstavuje vzdialenosť rovín podstáv rotačného valca.

Ž: *Takéto vzdialenosti určujú* **telesovú výšku***. Mám pravdu?*

U: Dá sa to takto chápať. V praktických úlohách zvykneme za výšku rotačného valca zobrať úsečku spájajúcu stredy jeho podstáv.

Ž: *Ale to je to isté, lebo útvar $ABCD$ je obdĺžnik.*

U: Samotnú úsečku AD plášťa valca nazývame ***strana valca***. Valec má nekonečne veľa strán. Sú nimi úsečky navzájom rovnobežné a sú rovnobežné aj s osou rotačného valca.

U: Čo potrebuješ poznať na to, aby si vyjadril objem rotačného valca?

Ž: *Vzorec si pamätám zo základnej školy. Pre objem platí*

$$V = \pi r^2 v.$$

Potrebujem teda poznať polomer r podstavy a výšku v valca.

U: To ale znamená, že vzorec je analogický ako vzorec na výpočet objemu hranola.

Ž: *Ako analogický? Veď pre hranol je objem vyjadrený v tvare $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy.*

U: A čo je podstavou rotačného valca?

Ž: *No predsa kruh s polomerom r.*

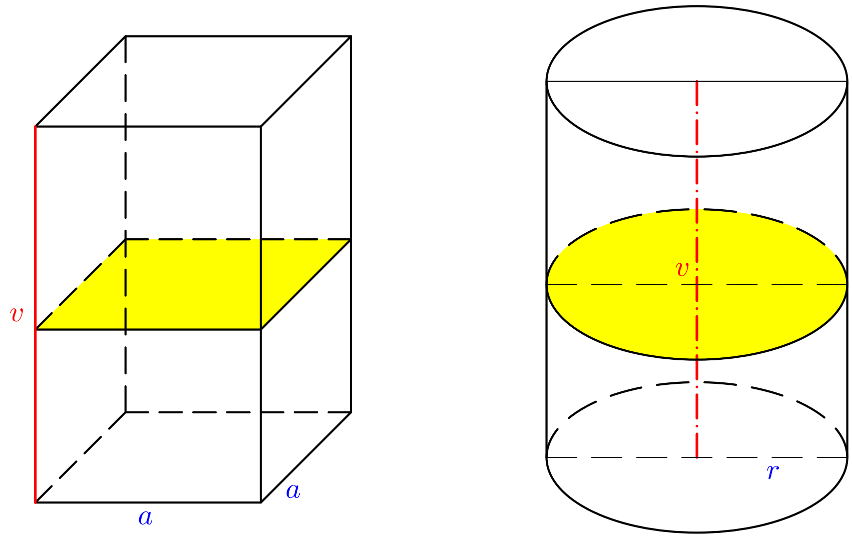
U: Aký je teda obsah podstavy valca?

Ž: *Obsah kruhu sa vypočíta podľa vzorca $S_p = \pi r^2$.*

U: No vidíš. Takže aj vzorec $V = \pi r^2 v$ sa dá prepísať do tvaru $V = S_p \cdot v$. Objem hranola a rotačného valca sú vyjadrené tým istým vzorcom.

Ž: *Nevadí, že majú za podstavy rôzne rovinné geometrické útvary?*

U: Nie. Podľa ***Cavalieriho princípu***, ak dve telesá majú rovnakú výšku a každá rovina rovnobežná s ich podstavami ich pretne v rovinných geometrických útvaroch s rovnakým obsahom, tak telesá majú rovnaký objem.



Ž: *Aha! To ako keby som zobral pravidelný štvorboký hranol a rotačný valec s rovnakou telesovou výškou. Ak obsah štvorca, ktorý je podstavou hranola bude rovnaký ako obsah kruhu, tak hranol a valec majú rovnaký objem.*

U: Hranol môže byť samozrejme aj 15-boký. Dôležité je porovnávanie obsahov podstáv.

Ž: *Prečo je potom vzorec pre objem valca v tvare $V = \pi r^2 v$?*

U: Podstavou každého valca je kruh. Jeho obsah závisí iba od veľkosti polomeru kruhu. Podstavou hranola je však ľubovoľný n-uholník. Obsah podstavy v tomto prípade závisí od toho, aký n-uholník to je. Pre každé n môže byť iný a navyše, pre dané n obsah podstavy závisí ešte aj od tvaru mnohouholníka.

Ž: *Dobre. Súvislosti medzi objemom hranola a rotačného valca som pochopil.*

U: Vyjadríme ešte povrch rotačného valca. Z čoho pozostáva?

Ž: *Mali by ho tvoriť dva kruhy ako podstavy valca a plášť.*

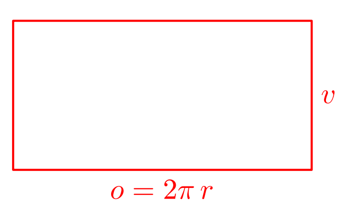
U: Vzorec na výpočet povrchu rotačného valca sa dá zapísať v tvare

$$S = 2S_p + S_{pl},$$

kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} obsah plášťa. Niečo z toho by si mal byť schopný vyjadriť.

Ž: *Jednoduchšie je vyjadrenie obsahu podstáv. Keďže sú to kruhy s polomerom r, obe podstavy majú obsah $S_p = \pi r^2$. Dokonca si pamätám aj obsah plášťa. Má vyjadrenie $S_{pl} = 2\pi r v$. Netuším však, prečo.*

U: Predstav si, že z rotačného valca odstrihneš podstavy a plášť valca rozstrihneš pozdĺž strany AD. Aký rovinný geometrický útvar vznikne, ak tento plášť rozvinieš do roviny?



