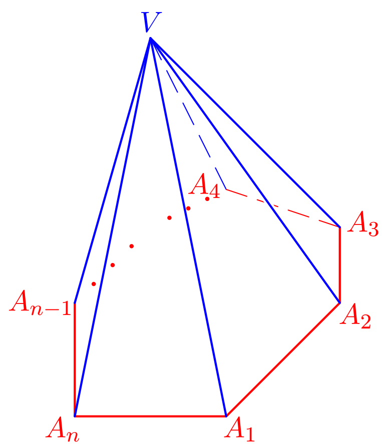
# Objem a povrch ihlanov

***RNDr. Marián Macko***

**U**: Ako by si charakterizoval $n$-boký ihlan?

**Ž**: *Ihlan je teleso, ktoré je určené* **jednou význačnou stenou** *a vrcholom, ktorý v rovine tejto steny neleží.*

**U**: Význačnú stenu nazývame ***podstava ihlana***. Podstavou $n$-bokého ihlana je $n$-uholník. Vrchol ihlana, ktorý neleží v rovine podstavy, nazývame ***hlavný vrchol***. Zvyčajne ho označujeme symbolom $V$. Koľko vrcholov má $n$-boký ihlan?




**Ž**: *Jeden hlavný vrchol a n vrcholov v podstave. Čiže, n-boký ihlan má spolu* $n+1$ **vrcholov**.

**U**: Taký istý je aj počet jeho stien. Okrem podstavy má aj $n$ ***bočných stien***. Sú nimi napríklad trojuholníky $A_1A_2V$, $A_2A_3V$, alebo $A_nA_1V$.

**Ž**: *Spomínam si, že okrem vrcholov a stien, má ihlan aj hrany. Sú to úsečky, ktoré tvoria strany stien ihlana.*

**U**: Možno ich chápať ako priesečnice stien ihlana. Ak zoberieme dve bočné steny, tak ich prienikom získame ***bočné hrany ihlana***. Napríklad $A_1V$, $A_2V$ alebo $A_nV$.

**Ž**: *Ostatné hrany nazývame podstavné?*

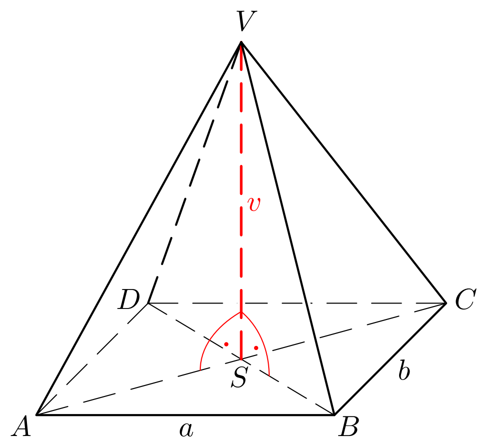
**U**: Áno. Strany podstavy ihlana nazývame ***podstavné hrany ihlana***. Vzniknú ako prienik podstavy a bočných stien ihlana. Vymenuj niekoľko podstavných hrán ihlana na obrázku.

**Ž**: *Sú to napríklad hrany $A_1A_2$, $A_2A_3$ a iné. Ihlan má $n$ podstavných hrán.*

---

**U**: Pripomenieme si ešte niekoľko špeciálnych prípadov ihlanov. Podstava ***kolmého ihlana*** musí mať stred súmernosti $S$ a zároveň priamka $VS$ musí byť kolmá na rovinu podstavy.

