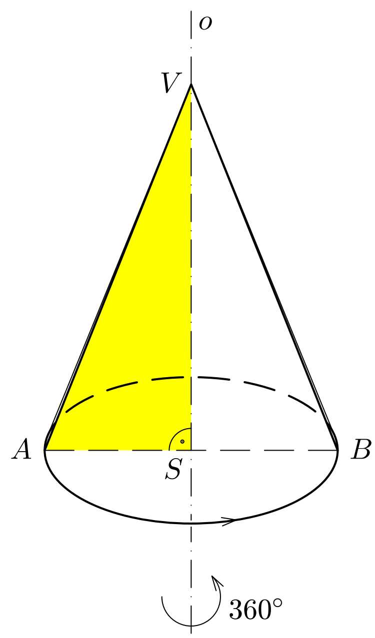
Objem a povrch rotačného kužeľa

RNDr. Marián Macko

Ž: *Prečo má kužeľ prívlastok rotačný?*

U: Vysvetľuje podstatu vzniku tohto telesa. Rotačný kužeľ vznikne ***rotáciou***, čiže otočením, ***pravouhlého trojuholníka okolo priamky***, ktorá obsahuje jednu odvesnu pravouhlého trojuholníka.



Ž: *Trojuholník zrejme otáčame v priestore o* 360 *stupňov.*

U: Áno. Priamku, okolo ktorej otáčame, nazývame ***osou kužeľa***.

Ž: *Mám os kužeľa chápať ako os symetrie kužeľa?*

U: Máš pravdu. Rotačný kužeľ je osovo súmerný podľa svojej osi. Súmernosť sa prejaví aj v každom rovinnom útvare, ktorý vznikne prienikom rotačného kužeľa s rovinou. Tento prienik nazývame ***osový rez rotačného kužeľa***. Rovina rezu však musí obsahovať os kužeľa.

Ž: *Aha! Osovým rezom nášho rotačného kužeľa na obrázku je rovnoramenný trojuholník ABV so základňou AB. Táto úsečka predstavuje* **priemer podstavy rotačného kužeľa**.

U: Jej polovicou je polomer podstavy. Inak povedané, ***polomerom podstavy*** je dĺžka tej odvesny pravouhlého trojuholníka, ktorá je kolmá na os otáčania. To preto, lebo bod A sa pri rotácií pohybuje po kružnici s polomerom rovnajúcim sa dĺžke odvesny AS pravouhlého trojuholníka.

Ž: *Úsečka AS teda vytvorí kruh s tým istým polomerom.*

U: Tento kruh nazývame ***podstavou rotačného kužeľa***.

Ž: *Podstava musí byť vždy v rovine kolmej na os kužeľa?*

U: Pri rotačnom kuželi áno.

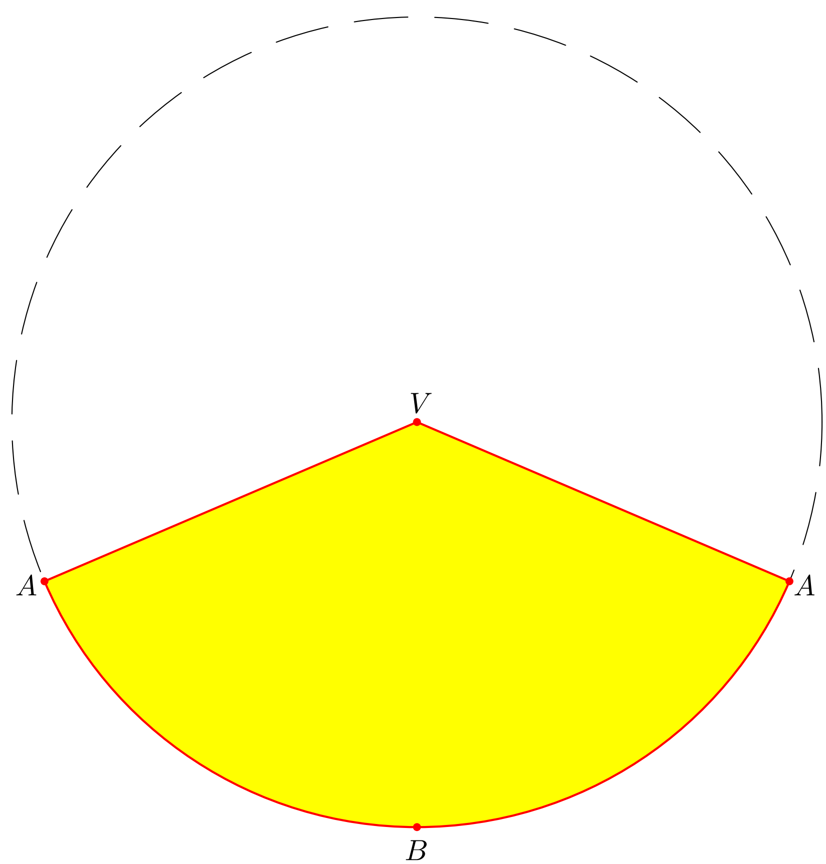
U: Prepona AV rotujúceho pravouhlého trojuholníka vytvorí pri otáčaní plochu, ktorú nazývame ***plášť rotačného kužeľa***.

Ž: *Akým geometrickým útvarom je plášť rotačného kužeľa?*

U: Bod V leží na osi rotácie, preto pri otáčaní nemení svoju polohu. Bod A tak, ako sme už povedali, sa pohybuje po kružnici s polomerom podstavy kužeľa. V každom okamihu rotácie je však jeho vzdialenosť od bodu V konštantná.

Ž: *Jasné. Táto vzdialenosť je vždy rovná dĺžke prepony pravouhlého trojuholníka. Rotáciou úsečky AV musí vzniknúť kruh. Polomerom kruhu je dĺžka prepony.*

U: Ideš na to dobre. Nebude to však celý kruh, ale iba jeho časť. ***Plášťom rotačného kužeľa*** po rozvinutí do roviny je ***kruhový výsek***.



Ž: *Až teraz som si uvedomil, že plášť charakterizujú dva rôzne polomery. Prepona určuje polomer výseku a polomer podstavy kužeľa súvisí s dĺžkou kružnicového oblúka.*

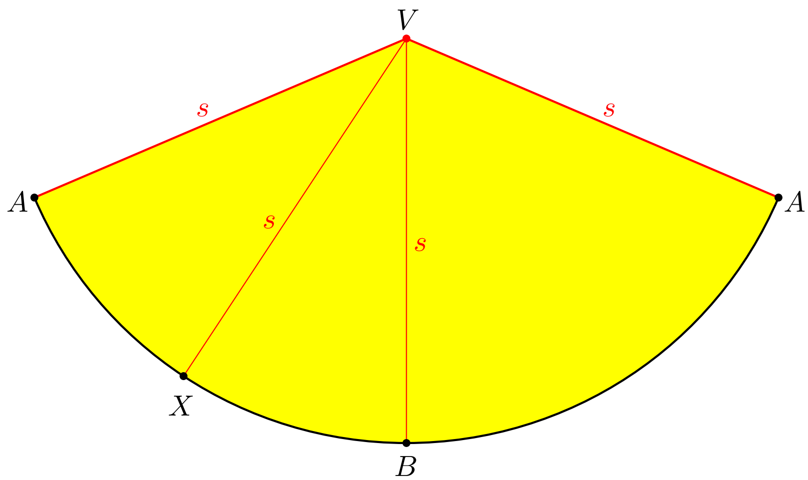
U: Pochopil si správne. Pre jednoduchšie vyjadrovanie nazveme bod V ***vrcholom rotačného kužeľa***. Je priesečníkom osi kužeľa a jeho plášťa.

Ž: *Jeho vzdialenosť od roviny podstavy by mala byť* **výška rotačného kužeľa**. *Výškou kužeľa je úsečka* SV.