Ž: *Vravíte, že strihám po obvode kruhu? Už to mám. Bude to obdĺžnik.*

U: Vieš vysvetliť, aké má rozmery?

Ž: *Dĺžka obdĺžnika musí byť rovná obvodu kruhu, ktorý je podstavou. Obvod kruhu s polomerom r je $2\pi r$. Šírka obdĺžnika je vlastne výškou rotačného valca v.*

U: Ako vieme, obsah obdĺžnika vypočítame ako súčin dĺžok dvoch jeho susedných strán. Tieto dĺžky sme však teraz určili. Preto sa ***obsah plášťa*** rotačného kužeľa dá vyjadriť vzorcom $S_{pl} = 2\pi rv$.

Ž: *Čiže vzorec pre povrch rotačného valca si mám pamätať v tvare*

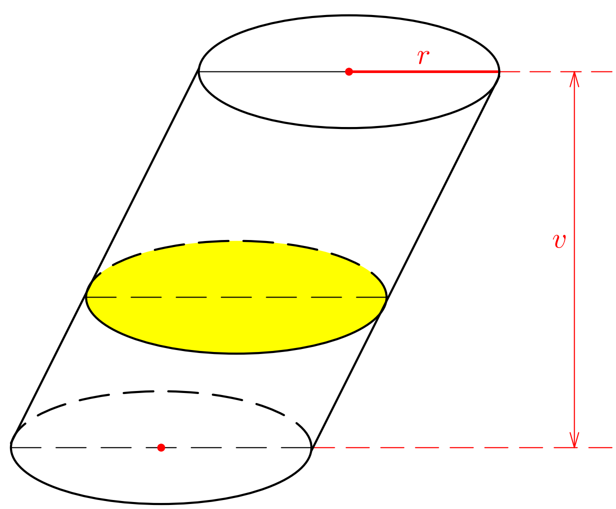
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv.$$

Druhý člen vyzerá podobne ako prvý. V súčine je jeden polomer nahradený výškou.

U: Čo myslíš, existuje aj valec, ktorý nie je rotačný?

Ž: *Podľa mňa, nie.*

U: Ukážeme si, že existuje. Predstav si, že šikmo na seba naukladáš niekoľko desaťkorunových mincí. Tak, ako je to na obrázku. Vznikne ***valec***, ktorý je ***nerotačný***. Nemá os symetrie, preto neexistuje rovinný útvar, rotáciou ktorého by vznikol.

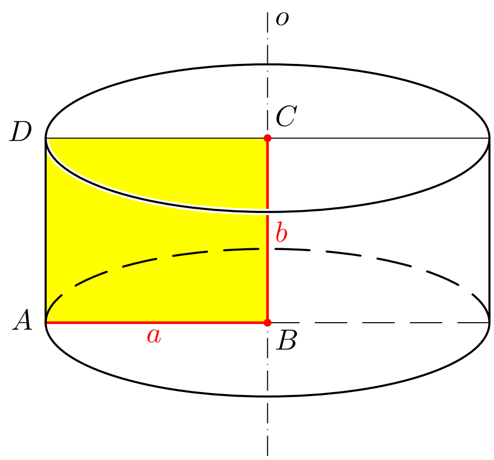


Ž: *Vzorec pre objem tohto valca by však mal byť rovnaký, ako pre rotačný valec. Veď výška je rovnaká a v každej rovine rovnobežnej s podstavou vznikne kruh.*

U: Máš pravdu. Aj teraz pre objem valca platí vzorec $V = \pi r^2 v$. Vypočítať jeho povrch, nie je však ľahkou úlohou. A nie je to ani predmetom tejto témy. Uviedol som to iba ako zaujímavosť. Aby si mal predstavu, že okrem rotačných valcov existujú aj nerotačné valce.

Príklad 1: *Vypočítajte pomer objemov a povrchov rotačných valcov, ktoré vzniknú rotáciou obdĺžnika $ABCD$ so stranami dĺžok $a = |AB|$, $b = |BC|$ okolo strany AB, respektíve BC.*

U: Začneme valcom, ktorý vznikne rotáciou obdĺžnika okolo strany BC.



U: Objem rotačného valca vypočítame podľa vzorca $V = \pi r^2 v$. Aký polomer podstavy a výšku má valec na obrázku?

Ž: *Keďže vrchol A obdĺžnika sa pohybuje okolo osi BC po kružnici, polomerom podstavy je dĺžka strany AB. Teda $r = a$. Dĺžka strany BC predstavuje výšku valca. Platí $v = b$.*

U: Po dosadení týchto hodnôt do vzorca pre objem valca dostávame

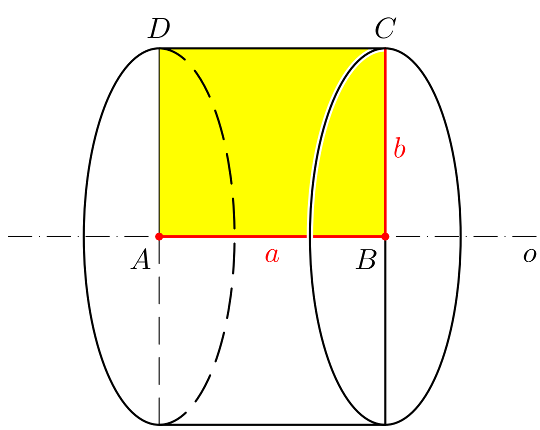
$$V_1 = \pi r^2 v = \pi a^2 b.$$

Zároveň vyjadríme povrch tohto valca.

Ž: *Vzorec pre povrch valca je $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Polomer podstavy a výšku valca poznám. Povrch valca môžem preto vyjadriť v tvare*

$$S_1 = 2\pi a^2 + 2\pi ab.$$

U: To isté urobíme pre druhý valec, ktorý vznikne rotáciou toho istého odĺžnika. Osou otáčania je teraz priamka AB.