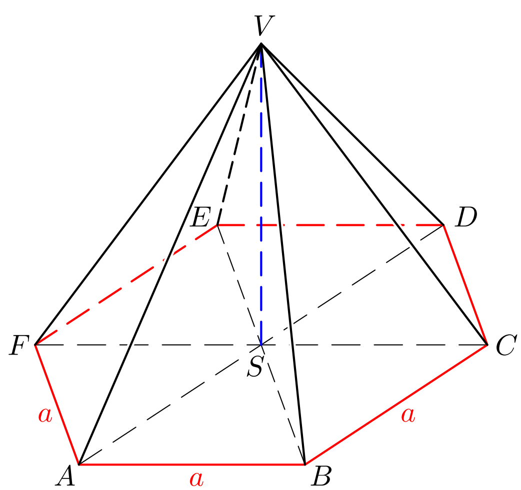
**Ž**: *Chcete povedať, že v prípade kolmého ihlana nemusí byť podstavou pravidelný $n$-uholník?*




**U**: Nie, nemusí. Podstavou môže byť napríklad obdĺžnik, lebo priesečník uhlopriečok $S$ je jeho stredom súmernosti. Dôležité je, aby úsečka spájajúca tento bod $S$ s hlavným vrcholom $V$ ihlana bola kolmá na rovinu podstavy.

**Ž**: *Ako sa teda nazývajú také ihlany, ktorých podstava je pravidelný $n$-uholník.*

**U**: Máš zrejme na mysli ***pravidelné $n$-boké ihlany***. Ale okrem pravidelného $n$-uholníka, ktorý je ich podstavou, musia mať rovnako dlhé bočné hrany.



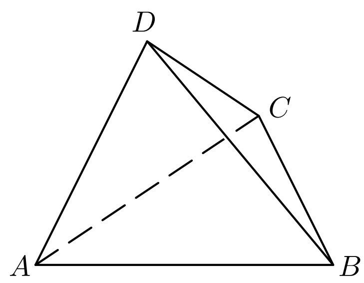

**Ž**: *Aha! Začínam chápať rozdiel medzi kolmým a pravidelným ihlanom. Nie je to len v podstave, ale aj v bočných stenách.* **Bočnými stenami** *pravidelného ihlana sú* **zhodné rovnoramenné trojuholníky**. *V prípade kolmého ihlana trojuholníky nemusia byť zhodné.*

**U**: Máš pravdu. Porovnaj ešte raz predchádzajúce dva obrázky.

---

**Ž**: *Mohli by ste mi ešte vysvetliť pojem štvorsten?*

**U**: Pojem ***štvorsten*** je iba iné pomenovanie pre ***trojboký ihlan***.




**Ž**: *Aha! Trojboký znamená, že podstavou je trojuholník. Ale aj bočné steny sú trojuholníky. Štvorsten má teda štyri steny.*

**U**: Samozrejme. Štvorsten je teleso s najmenším počtom stien. To odráža aj samotné pomenovanie telesa. A keďže všetky steny sú trojuholníky, tak podstavou môže byť ktorákoľvek z nich. Vieš čím sa vyznačuje ***pravidelný štvorsten***?

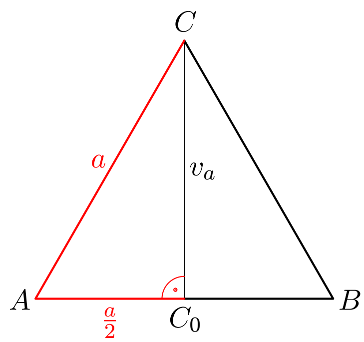
**Ž**: *Všetky jeho steny musia byť zrejme* **rovnostranné trojuholníky**.

**U**: Ak sú všetky steny pravidelného štvorstena rovnostranné trojuholníky, tak sa dá veľmi jednoducho vyjadriť jeho ***povrch***. Ide o súčet obsahov všetkých jeho stien.