U: Posledným pojmom k popisu rotačného kužeľa je ***strana rotačného kužeľa***. Je ňou prepona AV pravouhlého trojuholníka, ktorá pri otáčaní vytvorí plášť kužeľa.

Ž: *Ale kužeľ by mal mať nekonečne veľa strán, nie?*

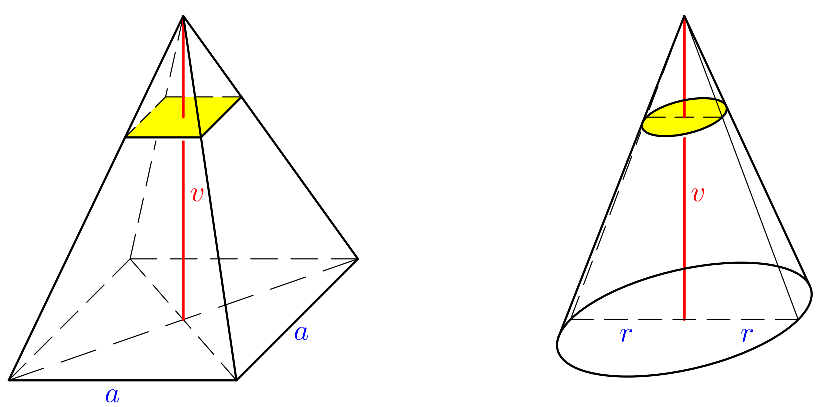
U: Máš pravdu. Každá úsečka spájajúca vrchol s ktorýmkoľvek bodom X na hranici podstavy rotačného kužeľa je jeho stranou.



U: Aby sme mohli vypočítať objem rotačného kužeľa, potrebuje poznať polomer jeho podstavy a výšku kužeľa. Vzorec bude analogický ako pre objem ihlana.

Ž: *Mysleli ste vzorec* $V = \dfrac{1}{3} S_p v$, *kde* S_p *je obsah podstavy a* v *telesová výška?*

U: Áno. Ak totiž dve telesá majú rovnakú výšku a každá rovina rovnobežná s ich podstavami ich pretne v rovinných geometrických útvaroch s rovnakým obsahom, tak na základe ***Cavalieriho princípu*** takéto telesá majú rovnaký objem.



Ž: *Aha! To ako keby som zobral pravidelný štvorboký ihlan a rotačný kužeľ s rovnakou telesovou výškou. Ak obsah štvorca, ktorý je rezom ihlana rovinou rovnobežnou s jeho podstavou bude rovnaký ako obsah kruhu v prípade kužeľa, tak ihlan a kužeľ majú rovnaký objem.*

U: Samozrejme, ihlan však môže byť aj viac-boký. Dôležité je porovnávanie obsahov rezov.

Ž: *V prípade objemu rotačného kužeľa to bude jednoduchšie. Podstavou je stále kruh. Obsah podstavy preto závisí iba na druhej mocnine jeho polomeru. Platí*

$$S_p = \pi r^2.$$

U: Objem rotačného kužeľa s polomerom podstavy r a výškou v sa preto dá vyjadriť v tvare

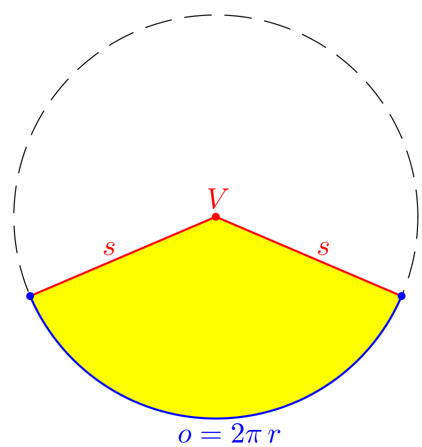
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Ž: *Mohli by ste ešte vysvetliť, ako vypočítame povrch rotačného kužeľa?*

U: Povrch rotačného kužeľa je daný súčtom obsahu podstavy a obsahu plášťa.

$$S = S_p + S_{pl}.$$

Ž: *Obsah podstavy nie je problém. Použijem vzorec $S_p = \pi r^2$, lebo podstavou je kruh s polomerom r. Zaujíma má hlavne obsah plášťa.*



U: Povedali sme, že plášťom kužeľa je kruhový výsek. Stredom kruhového výseku je vrchol V kužeľa. Strana AV kužeľa predstavuje polomer kruhového výseku. Dĺžku tejto strany označíme symbolom s. Potrebujeme ešte zistiť, aká je dĺžka kružnicového oblúka, ktorý prislúcha tomuto kruhovému výseku.

Ž: *Kružnicový oblúk je vlastne obvodom podstavy. Ak má podstava polomer r, tak obvod podstavy je $2\pi r$. Teda aj kružnicový oblúk má dĺžku $2\pi r$.*

U: Obsah kruhového výseku, ktorému prislúcha kružnicový oblúk dĺžky $2\pi r$, označíme ako neznámu S_{pl}. Obsah celého kruhu, z ktorého výsek vznikol, je πs^2. To preto, lebo strana s je polomerom kruhu. Aký kružnicový oblúk prislúcha celému kruhu?

Ž: *Je to celá kružnica s polomerom s, ktorá ohraničuje kruh. Dĺžka kružnice je $2\pi s$. Ako to pomôže k vyjadreniu obsahu kruhového výseku?*

U: Medzi obsahom kruhového výseku a dĺžkou kružnicového oblúka, ktorý kruhovému výseku prislúcha je priama úmernosť.

Ž: *Čím väčší je obsah výseku, tým dlhší oblúk výseku prislúcha?*

U: Áno. Zároveň to znamená, že pomer obsahov dvoch rôznych výsekov je rovnaký ako pomer dĺžok kružnicových oblúkov, ktoré im prislúchajú.

Ž: *Aha! Takže porovnáme celý kruh a výsek.*

U: Preto pre obsah S_{pl} plášťa platí

$$\frac{S_{pl}}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}.$$

Vyjadri obsah plášťa.

Ž: *Rovnicu vynásobím výrazom* πs^2

$$S_{pl} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \cdot \pi s^2.$$

Vykrátim výraz $2\pi s$ *a dostávam*

$$S_{pl} = \pi r s.$$

U: Obsah plášťa teda vypočítame podľa vzorca $S_{pl} = \pi r s$, kde r je polomer podstavy kužeľa a s je strana kužeľa.