Ž: *Pri rotácii okolo osi AB sa vrchol D obdĺžnika pohybuje po kružnici s polomerom b. Preto je polomerom podstavy strana b rotujúceho obdĺžnika. Výškou valca je strana a. Pre objem tohto valca platí*

$$V_2 = \pi r^2 v = \pi b^2 a.$$

U: Môžeš vypočítať pomer objemov $V_1 : V_2$.

Ž: *Dosadím vyjadrenia objemov a dostávam*

$$V_1 : V_2 = \frac{\pi a^2 b}{\pi b^2 a} = \frac{a}{b},$$

lebo zlomok môžem krátiť výrazom πab.

U: To znamená, že ***objemy valcov sú v pomere polomerov ich podstáv***. Vyjadri ešte povrch druhého valca.

Ž: *Opäť použijem vzorec $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$, kde za polomer podstavy dosadím premennú b. Výška je určená stranou a. Pre povrch druhého valca preto platí*

$$S_2 = 2\pi b^2 + 2\pi ba.$$

U: Vyjadríme pomer povrchov oboch valcov. Platí

$$S_1 : S_2 = \frac{2\pi a^2 + 2\pi ab}{2\pi b^2 + 2\pi ba}.$$

Ž: *To je výsledok? Na rozdiel od objemov, nie je to nič pekné.*

U: Neboj sa, výraz upravíme. Čo sa dá vybrať pred zátvorku z výrazu v čitateli zlomku?

Ž: *Vyberiem výraz $2\pi a$. V zátvorke zostane výraz $a + b$.*

U: Zrejme tušíš, že z výrazu $2\pi b^2 + 2\pi ba$ v menovateli zlomku vyberieme pred zátvorku výraz $2\pi b$.

Ž: *Aj teraz zostane v zátvorke výraz $a + b$.*

U: Tieto úpravy teraz zapíšeme do tvaru v rámčeku.

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi a^2 + 2\pi ab}{2\pi b^2 + 2\pi ba} = \frac{2\pi a(a+b)}{2\pi b(b+a)}}$$

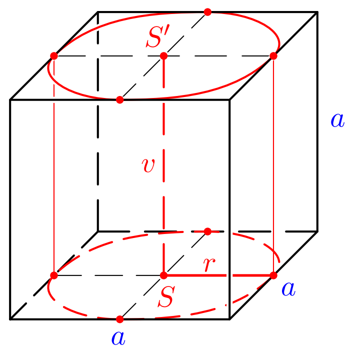
Ž: *Zaujímavé. Aj teraz dostanem ako podiel zlomok $\frac{a}{b}$, lebo výraz $a+b$ môžem vykrátiť. Krátiť môžem aj reálne číslo 2π. Zostane spomínaný zlomok.*

U: ***Povrchy*** týchto dvoch valcov ***sú tiež v pomere polomerov ich podstáv***.

Príklad 2: *Vypočítajte, koľko percent objemu kocky predstavuje objem valca vpísaného do kocky. Podstavy valca sú kruhy vpísané do dvoch protiľahlých stien kocky s hranou a.*

U: Máš predstavu ako vpíšeme valec do kocky?

Ž: *Podstavy valca majú byť podľa zadania kruhy vpísané do štvorcov v dvoch rovnobežných stenách kocky. Stredmi kruhov tak budú stredy štvorcov, ktoré sú spodnou a hornou stenou kocky. Polomer podstavy valca bude polovicou hrany kocky.*



U: Výška valca je určená vzdialenosťou jeho podstáv, ale to je hrana AE kocky. Preto platí $r = \frac{a}{2}$ a $v = a$.

Ž: *Teda už viem vyjadriť objem valca. Dosadím do vzorca $V = \pi r^2 v$ a dostávam*

$$V = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \pi \frac{a^3}{4}.$$

Zlomok som umocnil a vynásobil premennou a.

U: Vzorec pre objem kocky s hranou dĺžky a by si tiež mal vedieť.

Ž: *Objem kocky vypočítam podľa vzorca $V = a^3$.*

U: Objem kocky predstavuje pre ďalšie výpočty základ, teda sto percent. Máme vypočítať, koľko percent z objemu kocky predstavuje objem valca $\pi\frac{a^3}{4}$. Máš odhad, či to bude viac, alebo menej ako sto percent?

Ž: *Valec je vnútri kocky. Má menší objem ako kocka. Preto by mal byť výsledok menej než sto percent.*

U: Medzi počtom percent a objemom je priama úmera. Čím väčší je objem, tým viac percent z objemu kocky predstavuje.

Ž: *Aha! Tak na výpočet percent použijem trojčlenku.*

U: Správne. Z priamej úmernosti platí, že pomer percent je rovnaký ako pomer k nim prislúchajúcich objemov. Počet percent, ktoré predstavuje objem valca vpísaného do kocky, označíme ako neznámu x. Potom platí

$$\frac{x}{100} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{a^3}.$$

Vyjadri neznámu x.

Ž: *Vykrátim tretie mocniny dĺžky hrany a. Dostávam*

$$\frac{x}{100} = \frac{\pi}{4}.$$

Rovnicu teraz vynásobím číslom sto

$$x = \frac{\pi}{4} \cdot 100.$$

U: Po krátení číslom štyri dostaneme výsledok

$$x = 25\pi.$$

Vieš koľko je to približne percent?

Ž: *Číslo π má približnú hodnotu 3,14. Po vynásobení číslom 25 dostanem výsledok* $x \approx 78{,}5$ **percent**.