**Ž**: *Máte pravdu. Stačí vyjadriť obsah jedného rovnostranného trojuholníka. Celkový povrch pravidelného štvorstena bude štvornásobkom tohto obsahu.*

$$S = 4 \cdot S_{\Delta}.$$

**U**: Na vyjadrenie obsahu rovnostranného trojuholníka potrebujeme dĺžku strany $a$ a výšku $v_a$ na túto stranu.




**Ž**: *Využijem* **Pytagorovu vetu** *v pravouhlom trojuholníku $AC_0C$. Prepona $AC$ má dĺžku $a$ a odvesna $AC_0$ je polovicou strany $a$. Preto platí*

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

*Umocním a odrátam. Spoločným menovateľom je číslo* 4.

$$v_a^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

**U**: Pre výšku na stranu $a$ po odmocnení dostávame $v_a = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Obsah jednej steny preto bude

$$S_\Delta = \frac{av_a}{2} = \frac{a\frac{\sqrt{3}a}{2}}{2},$$

čo vieme upraviť na tvar

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Vyjadri povrch pravidelného štvorstena.

**Ž**: *Obsah trojuholníka vynásobím štyrmi. Povrch bude vyjadrený v tvare*

$$S = 4 \cdot S_\Delta = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \sqrt{3}a^2.$$

**U**: V tomto špeciálnom prípade ihlana sa jeho povrch dá celkom jednoduchým spôsobom vyjadriť pomocou dĺžky $a$ jeho hrany. ***Povrch ihlana*** vo všeobecnosti je však daný vzorcom

$$S = S_p + S_{pl},$$

kde $S_p$ je ***obsah podstavy*** a $S_{pl}$ ***obsah plášťa***.

**Ž**: *Pod* **plášťom** *máte na mysli* **zjednotenie** *všetkých trojuholníkov, ktoré sú* **bočnými stenami ihlana***?*

**U**: Máš pravdu. Napríklad, v prípade pravidelného $n$-bokého ihlana, to bude zjednotenie $n$ zhodných rovnoramenných trojuholníkov.

---

**Ž**: *A ako to je s objemom ihlana? Viem, že sa vypočíta podľa vzorca*

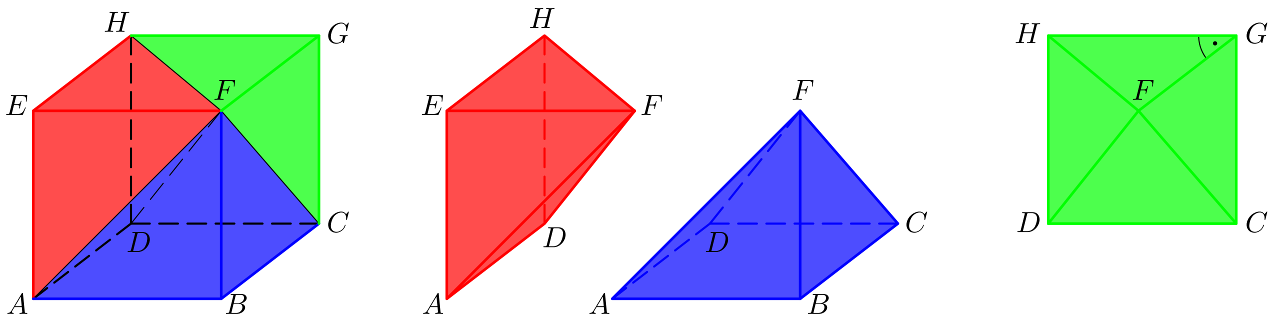
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p v,$$

*kde $S_p$ je* **obsah podstavy** *a $v$ je* **telesová výška***. Prečo je vo vzorci jedna tretina?*

**U**: Jedna tretina vo vzorci súvisí s tým, že hranol sa dá rozložiť na ***tri neprekrývajúce sa ihlany***. Dôležité je aby každý z ihlanov mal rovnaký objem. Keďže objem hranola je $V = S_p v$, objem jedného ihlana bude ***tretinou objemu hranola***.

**Ž**: *Tak, to si neviem predstaviť. Ako dáte do hranola tri rovnaké ihlany?*

**U**: Ukážeme si to na kocke. Vytvoríme v nej tri štvorboké ihlany. Hlavným vrcholom všetkých ihlanov bude vrchol $F$ kocky. Jeden z ihlanov bude mať za podstavu dolnú stenu kocky, druhý zase ľavú bočnú stenu kocky a pre posledný bude podstavou zadná stena kocky. Pozri na obrázok.