Ž: *Je to ako obsah podstavy* πr^2*, ale jedno* r *je nahradené stranou* s*.*

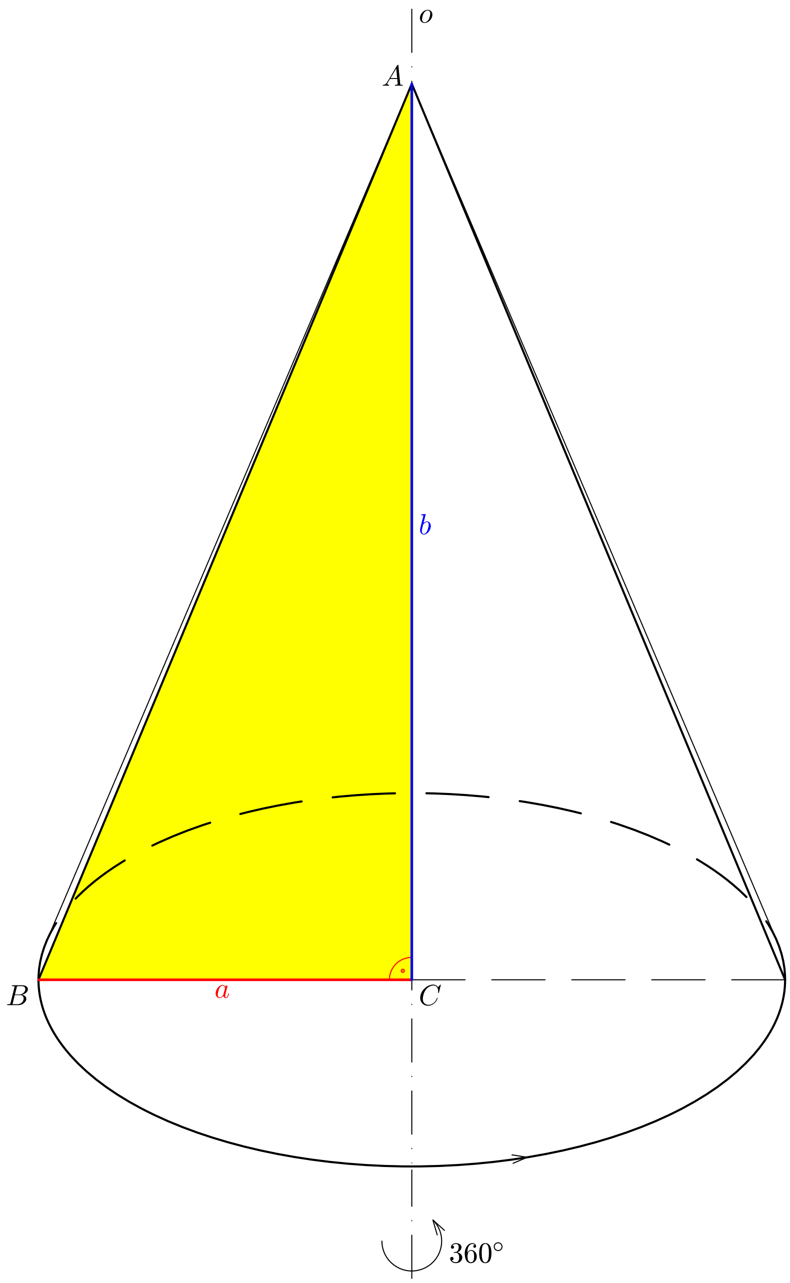
U: Povrch rotačného kužeľa teda vypočítame podľa vzorca

$$S = \pi r^2 + \pi r s,$$

kde r je polomer podstavy kužeľa a s jeho strana.

Príklad 1: *Vypočítajte pomer objemov a povrchov rotačných kužeľov, ktoré vznikli rotáciou pravouhlého trojuholníka ABC okolo odvesien a a b. Dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka sú $a = 5$ cm, $b = 12$ cm.*

U: Uvažujme najskôr rotačný kužeľ, ktorý vznikol rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo odvesny b.



Ž: *Odvesna a je potom polomerom podstavy a odvesna b výškou kužeľa. Platí*

$$r_1 = a = 5 \text{ cm}; \;\; v_1 = b = 12 \text{ cm}.$$

U: Vypočítať objem kužeľa by nemal byť problém.

Ž: *Použijem vzorec* $V = \pi r^2 v$. *Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$V_1 = \pi r_1^2 v_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 12.$$

U: Vyjadrenie objemu ponecháme v tomto tvare. Poďme vyjadriť povrch. Ten vypočítame podľa vzorca $S = \pi r^2 + \pi r s$. Nepoznáme však stranu s kužeľa.

Ž: *Stranou* s *kužeľa je vlastne prepona* AB *pravouhlého trojuholníka. Vypočítam ju na základe* **Pytagorovej vety**, *lebo dĺžky odvesien poznám:*

$$s^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169.$$

Strana s *má dĺžku* 13 *centimetrov.*

U: Po dosadení číselných hodnôt do vzorca pre povrch kužeľa dostávame

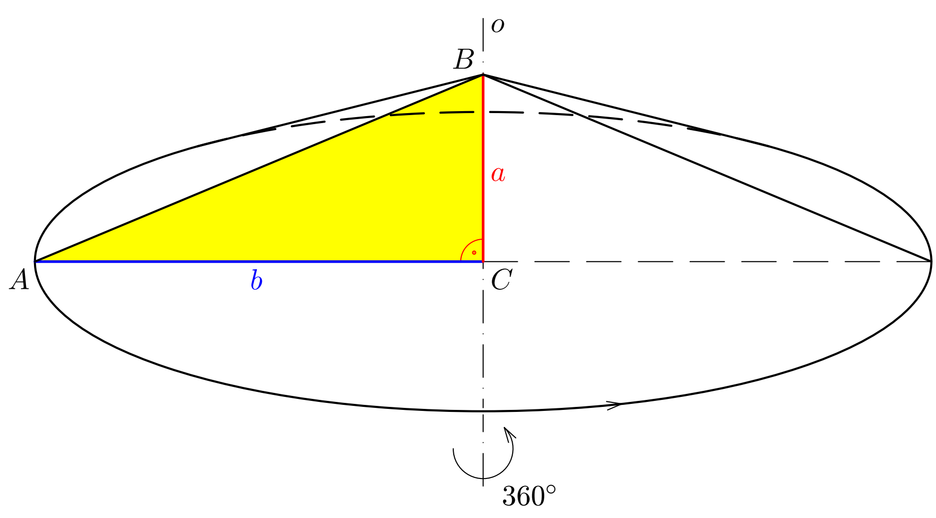
$$S_1 = \pi r_1^2 + \pi r_1 s = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 13.$$

Dopočítaj hodnotu povrchu.

Ž: *Číslo päť umocním a v druhom sčítanci vynásobím čísla* 5 *a* 13, *teda*

$$S_1 = 25\pi + 65\pi = 90\pi.$$

U: Analogické výpočty urobíme aj pre druhý rotačný kužeľ. Vznikne rotáciou toho istého pravouhlého trojuholníka okolo odvesny a.



Ž: *Polomer podstavy má teraz dĺžku* 12 *centimetrov a výška kužeľa* 5 *centimetrov.*

$$r_2 = b = 12 \text{ cm}; \;\; v_2 = a = 5 \text{ cm}.$$

U: Objem tohto kužeľa bude

$$V_2 = \pi r_2^2 v_2 = \pi \cdot 12^2 \cdot 5.$$

Teraz už môžeme vypočítať pomer objemov týchto dvoch rotačných kužeľov.

Ž: *Pre pomer objemov platí*

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{\pi \cdot 12^2 \cdot 5} = \frac{5}{12}.$$

Vykrátil som číselný výraz $\pi \cdot 5 \cdot 12$.

Pomer objemov rotačných kužeľov je číslo $\dfrac{5}{12}$.

U: Strana druhého rotačného kužeľa má tiež dĺžku $s = 13$ cm, lebo je to tá istá prepona v pravouhlom trojuholníku. Vypočítaj povrch tohto kužeľa.

Ž: *Do vzorca pre povrch kužeľa dosadím číselné hodnoty. Potom čísla umocním a vynásobím. Pre povrch tak dostávam*

$$S_2 = \pi r_2^2 + \pi r_2 s = \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 12 \cdot 13 = 144\pi + 156\pi = 300\pi.$$

U: Pomer povrchov oboch kužeľov je

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{90\pi}{300\pi} = \frac{3}{10}.$$

Zlomok sme vykrátili reálnym číslom 30π.

Ž: *Pomer povrchov kužeľov, ktoré vzniknú rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jeho odvesien je rovný reálnemu číslu* 0,3.

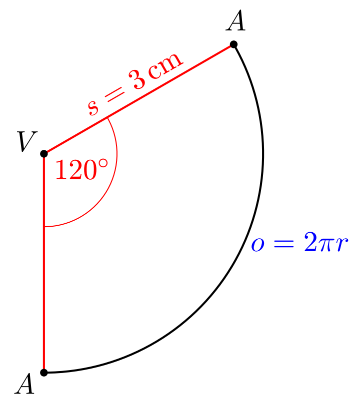
Príklad 2: *Vypočítajte objem rotačného kužeľa, ktorého plášťom je kruhový výsek s polomerom* 3 cm *a stredovým uhlom* 120 *stupňov.*

U: Aký je vzorec na výpočet objemu rotačného kužeľa?

Ž: *Objem rotačného kužeľa s polomerom r podstavy a výškou v vypočítame podľa vzorca*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Výšku kužeľa nepoznám, ale polomer podstavy by mal byť rovný trom centimetrom.