U: Objem valca vpísaného do kocky je teda o máličko väčší ako tri štvrtiny objemu kocky.

Príklad 3: *Vypočítajte povrch rotačného valca s objemom* 5 *litrov, ak výška valca je polovicou priemeru podstavy valca.*

U: Zo zadania úlohy vieme, že objem rotačného valca je päť litrov. Ako vypočítame objem rotačného valca?

Ž: *Objem valca vypočítame podľa vzorca*

$$V = \pi r^2 v,$$

kde r je polomer podstavy a v výška rotačného valca. Nič z toho nepoznáme.

U: Výška v valca je podľa zadania polovicou priemeru podstavy valca. Aký je vzťah medzi výškou a polomerom podstavy?

Ž: *Priemer podstavy je dvojnásobkom polomeru. Preto sú výška a polomer podstavy rovnaké.*

$$v = r$$

U: Tento poznatok nám umožňuje vyjadriť objem rotačného valca iba pomocou polomeru podstavy r. Platí

$$V = \pi r^2 v = \pi r^2 r = \pi r^3.$$

Ž: *Tak, a teraz už môžem za objem dosadiť zadanú hodnotu.*

U: Nezabudni na to, že objem je zadaný v litroch. Polomer podstavy musíš vyjadriť v dĺžkových jednotkách.

Ž: *Liter je to isté ako decimeter kubický. Za objem dosadím* 5 dm^3 *a dostávam rovnicu*

$$5 = \pi r^3.$$

Vydelím reálnym číslom π a nakoniec odmocním. Polomer podstavy má veľkosť

$$r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\ \mathrm{dm}.$$

U: Môžeme vypočítať povrch rotačného valca. Vzorec na jeho výpočet je $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Skús tento vzorec najskôr upraviť. Vieme totiž, že polomer podstavy a výška sú rovnaké.

Ž: *Do druhého sčítanca za výšku v dosadím polomer r a dostávam*

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r r = 4\pi r^2.$$

To preto, lebo druhý sčítanec v súčte je rovnaký ako prvý sčítanec $2\pi r^2$.

U: Za polomer stačí dosadiť vypočítanú číselnú hodnotu $\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$. Pre povrch valca dostávame

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right)^2 .$$

Ž: *Použijeme kalkulačku?*

U: Je to jeden z možných prístupov k riešeniu. Ukážeme si však spôsob, pri ktorom daný číselný výraz upravíme na jednoduchší tvar. Využijeme pritom pravidlá pre počítanie s mocninami a odmocninami. Tretiu odmocninu umocníme tak, že umocníme zlomok pod odmocninou.

$$S = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right)^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{25}{\pi^2}}.$$

Číslo π pred treťou odmocninou môžeme zapísať v tvare $\sqrt[3]{\pi^3}$.

Ž: *Aha! Chcete ho dať pod odmocninu, aby sa vykrátilo.*

U: Máš pravdu. Spomenuté úpravy sa teda dajú zapísať v tvare

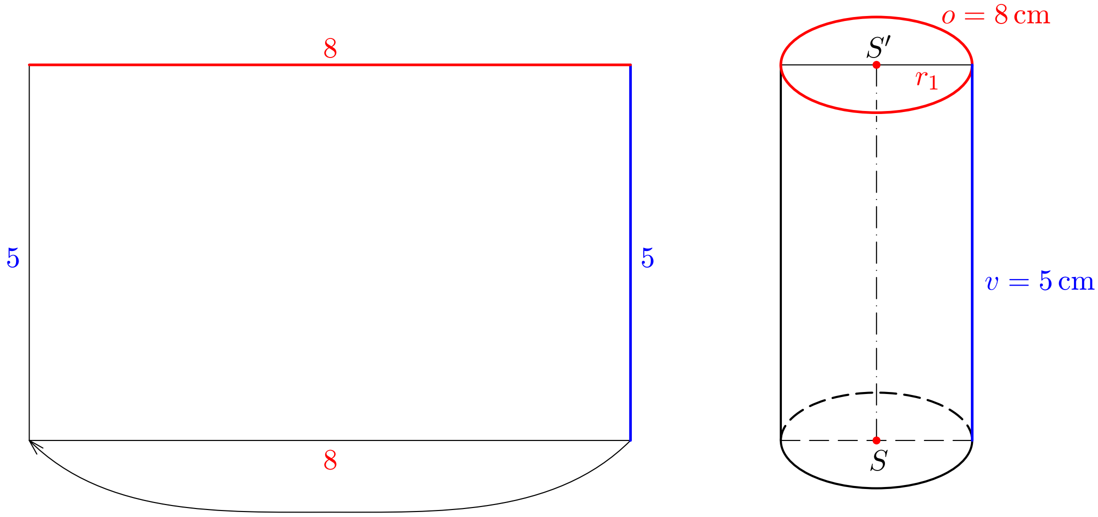
$$S = 4\sqrt[3]{\pi^3}\sqrt[3]{\frac{25}{\pi^2}} = 4\sqrt[3]{\frac{25\pi^3}{\pi^2}} = 4\sqrt[3]{25\pi}\ \mathrm{dm}^2.$$

Ž: *Povrch valca je teda* $4\sqrt[3]{25\pi}$ *decimetrov štvorcových.*

Príklad 4: *Vypočítajte, o koľko sa líšia objemy rotačných valcov, ktorých plášte vznikli zvinutím odĺžnika s rozmermi* 8 cm *a* 5 cm.

Ž: *Nerozumiem celkom dobre úlohe. Ktorý je ten druhý valec? Veď jeden obdĺžnik vytvorí plášť len jednému valcu.*

U: Záleží na tom, ktorou stranou zlepíš obdĺžnik, aby vytvoril plášť rotačného valca. Dá sa to dvomi spôsobmi. Začneme najskôr prípadom, keď zlepíme protiľahlé strany obdĺžnika, ktoré majú dĺžku 5 centimetrov.