**Ž**: *Zaujímavé. Dostali sme* **tri štvorboké ihlany** $ABCDF$, $ADHEF$ *a* $CDHGF$. *Je pravda, že majú* **rovnaké podstavy**. *To preto, lebo sú to štvorce* $ABCD$, $ADHE$ *a* $CDHG$. *Ale majú rovnaké aj telesové výšky?*

**U**: Ako vieme, ***telesová výška ihlana*** je ***vzdialenosť jeho hlavného vrcholu od roviny podstavy***. V ihlane $ABCDF$ je telesovou výškou hrana $BF$, lebo je kolmá na podstavu $ABCD$. V ostatných dvoch ihlanoch urč telesové výšky sám.

**Ž**: *Jasné! Stačí pozerať na obrázok kocky. Hrana* $EF$ *je predsa kolmá na ľavú bočnú stenu kocky, preto bude výškou v ihlane* $ADHEF$. *V poslednom ihlane* $CDHGF$ *je telesovou výškou hrana* $FG$. *To preto, lebo táto hrana je kolmá na zadnú stenu kocky.*

**U**: Každá z týchto telesových uhlopriečok má dĺžku, ktorá je rovnaká ako dĺžka $a$ hrany kocky. Uvažované tri štvorboké ihlany majú teda zhodné podstavy a telesové výšky. Sú zhodné. Lenže zhodné telesá majú rovnaký objem, preto je objem jedného z ihlanov tretinou objemu kocky.

**Ž**: *Dá sa táto finta využiť aj pre iné hranoly ako kocka?*

**U**: Áno, ale nemusí to byť až také jednoduché. Pre teba je však dôležitejšie, vedieť použiť vzorec na výpočet objemu ihlana v rôznych úlohách.

**Ž**: *Vzorec pre objem hranola je* $V = S_p v$. *Budem si teda pamätať, že do hranola sa zmestia tri ihlany s rovnakým objemom. Preto sa* **objem ihlana s rovnakou podstavou ako je podstava hranola a s rovnakou telesovou výškou** *vypočíta podľa vzorca*

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p v.$$

**Príklad 1**: *Vypočítajte objem a povrch pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$, ak jeho podstavná hrana má dĺžku $a = 10$ cm a telesová výška $v = 12$ cm.*

**U**: Vzorec na výpočet objemu ihlana je

$$V = \frac{1}{3}S_p v.$$

Telesovú výšku $v$ poznáš. Ako vypočítaš obsah $S_p$ podstavy pravidelného štvorbokého ihlana?

**Ž**: *Ak je ihlan pravidelný a štvorboký, tak jeho podstavou je* **štvorec** *so stranou a zadanej dĺžky. Obsahom podstavy bude preto obsah štvorca $S_p = a^2$. Po dosadení do vzorca pre objem dostávam*

$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}a^2 v.$$

**U**: Stačí dosadiť zadané číselné hodnoty. Preto platí

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12.$$

Dopočítaj.

**Ž**: *Umocním a po krátení čísel tri a dvanásť zostane číslo štyri.*

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 100 \cdot 4 = 400 \text{ cm}^3.$$

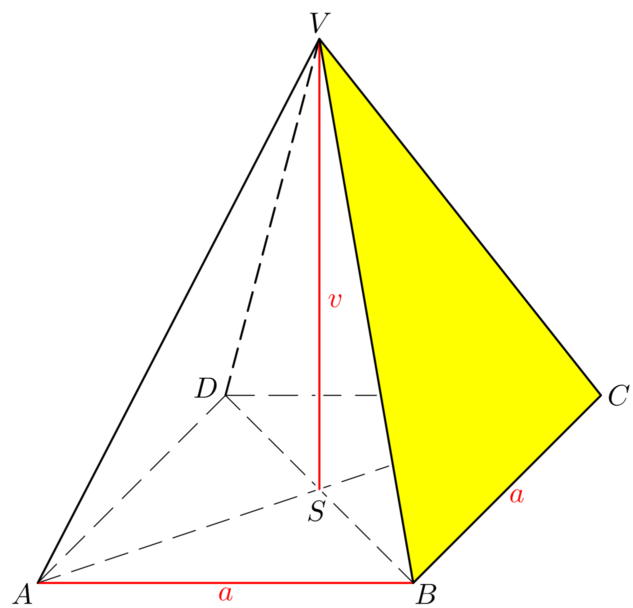
*Objem ihlana je 400* **centimetrov kubických**.