U: Pozor! Túto dĺžku má polomer kruhového výseku, ktorý je plášťom rotačného kužeľa. Polomerom výseku je strana s kužeľa. Ide o vzdialenosť vrchola V kužeľa od ľubovoľného bodu na obvode podstavy. Strana kužeľa má teda dĺžku $s = 3$ cm.

Ž: *Ako teda určíme polomer podstavy kužeľa?*

U: Dĺžka kružnicového oblúka, ktorý ohraničuje kruhový výsek je rovnaká ako obvod podstavy. Obvod podstavy sa dá vyjadriť v tvare $o = 2\pi r$, kde r je polomer podstavy.

Ž: *Netuším však, ako mám vypočítať dĺžku kružnicového oblúka.*

U: Vypočítať dĺžku kružnice s polomerom s by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Dĺžka kružnice sa dá vyjadriť v tvare $2\pi s$. Ale, ako to súvisí s polomerom podstavy?*

U: Stredový uhol, ktorý prislúcha celej kružnici má veľkosť 360 stupňov. Aká časť kružnice prislúcha stredovému uhlu 120 stupňov?

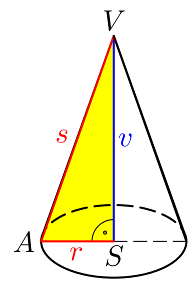
Ž: *Jasné! Je to jedna tretina. Teda obvod podstavy kužeľa je rovný tretine dĺžky kružnice s polomerom s. Preto platí*

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi s = 2\pi r.$$

U: No vidíš! Pochopil si základnú pointu úlohy. Ak rovnicu teraz vykrátime číslom 2π, tak dostaneme vyjadrenie pre polomer podstavy

$$r = \frac{s}{3}.$$

Polomer podstavy má veľkosť $r = 1$ cm, lebo $s = 3$ cm.



Ž: *S výškou kužeľa si už poradím sám. Využijem pravouhlý trojuholník ASV s pravým uhlom pri vrchole S. V trojuholníku poznám dĺžku prepony a jednej odvesny. Podľa* **Pytagorovej vety** *platí*

$$v^2 = s^2 - r^2.$$

U: Po odmocnení dostaneme

$$v = \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Dosaď číselné hodnoty a dopočítaj veľkosť výšky.

Ž: *Viem, že $s = 3$ cm a $r = 1$ cm. Pre výšku platí*

$$v = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}.$$

U: Čiastočne odmocni!

Ž: *Aha! Číslo osem zapíšem v tvare súčinu dvoch čísel, z ktorých sa číslo štyri dá odmocniť. Dostávam*

$$v = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}.$$

U: Teraz už poznáme tak polomer podstavy kužeľa, ako aj jeho výšku. Môžeme vypočítať objem kužeľa.

Ž: *Do vzorca $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 v$ dosadím hodnoty $r = 1$ cm a $v = 2\sqrt{2}$ cm.*

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

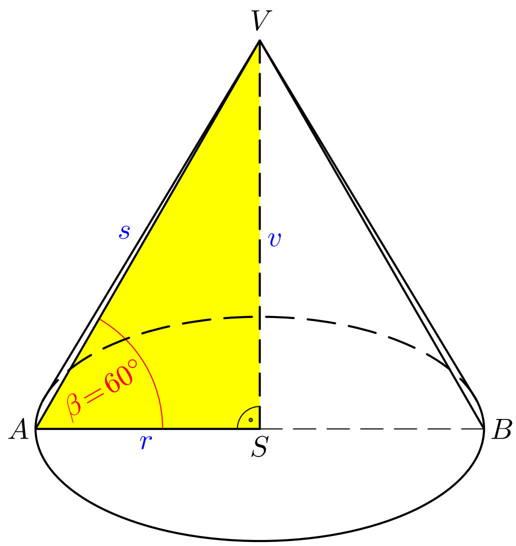
U: Objem kužeľ je $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ centimetrov kubických.

Príklad 3: *Objem rotačného kužeľa je $9\pi\sqrt{3}\ \mathrm{dm}^3$ a strana kužeľa zviera s rovinou podstavy uhol $\beta = 60°$. Vypočítajte obsah plášťa rotačného kužeľa.*

U: Objem rotačného kužeľa vypočítame podľa vzorca $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, kde r je polomer podstavy a v výška rotačného kužeľa.

Ž: *Ale nepoznáme ani polomer podstavy, ani výšku rotačného kužeľa.*

U: To je pravda. Poznáme však uhol, ktorý zviera strana kužeľa s rovinou podstavy.



U: V pravouhlom trojuholníku ASV s pravým uhlom pri vrchole S sú polomer r podstavy a výška v kužeľa odvesnami trojuholníka.

Ž: *Využijem goniometrickú funkciu* **tangens**. *Je to pomer protiľahlej odvesny k priľahlej. Preto platí*

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v}{r}.$$

U: Z tohto vzťahu si vyjadríme výšku v. Dostávame

$$v = r\mathrm{tg}\beta = r\mathrm{tg}60° = \sqrt{3}r,$$

lebo hodnota funkcie tangens pre 60 stupňov je $\sqrt{3}$. Dosaď toto vyjadrenie za výšku v do vzorca pre objem. Vypočítaš tak polomer podstavy kužeľa.

Ž: *Po dosadení do vzorca pre objem dostávam*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$

Za objem dosadím zadanú číselnú hodnotu

$$9\pi\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$

U: Rovnicu vydelíme reálnym číslom $\sqrt{3}\pi$. Dostávame

$$9 = \frac{1}{3}r^3.$$

Ž: *Po vynásobení číslom tri získame rovnosť*

$$27 = r^3.$$

Polomer podstavy rotačného kužeľa je rovný **trom decimetrom**, *lebo* $r = \sqrt[3]{27} = 3$.

U: Môžeme vypočítať výšku rotačného kužeľa. Platí

$$v = \sqrt{3}r = 3\sqrt{3}.$$

Na výpočet obsahu plášťa rotačného kužeľa ešte budeme potrebovať dĺžku strany s kužeľa.

Ž: *V pravouhlom trojuholníku ASV použijem* **Pytagorovu vetu**. *Platí*

$$s^2 = r^2 + v^2.$$

Dosadím číselné hodnoty $r = 3$ dm *a* $v = 3\sqrt{3}$ dm.

U: Pre stranu s dostávame

$$s = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6 \text{ dm}.$$

Strana kužeľa má dĺžku 6 decimetrov. Vypočítať obsah plášťa by pre teba nemal byť problém.

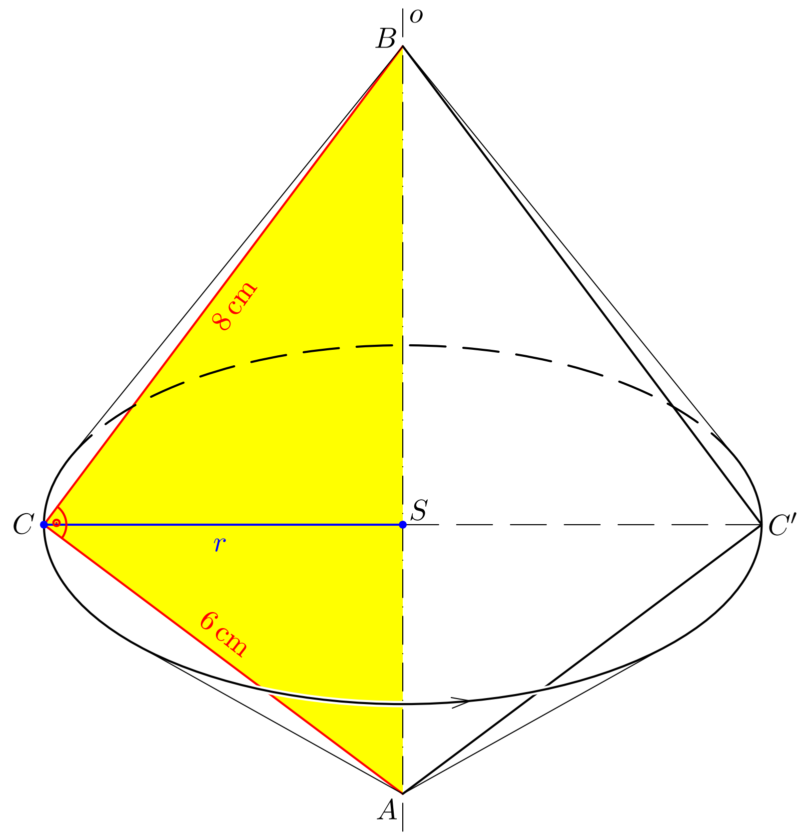
Ž: *Obsah plášťa vypočítam podľa vzorca* $S_{pl} = \pi r s$. *Dosadím číselné hodnoty a dostávam*

$$S_{pl} = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi \text{ dm}^2.$$

U: Obsah plášťa rotačného kužeľa je 18π ***decimetrov štvorcových***.