Ž: *Aha! Tak, to som si neuvedomil. Teraz je to už podľa obrázka ľahké. Výška valca má v tomto prípade dĺžku* 5 *centimetrov. Ale ako určím polomer podstavy?*

U: Polomer súvisí so stranou obdĺžnika dĺžky 8 centimetrov. Pozri sa ešte raz na obrázok. Aký súvis má táto strana s podstavou?

Ž: *Jasné! Táto strana tvorí obvod podstavy.*

U: Keďže obvod podstavy vypočítame podľa vzorca $o_1 = 2\pi r_1$, tak po dosadení reálneho čísla 8 za obvod môžeme vypočítať polomer.

Ž: *Polomer bude podielom obvodu a dvojnásobku čísla* π.

$$r_1 = \frac{o_1}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

U: Dobre. Máme polomer podstavy a výšku, tak vypočítajme objem rotačného valca.

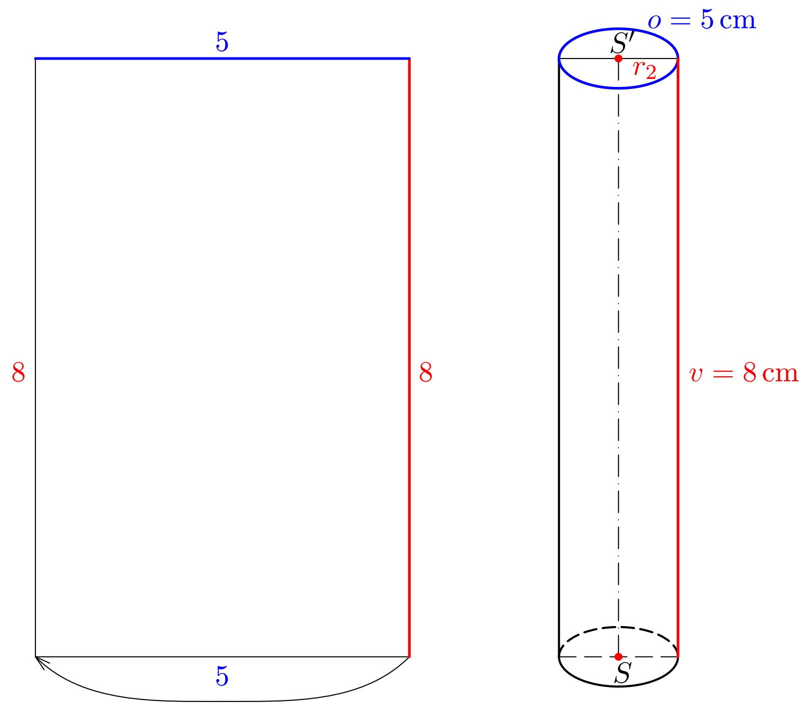
Ž: *Vzorec na výpočet objemu rotačného valca je* $V = \pi r^2 v$. *Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$V_1 = \pi r_1^2 v_1 = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 5 = \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot 5 = \frac{80}{\pi}.$$

Umocnil som zlomok, čísla vynásobil a vykrátil prvú a druhú mocninu reálneho čísla π.

U: No vidíš! Nakoniec si to zvládol na celkom slušnej úrovni.

U: Vypočítajme teraz objem rotačného valaca v druhom prípade. Obdĺžnik zlepíme protiľahlými stranami dĺžky 8 centimetrov.



Ž: *To bude zároveň výška rotačného valca. Strana dĺžky* 5 *centimetrov predstavuje obvod podstavy. Preto pre polomer podstavy v tomto prípade platí*

$$r_2 = \frac{o_2}{2\pi}.$$

U: Obvod podstavy je 5 centimetrov, tak ako si povedal. Preto polomer podstavy bude mať veľkosť

$$r_2 = \frac{5}{2\pi}.$$

Vypočítať objem už nebude problém.

Ž: *Do vzorca pre objem dosadím číselné hodnoty za polomer podstavy a výšku valca. Dostávam vyjadrenie*

$$V_2 = \pi r_2^2 v_2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2\pi}\right)^2 \cdot 8 = \pi \cdot \frac{25}{4\pi^2} \cdot 8 = \frac{50}{\pi}.$$

U: Ako znela úloha?

Ž: *Vypočítať rozdiel objemov týchto dvoch rotačných valcov.*

U: Takže je to rozdiel $\Delta V = V_1 - V_2$.