---

**U**: Pre povrch ihlana platí vzorec

$$S = S_p + S_{pl},$$

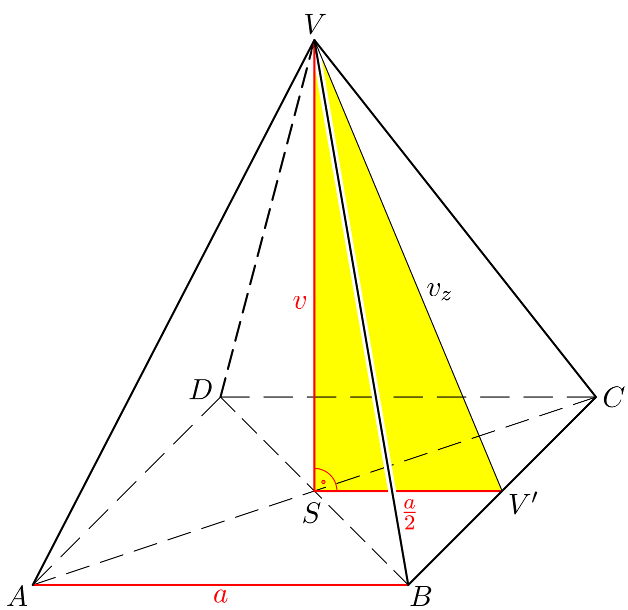
kde $S_{pl}$ je ***obsah plášťa***. Máš predstavu, z čoho pozostáva plášť pravidelného štvorbokého ihlana?



**Ž**: *Plášťom je zjednotenie bočných stien ihlana. V našom prípade to budú štyri zhodné rovnoramenné trojuholníky. Jedným z nich je trojuholník $BCV$.*

**U**: Pre obsah plášťa platí $S_{pl} = 4S_{\Delta}$. Vypočítať ***obsah rovnoramenného trojuholníka*** by pre teba nemal byť problém.

**Ž**: *Použijem vzorec* $S_{\Delta} = \dfrac{zv_z}{2}$. *Základňou je podstavná hrana a ihlana. Ale nepoznám výšku v bočnej stene.*




**U**: Vypočítaš ju z pravouhlého trojuholníka $VSV'$, kde $S$ je stred podstavy ihlana a bod $V'$ je stredom hrany $BC$.

**Ž**: *Teraz to už nebude problém. Poznám obe odvesny. Odvesna $SV$ je* **telesovou výškou** *ihlana a úsečka $SV'$ je* **polovicou podstavnej hrany**. *Potrebujem vypočítať preponu, preto využijem* **Pytagorovu vetu**

$$v_z^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

**U**: Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$v_z^2 = 12^2 + 5^2.$$

Dopočítaj.

**Ž**: *Čísla umocním*

$$v_z^2 = 144 + 25,$$

*sčítam a odmocním.* **Výška na základňu** *v rovnoramennom trojuholníku $BCV$ bude mať veľkosť*

$$v_z = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}.$$

**U**: Úsečka $VV'$ je skutočne výškou, lebo trojuholník $BCV$ je rovnoramenný so základňou $BC$ a bod $V'$ je stredom tejto základne. Teraz už máme všetky hodnoty na to, aby sme vypočítali povrch.