Príklad 4: *Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré vznikne rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jeho prepony. Odvesny pravouhlého trojuholníka majú dĺžky* 6 cm *a* 8 cm.

U: Máš predstavu, aké teleso vznikne?



Ž: *Nazval by som ho dvojkužeľ.*

U: Máš pravdu. Vzniknuté teleso pozostáva z dvoch neprekrývajúcich sa rotačných kužeľov. Oba kužele majú spoločnú podstavu.

Ž: *To znamená, že polomer podstavy je v oboch telesách rovnaký.*

U: Vieš určiť jeho veľkosť? Čo v pravouhlom trojuholníku ABC určuje polomer podstavy každého z dvoch rotačných kužeľov, ktoré vzniknú?

Ž: *Polomer podstavy je zároveň výškou na preponu. Poznám však iba dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka. Netuším ako vypočítam dĺžku výšky na preponu.*

U: Dĺžku prepony vieš vypočítať?

Ž: *To je jednoduché. Využijem* **Pytagorovu vetu** *v tvare*

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávam

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64}.$$

Prepona má dĺžku 10 **centimetrov***, lebo odmocnina z čísla sto je číslo desať. Ako využijem preponu na výpočet výšky?*

U: Vyjadríme obsah pravouhlého trojuholníka. Vieme, že je daný jednou polovicou zo súčinu dĺžky prepony a výšky na preponu. Výšku sme označili ako polomer r podstavy, preto pre obsah trojuholníka platí

$$S = \frac{|AB| \cdot r}{2}.$$

Ž: *Dobre, ale veď nepoznáte ani obsah, ani polomer r.*

U: To je to umenie matematiky. Obsah pravouhlého trojuholníka vieme vyjadriť aj iným spôsobom. Veď odvesny, ktorých dĺžky poznáme, sú na seba kolmé. Jedna odvesna je zároveň výškou na druhú odvesnu.

Ž: *Jasné. Obsah pravouhlého trojuholníka sa dá vyjadriť tak cez preponu, ako aj jednu odvesnu. Preto platí*

$$\frac{|AB| \cdot r}{2} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2}.$$

Dĺžky všetkých úsečiek, až na polomer r poznám.

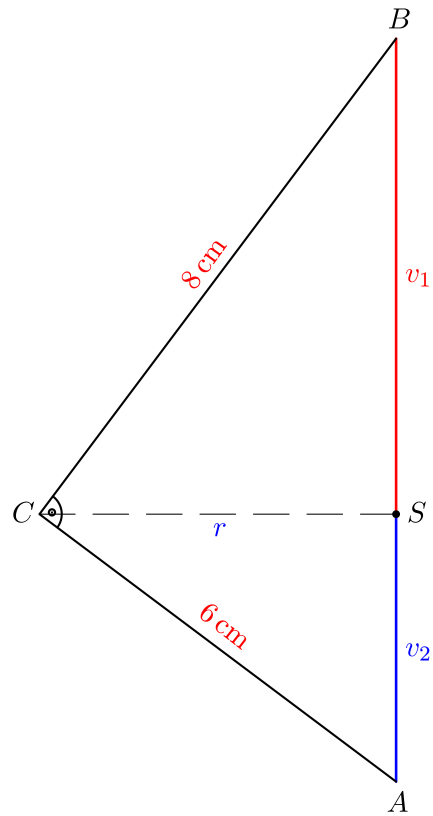
U: Dosaď číselné hodnoty a vypočítaj polomer r podstavy rotačného kužeľa.

Ž: *Pre polomer r dostávam*

$$r = \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AB|} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{48}{10}.$$

Posledný zlomok sa dá krátiť číslom dva. Polomer podstavy kužeľa je $\frac{24}{5}$ *centimetra.*

U: Môžeme vypočítať objem vzniknutého telesa.



Ž: *Nechcem vás strašiť, ale asi ste zabudli, že nepoznáme telesové výšky v_1 a v_2 rotačných kužeľov.*

U: Budeme ich vôbec potrebovať? Skús vyjadriť celkový objem telesa a potom uvidíš.

Ž: *Dám na vaše rady. Objem celého telesa bude súčtom objemov oboch rotačných kužeľov. V oboch prípadoch je polomer podstavy rovnaký, preto platí*

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 v_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 v_2.$$

Z oboch sčítancov vyberiem pred zátvorku výraz $\frac{1}{3}\pi r^2$. V zátvorke zostane súčet $v_1 + v_2$. Jasné! Veď súčet telesových výšok rotačných kužeľov dá preponu AB trojuholníka.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (v_1 + v_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 |AB|.$$

U: No vidíš, že si to zvládol. Stačí, ak teraz dosadíš číselné hodnoty a vypočítaš objem vzniknutého telesa.

Ž: *Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{24}{5}\right)^2 \cdot 10 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{576}{25} \cdot 10 = \frac{384\pi}{5},$$

lebo čísla 10 *a* 25 *sa dajú krátiť piatimi.*

U: Poďme teraz vypočítať povrch telesa. Ako súvisí s povrchmi rotačných kužeľov, z ktorých pozostáva?

Ž: *Stačí zobrať iba plášte rotačných kužeľov. Ich podstavy, ktoré sú totožné, sú vo vnútri telesa. Netvoria jeho hranicu.*

U: Preto platí

$$S = S_{pl_1} + S_{pl_2}.$$

Vzorec na výpočet obsahu plášťa rotačného kužeľa, by nemal byť problémom.

Ž: *Obsah plášťa rotačného kužeľa vypočítam podľa vzorca*

$$S_{pl} = \pi r s.$$

Polomer podstavy poznám $r = \dfrac{24}{5}$. *Stranou* s *je v jednom kuželi strana* BC *trojuholníka, a v druhom kuželi je to strana* AC *trojuholníka* ABC. *Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$S = \pi r|BC| + \pi r|AC| = \pi\frac{24}{5}\cdot 8 + \pi\frac{24}{5}\cdot 6 = \frac{336\pi}{5}.$$

U: Povrch telesa je $\dfrac{336\pi}{5}$ ***centimetrov štvorcových*** a jeho objem $\dfrac{384\pi}{5}$ ***centimetrov kubických***.

Príklad 5: *V akej výške máme rozrezať rotačný kužeľ rovinou rovnobežnou s podstavou tak, aby vzniknuté časti mali rovnaký objem? Polomer podstavy rotačného kužeľa je $r = 6$ cm a telesová výška $v = 15$ cm.*

Ž: *Ak máme rozrezať rotačný kužeľ na dve časti s rovnakým objemom, tak jedna časť bude mať polovičný objem v porovnaní s objemom zadaného rotačného kužeľa.*

U: Vieš vypočítať objem zadaného rotačného kužeľa?