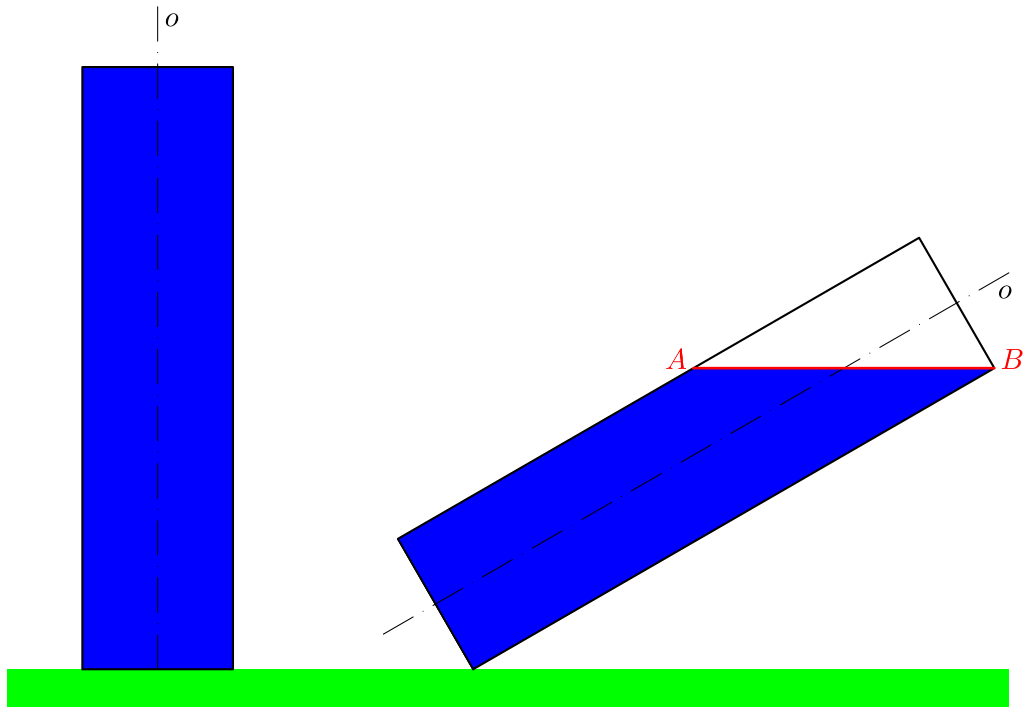
Ž: *Dosadím vypočítané hodnoty a zlomky odpočítam*

$$\Delta V = \frac{80}{\pi} - \frac{50}{\pi} = \frac{30}{\pi}.$$

U: Rozdiel objem dvoch rotačných valcov, ktorých plášte vznikli zvinutím obdĺžnika s rozmermi 8 a 5 centimetrov je $\frac{30}{\pi}$ ***centimetrov kubických***.

Príklad 5: *Plný pohár v tvare valca s polomerom podstavy r a výškou $v = 8r$ nachýlime tak, že hladina vody zviera s osou pohára uhol $\varphi = 30°$. Aká časť objemu vody sa vyleje?*

U: Načrtneme osový rez pohára tvaru valca pred a po vylievaní vody.



Ž: *Hladinu vody po naklonení pohára si ani neviem predstaviť. Bude to elipsa? Ako to potom súvisí s valcom, keď jednou podstavou bude elipsa? Existuje vôbec vzorec na výpočet objemu zrezaného valca?*

U: Príliš veľa otázok naraz. Áno, hladina vody má po naklonení pohára tvar elipsy. Je to však pre samotné riešenie úlohy nepodstatné. Valec rozdelíme na dve časti rovinou rovnobežnou s rovinou, v ktorej je dno pohára. Táto rovina bude zároveň obsahovať bod A hladiny vody.

Ž: *Nechápem, ako nám to pomôže pri riešení úlohy.*

U: Časť pohára, ktorá je prázdna, je polovicou objemu valca, ktorého jedna podstava obsahuje bod A a druhá podstava bod B.

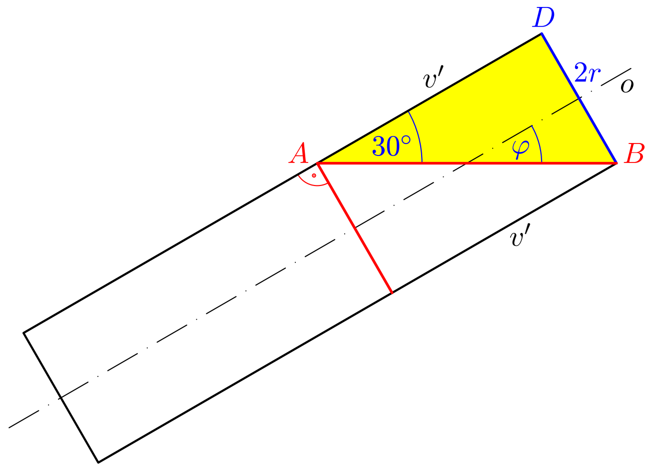
Ž: *Prečo?*

U: Úsečka AB rozdeľuje obdĺžnik na dva zhodné trojuholníky. Preto aj hladina vody v tvare elipsy rozdeľuje valec na dve zhodné časti.

Ž: *Takže to, čo sa vylialo je polovicou objemu tohto valca?*

U: Presne tak. Vypočítať objem tohto valca už nebude problém.

Ž: *Vzorec na výpočet objemu má tvar $V = \pi r^2 v$. Nepoznám však výšku valca.*



U: Vypočítame ju z pravouhlého trojuholníka ADB. Odvesna AD má neznámu dĺžku v' a dĺžka odvesny DB je dvojnásobkom polomeru r podstavy valca.

Ž: *Ale preponu nepoznáme.*

U: Zo zadania vieme, že hladina vody zviera s osou valca uhol veľkosti 30 stupňov. Takú istú veľkosť má aj uhol BAD, lebo sú to uhly ***súhlasné***. Ktorú goniometrickú funkciu využiješ na výpočet neznámej výšky?

Ž: *Dve odvesny pravouhlého trojuholníka spája funkcia kotangens. Je to pomer priľahlej a protiľahlej odvesny. Preto platí*

$$\mathrm{cotg}\varphi = \frac{v'}{2r}.$$

U: Ak rovnicu vynásobíme výrazom $2r$, tak dostaneme vyjadrenie výšky v tvare

$$v' = 2r\mathrm{cotg}\varphi = 2r\mathrm{cotg}30°.$$

Hodnota funkcie kotangens pre uhol veľkosti 30 stupňov je rovná číslu $\sqrt{3}$.