**Ž**: *Vo vzorci pre* **povrch ihlana** $S = S_p + S_{pl}$ *nahradím* **obsah podstavy** *vyjadrením* $S_p = a^2$. **Obsah plášťa** *vyjadrím v tvare*

$$S_{pl} = 4S_\Delta = 4\frac{zv_z}{2} = 2zv_z.$$

*Ale základňa* $z$ *je vlastne hrana* $a$.

**U**: Povrch ihlana bude preto vyjadrený v tvare

$$S = a^2 + 2av_z.$$

Dosaď číselné hodnoty a dopočítaj.

**Ž**: *Dosadím hodnoty* $a = 10$ cm *a* $v_z = 13$ cm. *Dostávam*

$$S = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 100 + 260 = 360 \text{ cm}^2.$$

**U**: Povrch ihlana je 360 ***centimetrov štvorcových***.

**Príklad 2**: *Vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$, ak jeho podstavná hrana má dĺžku $a = 4$ cm. Odchýlka bočnej hrany ihlana od roviny podstavy je 60 stupňov.*

**U**: Čo potrebuješ poznať, aby si vypočítal objem hranola?

**Ž**: *Potrebujem obsah podstavy $S_p$ a telesovú výšku $v$. To preto, lebo objem ihlana vypočítam podľa vzorca*

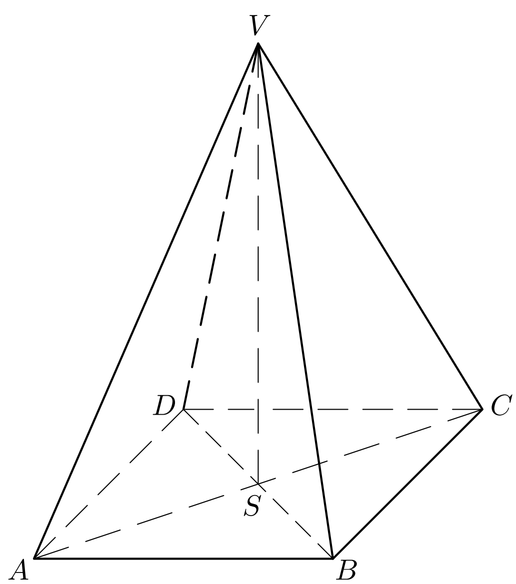
$$V = \frac{1}{3} S_p v.$$

*Nepoznám však telesovú výšku.*

**U**: A obsah podstavy pravidelného štvorbokého ihlana by si vedel vypočítať?

**Ž**: *Toto nie je problém.* **Podstavou ihlana** *je* **štvorec** *so stranou $a = 4$ cm, preto obsah podstavy vypočítam podľa vzorca $S_p = a^2$.*

**U**: Pri výpočte ***telesovej výšky $v$ ihlana*** využijeme zadaný uhol. Vieš povedať, ktoré priamky zvierajú uhol určujúci ***odchýlku bočnej hrany ihlana od roviny podstavy***?

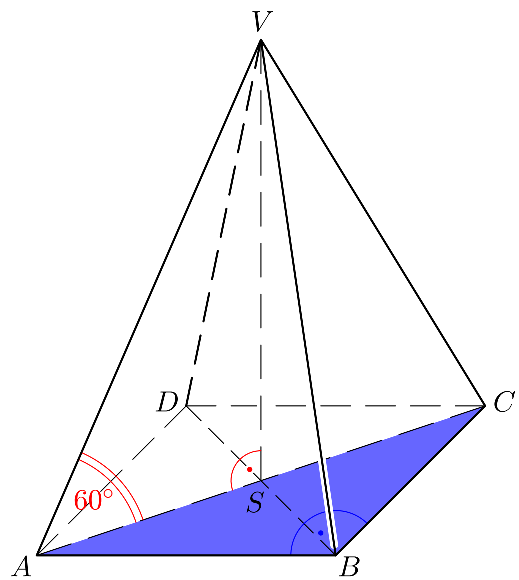



**Ž**: *Spomínam si, že uhol medzi priamkou a rovinou určím ako* **uhol medzi zadanou priamkou a jej kolmým priemetom do roviny**. *Teda zadaný uhol by mal byť pri vrchole $A$ v trojuholníku $ABV$.*

**U**: Teoreticky si to sformuloval správne, ale uhol $BAV$ nie je zadanou odchýlkou. Uvažuj trochu. Aby si dostal ***kolmý priemet bočnej hrany $AV$***, potrebuješ kolmé priemety jej dvoch bodov. Myslím si, že s bodom $A$ nebudeš mať problém.