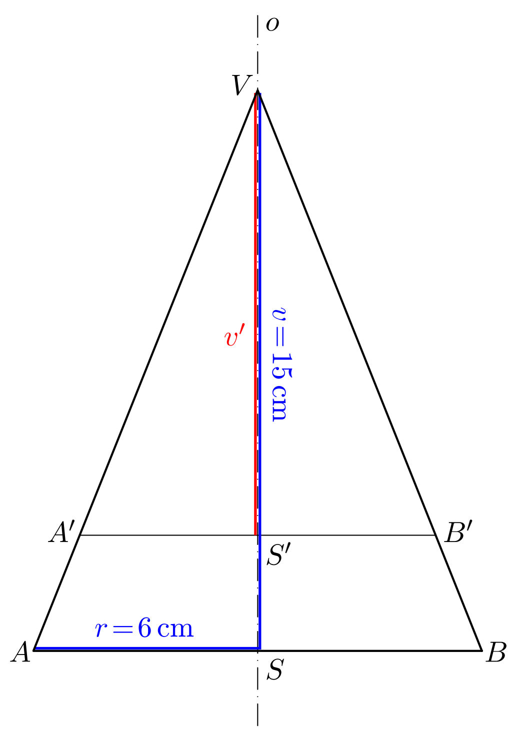
Ž: *Použijem vzorec*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

kde r je polomer podstavy a v výška kužeľa. Číselné hodnoty oboch veličín sú dané. Po dosadení do vzorca pre objem dostávam

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 15 = \pi \cdot 36 \cdot 5 = 180\pi.$$

U: To znamená, že jedna časť kužeľa má po odrezaní objem 90π centimetrov kubických. Máš predstavu, ako odrezané telesá vyzerajú?

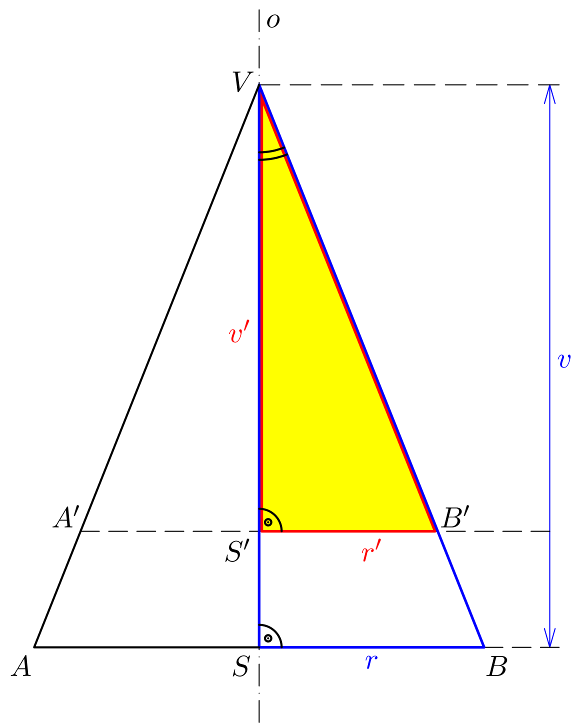


Ž: *Horná časť telesa bude opäť rotačným kužeľom. Dolná časť sa podobá na valec, ale má šikmý plášť.*

U: Dolná časť sa nazýva zrezaný rotačný kužeľ. Vzorec na výpočet jeho objemu pri riešení úlohy však nebudeme potrebovať. Vystačíme s rotačným kužeľom.

Ž: *Dobre. Vieme, že horná časť rozrezaného telesa je rotačný kužeľ. Jeho objem je* 90π *centimetrov kubických. Nepoznáme však polomer podstavy horného rotačného kužeľa. Ako chcete vypočítať jeho výšku?*

U: Polomer podstavy a výška horného rotačného kužeľa súvisia s rozmermi zadaného rotačného kužeľa. Stačí, ak sa pozrieš na osový rez týchto telies.



Ž: *Netuším, čo z obrázka mám využiť.*

U: Trojuholníky SBV a $S'B'V$ sú podobné. Sú pravouhlé a majú spoločný ostrý uhol pri vrchole V. Čo platí o stranách v podobných trojuholníkoch?

Ž: *Pomery zodpovedajúcich si strán sú rovnaké. Tento pomer nazývame* **koeficient podobnosti** *trojuholníkov.*

U: Ak označíme koeficient podobnosti symbolom k, tak pre zodpovedajúce polomery podstáv kužeľov platí

$$r' = kr.$$

Vyjadri vzťah medzi výškami.

Ž: *Aj výšky podľa označenia musia byť v tom istom vzťahu. Preto platí*

$$v' = kv.$$

U: To ale znamená, že z objemu horného rotačného kužeľa vieme vypočítať koeficient podobnosti trojuholníkov. Je to zároveň koeficient podobnosti zadaného a odrezaného rotačného kužeľa.

Ž: *Pre objem odrezaného rotačného kužeľa platí*

$$V' = \frac{1}{3}\pi(r')^2 v' = \frac{1}{3}\pi \cdot (kr)^2 \cdot kv = \frac{1}{3}\pi \cdot k^3 \cdot r^2 v.$$

U: Všimni si, že výraz $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ vyjadruje objem V pôvodného rotačného kužeľa.

Ž: *Objemy sú teda v pomere tretej mocniny koeficientu podobnosti*

$$\frac{V'}{V} = k^3.$$

U: Máš pravdu. To je dosť dôležitý poznatok pre pomer objemov dvoch podobných telies. Vieš teraz vypočítať koeficient k?

Ž: *Viem, že platí* $V' = \frac{V}{2}$. *Preto pre koeficient podobnosti platí*

$$k^3 = \frac{1}{2}.$$

U: Koeficient podobnosti bude treťou odmocninou z čísla 0,5:

$$k = \sqrt[3]{0{,}5}.$$

Ž: *Výška odrezaného rotačného kužeľa sa potom dá vyjadriť v tvare*

$$v' = \sqrt[3]{0{,}5} \cdot 15.$$

U: V akej výške od roviny podstavy sme daný rotačný kužeľ rozrezali?

Ž: *Od výšky daného kužeľa odrátam výšku odrezaného kužeľa a dostávam*

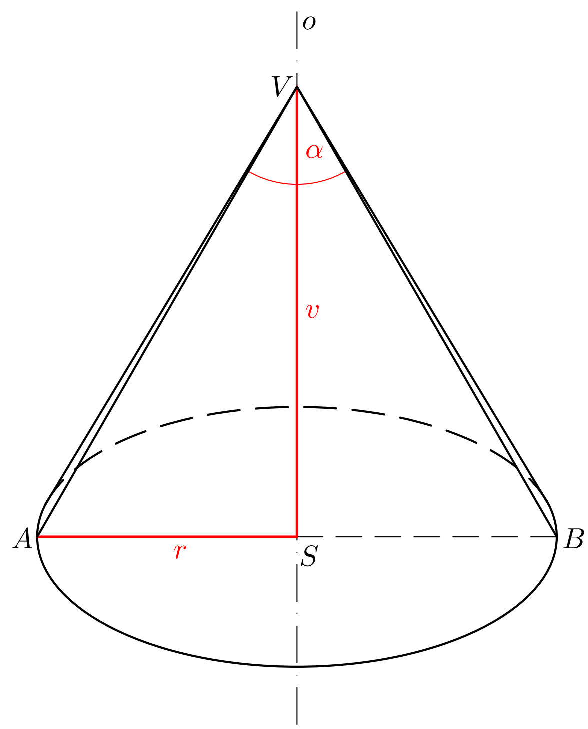
$$v - v' = 15 - \sqrt[3]{0{,}5} \cdot 15.$$

To sa dá ešte upraviť tak, že číslo 15 *vyberiem pred zátvorku. Kužeľ bude rozrezaný vo výške* $15 \cdot (1 - \sqrt[3]{0{,}5})$.