Ž: *Dosadím a pre výšku dostávam*

$$v' = 2\sqrt{3}r.$$

U: Táto výška a polomer r podstavy určujú valec, ktorého polovica objemu predstavuje vodu, ktorá sa po naklonení pohára vyliala von. Preto platí

$$V' = \frac{\pi r^2 v'}{2}.$$

Po dosadení za výšku dostávame

$$V' = \frac{\pi r^2 v'}{2} = \frac{\pi r^2 \cdot 2\sqrt{3}r}{2}.$$

Ž: *Dvojky vykrátim a súčin druhej mocniny polomeru r a polomeru r nahradím treťou mocninou polomeru. Preto mám*

$$V' = \sqrt{3}\pi r^3.$$

U: Našou úlohou je určiť, akú časť z objemu vody pred naklonením predstavuje tento objem.

Ž: *Výška vody vo valci pred naklonením je* $v = 8r$. *Objem vody preto bude*

$$V = \pi r^2 v = \pi r^2 \cdot 8r = 8\pi r^3.$$

Tento objem predstavuje sto percent.

U: Máš pravdu. Medzi počtom percent a objemom je priama úmera. Čím väčší je objem vyliatej vody, tým viac percent z objemu valca predstavuje.

Ž: *Aha! Tak na výpočet percent použijem trojčlenku.*

U: Správne. Z priamej úmernosti platí, že pomer percent je rovnaký ako pomer k nim prislúchajúcich objemov. Počet percent, ktoré predstavuje objem vody, ktorá sa z pohára vyliala, označíme ako neznámu x. Potom platí

$$\frac{x}{100} = \frac{\sqrt{3}\pi r^3}{8\pi r^3}.$$

Vyjadri neznámu x.

Ž: *Vykrátim tretie mocniny polomeru* r, *ako aj číslo* π. *Dostávam*

$$\frac{x}{100} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Rovnicu teraz vynásobím číslom sto a mám

$$x = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 100.$$

U: Po krátení číslom osem dostaneme výsledok

$$x = 12{,}5\sqrt{3}.$$

Vieš koľko je to približne percent?

Ž: *Číslo* $\sqrt{3}$ *má približnú hodnotu* $1{,}73$. *Po vynásobení číslom* $12{,}5$ *dostanem výsledok* $x \approx 21{,}6$ **percent**.

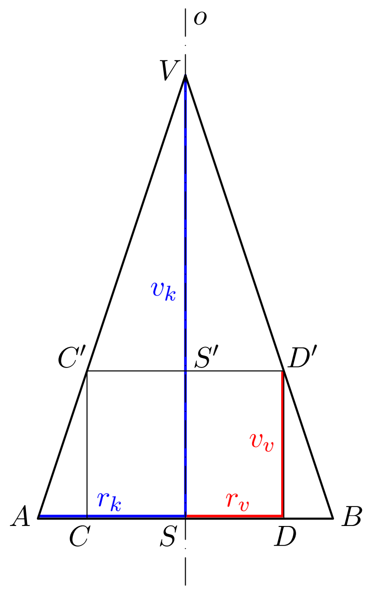
U: Objem vody, ktorá sa vyliala po naklonení pohára je teda o máličko väčší ako pätina objemu pohára.

Príklad 6: *Do rotačného kužeľa, ktorého polomer podstavy je* 6 cm *a výška* 18 cm *je vpísaný valec. Výška vpísaného valca je* 6 cm*. Vypočítajte objem valca.*

U: Čo znamená, že valec je vpísaný do kužeľa?

Ž: *Podstava valca je časťou podstavy kužeľa. Stredy podstáv splývajú. Horná podstava valca sa svojim okrajom dotýka plášťa rotačného kužeľa.*

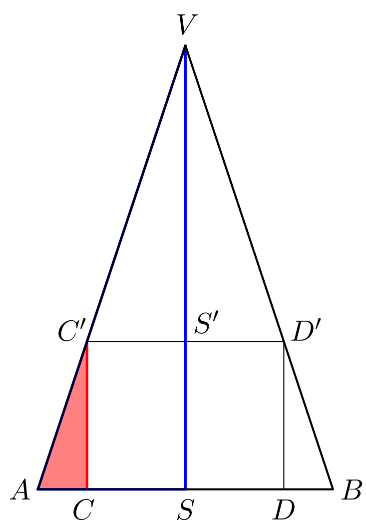
U: Máš pravdu. Stačí, ak zobrazíme iba rez týchto telies obsahujúci ich osi. Osovým rezom týchto telies je rovnoramenný trojuholník, do ktorého je vpísaný obdĺžnik. Jedna strana obdĺžnika je časťou základne rovnoramenného trojuholníka.



U: Urč dĺžky úsečiek, ktoré na obrázku poznáš!

Ž: *Úsečka* AS *predstavuje polomer podstavy rotačného kužeľa, jeho výška je určená úsečkou* SV*. Preto* $|AS| = r_k = 6$ cm **a** $|SV| = v_k = 18$ cm*.*

U: Výšku valca určuje úsečka SS', ale aj úsečka CC'. Obe majú teda dĺžku $v_v = |SS'| = |CC'| = 6$ cm. Z údajov potrebných na výpočet objemu valca nepoznáme polomer jeho podstavy $r_v = |SC|$.



Ž: *Nebude to polovica polomeru podstavy kužeľa?*

U: Nie. Na určenie polomeru podstavy valca využijeme podobnosť trojuholníkov ACC' a ASV.

Ž: *Prečo sú podobné?*

U: Ako vieme, podobné trojuholníky sa zhodujú vo všetkých zodpovedajúcich si uhloch. V našom prípade majú trojuholníky spoločný uhol pri vrchole A a zodpovedajúce uhly ACC' a ASV sú pravé. Z toho vyplýva, že trojuholníky sú podobné.