**Ž**: *Tento bod leží v rovine podstavy, teda sa zobrazí sám do seba. Jasné! Už viem kolmo premietnuť aj bod $V$. Telesová výška je kolmá na rovinu podstavy, preto kolmým priemetom bodu $V$ bude stred $S$ podstavy ihlana.*

**U**: To znamená, že odchýlkou bočnej hrany $AV$ od roviny podstavy je ***uhol $VAS$***. Podľa zadania má veľkosť 60 stupňov. Mal by si ešte vyjadriť dĺžku úsečky $AS$. Využi ***pravouhlý rovnoramenný trojuholník*** $ABC$.




**Ž**: *Využijem* **Pytagorovu vetu**

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

*Obe odvesny majú dĺžku* $a = 4$ cm, *preto túto hodnotu dosadím a čísla umocním. Dostávam*

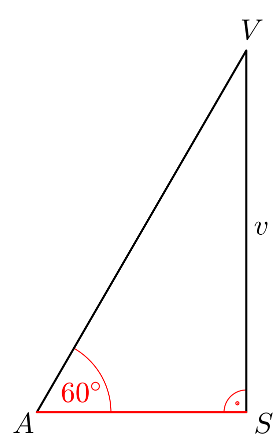
$$|AC|^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32.$$

**U**: Uhlopriečka $AC$ podstavy bude mať dĺžku $|AC| = \sqrt{32}$. Číslo 32 sa dá čiastočne odmocniť, lebo je súčinom čísla 16 a čísla 2. Odmocnina z čísla 16 je číslo 4, preto platí

$$|AC| = 4\sqrt{2}.$$

**Ž**: *Úsečka AS je polovicou uhlopriečky AC. To znamená, že* $|AS| = 2\sqrt{2}$.

**U**: Teraz už v pravouhlom trojuholníku $ASV$, s pravým uhlom pri vrchole $S$, poznáme uhol $VAS$ a dĺžku priľahlej odvesny k tomuto uhlu. Ide o úsečku $AS$. Telesová výška ihlana je v tomto trojuholníku protiľahlou odvesnou k zadanému uhlu.



**Ž**: *Pomerom protiľahlej a priľahlej odvesny je daná funkcia* **tangens** *pre ostrý uhol* $\alpha$. *Platí*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v}{|AS|}.$$

*Ak rovnicu vynásobím dĺžkou strany* $AS$, *dostanem telesovú výšku*

$$v = |AS| \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

**U**: Dosadíme $|AS| = 2\sqrt{2}$ a využijeme, že hodnota funkcie tangens pre uhol 60 stupňov je rovná číslu $\sqrt{3}$.

**Ž**: *Preto platí*

$$v = 2\sqrt{2} \cdot \mathrm{tg}60^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}.$$

*Dá sa tento výsledok nejako upraviť?*

**U**: Súčin odmocnín z dvoch čísel je odmocninou zo súčinu týchto čísel. V našom prípade má telesová výška dĺžku $v = 2\sqrt{6}$. Môžeš dopočítať objem ihlana.