Príklad 6: *Rotačný kužeľ má výšku $v = 6$ cm. Jeho plášť má číselne toľko cm^2, koľko cm^3 má jeho objem. Určte veľkosť uhla pri vrchole osového rezu kužeľa.*

U: Čo je osovým rezom rotačného kužeľa?

Ž: *Osový rez rotačného kužeľa dostaneme prienikom kužeľa a roviny obsahujúcej os kužeľa. Obsahuje teda vrchol kužeľa a stred podstavy. Rezom kužeľa je rovnoramenný trojuholník ABV, kde stred S podstavy je stredom jeho základne AB.*



U: Našou úlohou je vypočítať veľkosť uhla AVB v tomto trojuholníku. Čo potrebuješ k výpočtu tohto uhla?

Ž: *Využil by som pravouhlý trojuholník ASV s pravým uhlom pri vrchole S. Poznám v ňom jednu odvesnu, čo je výška v rotačného kužeľa. Asi budem musieť vypočítať dĺžku druhej odvesny, teda polomer r podstavy kužeľa.*

U: Ako?

Ž: *Podľa zadania úlohy viem, že číselné hodnoty obsahu plášťa rotačného kužeľa a jeho objemu sú rovnaké.*

U: Vieš vyjadriť objem rotačného kužeľa?

Ž: *Nie je to žiadny problém. Objem vypočítam podľa vzorca*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

kde r je polomer podstavy kužeľa a v jeho výška.

U: A čo vzorec pre obsah plášťa?

Ž: *Ani to nie je problém. Vzorec je*

$$S_{pl} = \pi r s,$$

kde s je strana rotačného kužeľa, čo je dĺžka úsečky AV jeho osového rezu.

U: Keďže sa číselné hodnoty obsahu plášťa a objemu rotačného kužeľa rovnajú, tak platí rovnosť

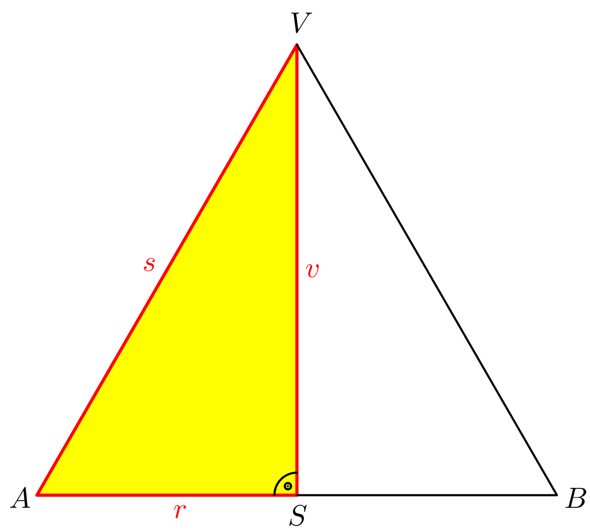
$$\frac{1}{3}\pi r^2 v = \pi r s.$$

Ž: *Fíha! V rovnici je viac neznámych.*

U: Ktoré neznáme máš na mysli?

Ž: *Aha! Výšku v poznám. Ale nepoznám polomer r podstavy, ani stranu s kužeľa.*

U: V tom máš pravdu. Pozri sa ešte raz na osový rez rotačného kužeľa. Nedá sa strana s kužeľa vyjadriť pomocou polomeru podstavy a výšky kužeľa?



Ž: *V pravouhlom trojuholníku ASV zapíšem* **Pytagorovu vetu** *a dostávam*

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}.$$

Po dosadení číselnej hodnoty 6 *za výšku, bude strana s kužeľa vyjadrená v tvare*

$$s = \sqrt{r^2 + 36}.$$

U: Poďme teraz všetky tieto vyjadrenia a známe číselné hodnoty dosadiť do nami vytvorenej rovnice

$$\frac{1}{3}\pi r^2 v = \pi r s.$$

Ž: *Stranu s kužeľa nahradím výrazom, ktorý som odvodil a za výšku dosadím číselnú hodnotu* 6, *preto dostávam*

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 6 = \pi r\sqrt{r^2+36}.$$

Výrazy na oboch stranách rovnice obsahujú výraz πr*, preto ho vykrátim. Získam takto rovnicu*

$$2r = \sqrt{r^2+36}.$$

U: No vidíš. Už si iba krôčik od určenia polomeru podstavy kužeľa. Získal si rovnicu, v ktorej je neznámou spomínaný polomer r.

Ž: *Ale, ako ju mám vyriešiť? Veď neznáma je aj naľavo, aj napravo. Tu dokonca pod odmocninou.*

U: Spomínaná rovnica patrí medzi iracionálne rovnice. Odmocninu odstrániš umocnením výrazov na oboch stranách rovnice.

Ž: *Aha! Po umocnení dostávam*

$$4r^2 = r^2 + 36.$$

Po odčítaní druhej mocniny polomeru získam rovnicu

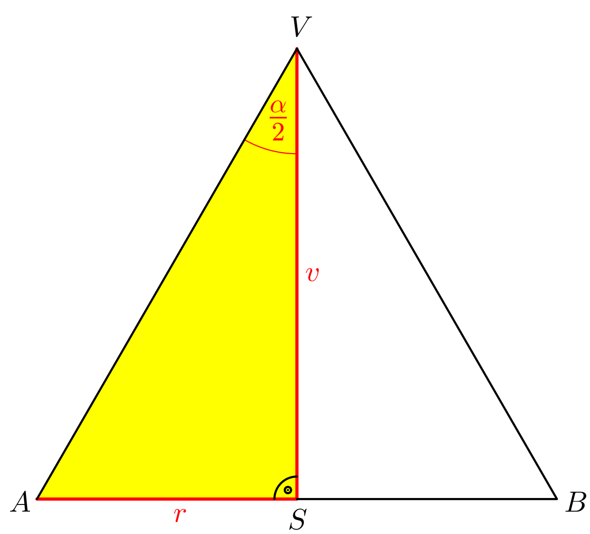
$$3r^2 = 36.$$

Preto platí

$$r^2 = 12.$$

Polomer nebude pekné číslo.

U: Ako vidím, odmocniny sa ti veľmi nepáčia. Polomer podstavy bude $r = \sqrt{12}$, čo po čiastočnom odmocnení dá výsledok $r = 2\sqrt{3}$. Možno vďaka tejto hodnote dostaneme pekný výsledok pre hľadaný uhol.



Ž: *V pravouhlom trojuholníku ASV využijem funkciu tangens pre uhol $\frac{\alpha}{2}$. Platí*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{v}.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávam

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

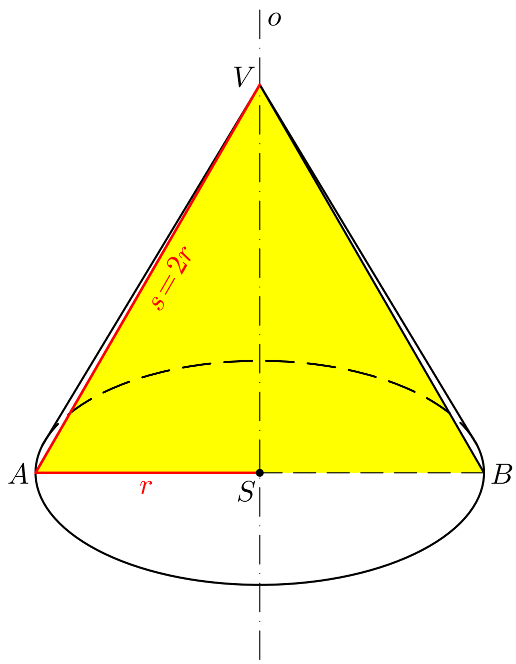
Mali ste pravdu. Uhol $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$.

U: Riešením úlohy je teda uhol α ***veľkosti*** 60 ***stupňov***.

Príklad 7: *Rovnostranný kužeľ má výšku v. Vyjadrite jeho objem a povrch.*

Ž: *Čo znamená, že kužeľ je rovnostranný?*

U: Osovým rezom rotačného kužeľa je rovnostranný trojuholník ABV. Osový rez získame prienikom kužeľa a roviny obsahujúcej os SV kužeľa.