Ž: *A ako to súvisí s polomerom podstavy valca?*

U: Vypočítame najskôr dĺžku úsečky AC. Pomer dĺžok zodpovedajúcich si strán dvoch podobných trojuholníkov musí byť totiž rovnaký. Preto platí

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{|CC'|}{|SV|}.$$

Vyjadri dĺžku úsečky AC.

Ž: *Radšej si to prepíšem pomocou označení výšok a polomeru podstavy kužeľa.*

$$\frac{|AC|}{r_k} = \frac{v_v}{v_k}.$$

Rovnicu vynásobím polomerom r_k a dosadím číselné hodnoty. Dostávam

$$|AC| = \frac{v_v r_k}{v_k} = \frac{6 \cdot 6}{18} = 2 \text{ cm}.$$

Úsečka AC má dĺžku dva centimetre.

U: Polomer podstavy valca určíme ako rozdiel dĺžok úsečiek AS a AC. Platí

$$r_v = |AS| - |AC| = 6 - 2 = 4 \text{ cm}.$$

Teraz už môžeme vypočítať objem valca. Aký je vzorec na jeho výpočet?

Ž: *Objem valca vypočítame podľa vzorca*

$$V = \pi r_v^2 v_v.$$

Dosadím hodnoty $r_v = 4$ cm a $v_v = 6$ cm. Pre objem platí

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = \pi \cdot 16 \cdot 6 = 96\pi \text{ cm}^3.$$

U: Objem valca vpísaného do kužeľa je 96π ***centimetrov kubických***.

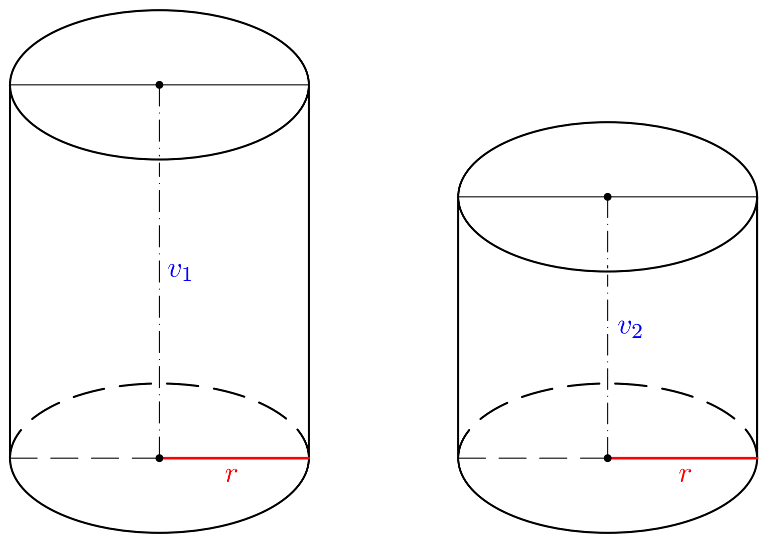
Príklad 7: *Dva rotačné valce majú zhodné podstavy s polomerom r. Obsah plášťa jedného z nich sa rovná povrchu druhého valca. Aký je rozdiel ich objemov?*

U: Máš predstavu, ktorý z valcov je nižší?

Ž: *Asi druhý.*

U: Prečo?

Ž: *V jeho prípade musím do povrchu zarátať aj podstavy. Jeho plášť má preto menší obsah. Polomery podstáv sú rovnaké, teda výška druhého valca musí byť menšia.*



U: V podstate si pracoval so vzorcami pre povrch valca a obsah jeho plášťa. Povrch druhého valca môžeme podľa označenia na obrázku vyjadriť v tvare

$$S_2 = 2\pi r^2 + 2\pi r v_2.$$

Obsah plášťa prvého valca vyjadri sám.

Ž: *Využijem vzorec*

$$S_{pl_1} = 2\pi r v_1.$$

Načo sú nám povrchy valcov, keď máme vypočítať rozdiel ich objemov?

U: Na určenie rozdielu objemov budeme potrebovať, aký je vzťah medzi výškami týchto dvoch valcov. Určíme ho práve na základe povrchu druhého valca a obsahu plášťa prvého valca. Sú rovnaké, ako to vyplýva zo zadania. Preto platí

$$S_{pl_1} = S_2.$$

Ž: *Rozumiem. Do rovnice dosadím nami získané vyjadrenia a dostávam*

$$2\pi r v_1 = 2\pi r^2 + 2\pi r v_2.$$

Rovnicu po vydelení výrazom $2\pi r$ upravím na tvar

$$v_1 = r + v_2.$$

U: No vidíš! Získali sme potrebný vzťah. Teraz už môžeme vypočítať rozdiel objemov. Vzorec pre objem valca by si mal poznať.

Ž: *Objem valca vypočítame podľa vzorca*

$$V = \pi r^2 v.$$

U: Rozdiel objemov zadaných dvoch valcov sa preto dá vyjadriť v tvare

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \pi r^2 v_1 - \pi r^2 v_2.$$

Ž: *Za výšku v_1 dosadím odvodený vzťah $v_1 = r + v_2$. Dostávam*

$$\Delta V = \pi r^2 v_1 - \pi r^2 v_2 = \pi r^2 (r + v_2) - \pi r^2 v_2.$$

U: Roznásobíme a rovnaké členy odčítame

$$\Delta V = \pi r^3 + \pi r^2 v_2 - \pi r^2 v_2 = \pi r^3.$$

Ž: *Zaujímavé. Rozdiel objemov valcov nezávisí od ich výšok.*

U: Za daných podmienok nie. Preto sa povrch jedného rotačného valca rovnal obsahu plášťa druhého. Ich objemy sa tak líšia o πr^3.