Ž: *Pochopil som správne, že priemer podstavy je rovnaký ako strana s kužeľa?*

U: To, že $s = 2r$ je pre riešenie úlohy veľmi dôležitý poznatok. Čo poznáš v rovnostranom trojuholníku ABV?

Ž: *Daná je výška kužeľa. Poznám teda výšku v rovnostranného trojuholníka, čo je úsečka SV.*

U: Budeš potrebovať aj iné veličiny na vyjadrenie objemu a povrchu kužeľa?

Ž: *No, objem musím vyjadriť nielen pomocou výšky, ale aj polomeru podstavy kužeľa. Ten budem potrebovať aj pre vyjadrenie povrchu. Dokonca aj stranu s kužeľa, lebo vzorec pre povrch má tvar*

$$S = \pi r^2 + \pi r s.$$

U: Z toho dôvodu, si polomer podstavy r a stranu s kužeľa vyjadríme pomocou danej výšky kužeľa. Zatiaľ vieme, že $s = 2r$.

Ž: *Čo keby som pre pravouhlý trojuholník ASV zapísal* **Pytagorovu vetu***?*

U: Vyskúšaj.

Ž: *Prepona s má dĺžku 2r, preto platí*

$$(2r)^2 = r^2 + v^2.$$

Umocním a od rovnice odrátam druhú mocninu polomeru. Dostávam

$$3r^2 = v^2.$$

U: Vyjadrenie polomeru podstavy dokončím za teba sám. Poslednú rovnicu vydelíme číslom tri a polomer získame po odmocnení

$$r = \frac{v}{\sqrt{3}}.$$

Ž: *Strana kužeľa bude dvakrát dlhšia. Preto platí*

$$s = \frac{2v}{\sqrt{3}}.$$

U: Môžeme teda vyjadriť objem rotačného kužeľa.

Ž: *Do vzorca pre objem za polomer podstavy dosadím odvodené vyjadrenie. Zlomok umocním a príslušné členy vynásobím.*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{v^2}{3} \cdot v = \frac{\pi v^3}{9}.$$

U: Objem rovnostranného kužeľa sa dá vyjadriť pomocou jeho výšky v v tvare $V = \frac{\pi v^3}{9}$. Verím, že takto správne zvládneš aj vyjadrenie povrchu rotačného kužeľa.

Ž: *Do vzorca pre povrch, ktorý som už uviedol dosadím vyjadrenie nielen polomeru podstavy, ale aj strany kužeľa. Dostávam*

$$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi \cdot \left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right).$$

Zlomok umocním a zvyšok vynásobím

$$S = \frac{\pi v^2}{3} + \frac{2\pi v^2}{3} = \pi v^2.$$

U: Aj toto vyjadrenie si zvládol s prehľadom. Môžem ťa iba pochváliť. To znamená, že povrch rovnostranného kužeľa sa dá vyjadriť pomocou výšky v v tvare $S = \pi v^2$.

Príklad 8: *Do rotačného kužeľa je vpísaný rotačný valec, ktorého výška je rovná polovici výšky kužeľa. Určte pomer objemov obidvoch telies.*

U: Ako vypočítame objem rotačného kužeľa?

Ž: *Objem rotačného kužeľa vypočítame podľa vzorca*

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k,$$

kde r_k je polomer podstavy kužeľa a v_k výška kužeľa.

U: Ani vzorec pre objem rotačného valca by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Máte pravdu. Objem teraz vypočítam podľa vzorca*

$$V_v = \pi r_v^2 v_v.$$

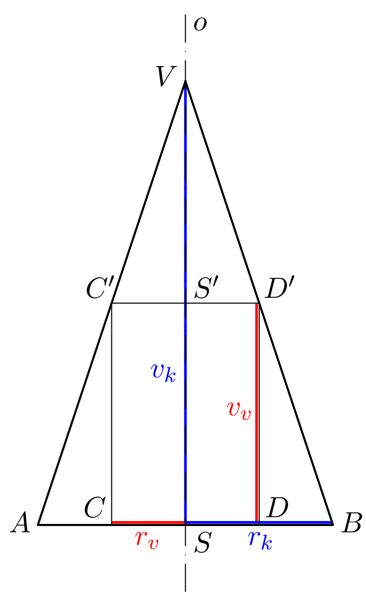
U: Našou úlohou je vypočítať pomer týchto objemov. Preto rozmery charakterizujúce rotačný valec vyjadríme pomocou polomeru podstavy rotačného kužeľa a jeho výšky.

Ž: *Zo zadania úlohy viem, že výška valca je rovná polovici výšky kužeľa. Preto platí*

$$v_v = \frac{v_k}{2}.$$

Ako vyjadrím polomer podstavy valca?

U: Valec je vpísaný do rotačného kužeľa. Podstava valca a podstava kužeľa tvoria sústredné kruhy. Aký rovinný geometrický útvar je osovým rezom týchto dvoch telies?



Ž: *Osovým rezom rotačného kužeľa je rovnoramenný trojuholník ABV a pre valec je rezom obdĺžnik $CDD'C'$. Tento obdĺžnik je vpísaný do trojuholníka tak, že strana CD obdĺžnika je časťou strany AB trojuholníka.*

U: K určeniu vzťahu medzi polomermi podstáv kužeľa a valca nám poslúži obrázok.

Ž: *Nie je náhodou polomer podstavy valca tiež polovicou polomeru podstavy kužeľa?*

U: Máš pravdu. Vieš to však zdôvodniť?

Ž: *Vyšlo mi to tak logicky. Keď výška je polovicou výšky kužeľa, tak aj polomer by mal byť polovicou polomeru podstavy kužeľa.*

U: Daný záver vyplýva z podobnosti trojuholníkov ASV a ACC'.

Ž: *Prečo sú podobné?*

U: Majú jeden pravý uhol a uhol pri vrchole A je spoločný. Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch zodpovedajúcich si uhloch, tak sú podobné. Dĺžky ich zodpovedajúcich strán sú v rovnakom pomere.

Ž: *Aha! Už si spomínam. Koeficient podobnosti týchto trojuholníkov je rovný číslu* $\frac{1}{2}$. *To preto, lebo výšky telies sú v pomere* $1:2$. *Teda aj dĺžky úsečiek* CC' *a* SV *sú v pomere* $1:2$.

U: V tom istom pomere musia byť aj dĺžky úsečiek AC a AS. Z toho vyplýva, že dĺžka úsečky CS je tiež polovicou dĺžky úsečky AS. Obe úsečky však predstavujú polomery podstáv daných telies, preto platí

$$r_v = \frac{r_k}{2}.$$

Ž: *Neplatí, že v akom pomere sú výšky, tak v takom pomere sú polomery?*

U: Vo všeobecnosti to neplatí. Pomer výšok je rovný pomeru dĺžok úsečiek AC a AS. Pozri ešte raz na obrázok. Úsečka AS je polomerom podstavy kužeľa, ale úsečka AC nevyjadruje polomer podstavy valca.

Ž: *Dobre. Pochopil som. Čo ďalej?*

U: Vypočítame pomer objemov rotačného kužeľa a rotačného valca

$$\frac{V_k}{V_v} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k}{\pi r_v^2 v_v}.$$

Za v_v a r_v dosaď odvodené vyjadrenia.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$\frac{V_k}{V_v} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k}{\pi \left(\frac{r_k}{2}\right)^2 \cdot \frac{v_k}{2}}.$$

Umocním a čísla vynásobím

$$\frac{V_k}{V_v} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k}{\frac{1}{8}\pi r_k^2 v_k}.$$

U: Výraz $\pi r_k^2 v_k$ vykrátime a upravíme zložený zlomok

$$V_k : V_v = 8 : 3.$$

Pomer objemov daných telies je ***osem ku trom***.