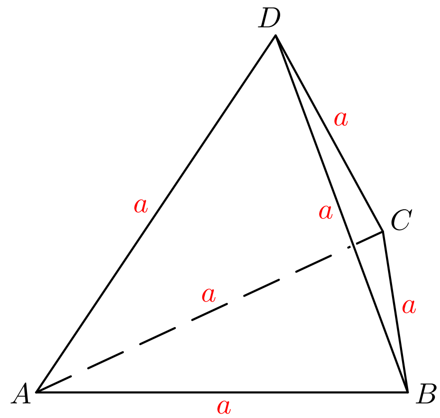
**Ž**: *Do vzorca* $V = \frac{1}{3}a^2v$ *dosadím hodnoty* $a = 4$ cm *a* $v = 2\sqrt{6}$ cm. *Dostávam*

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

**U**: Objem ihlana je $\frac{32\sqrt{6}}{3}$ centimetrov kubických.

**Príklad 3**: *Vyjadrite objem a povrch pravidelného štvorstena, ak je daná dĺžka jeho hrany $a$.*

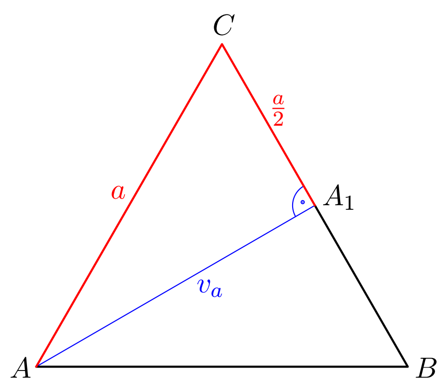
**U**: Objem pravidelného trojbokého ihlana vypočítame podľa vzorca $V = \frac{1}{3}S_p v$, kde $S_p$ je ***obsah podstavy*** a $v$ ***telesová výška***. Akým geometrickým útvarom je podstava?




**Ž**: *Podstavou, ale aj bočnými stenami sú* **rovnostranné trojuholníky** *so stranou dĺžky $a$. Preto obsah podstavy vypočítam ako obsah trojuholníka $ABC$*

$$S_p = S_{\Delta ABC}.$$

**U**: V trojuholníku poznáme dĺžku strany $a$. Potrebujeme vyjadriť výšku $v_a$ na túto stranu.




**Ž**: *Pre* **pravouhlý trojuholník** *$AA_1C$ zapíšem* **Pytagorovu vetu**. *Bod $A_1$ je stredom strany $BC$, lebo* **výška** *$v$ rovnostranom trojuholníku je zároveň aj* **ťažnicou**. *Preto je dĺžka úsečky $CA_1$ rovná polovici strany $a$.*

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

**U**: Výšku dostaneme po odmocnení. Výraz pod odmocninou upravíme tak, že najskôr umocníme zlomok a potom odčítame. Teda oba členy upravíme na spoločného menovateľa, čo je číslo štyri.

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}.$$

**Ž**: *Menovateľ zlomku a výraz $a^2$ v čitateli sa dajú odmocniť. Pre výšku na stranu a dostávam*

$$v_a = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

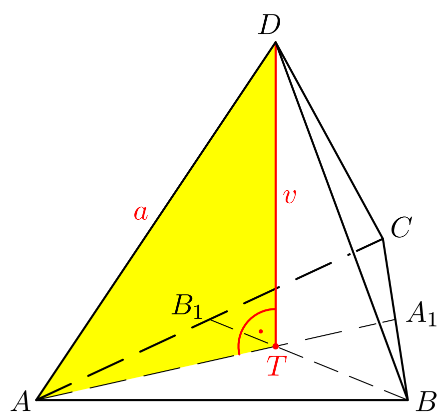
**U**: Môžeme teda vyjadriť obsah podstavy.

**Ž**: *Dosadím do vzorca pre obsah trojuholníka*

$$S_p = S_{\Delta ABC} = \frac{av_a}{2} = \frac{a\frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

---

**U**: Telesovú výšku vyjadríme z ***pravouhlého trojuholníka*** $ATD$, kde $T$ je ťažisko v podstave štvorstena.




**Ž**: *Prečo ste zobrali práve ťažisko?*

**U**: Telesovou výškou má byť úsečka kolmá na rovinu podstavy. ***Ťažisko*** rovnostranného trojuholníka $ABC$ je ***kolmým priemetom*** bodu $D$ do roviny podstavy. To preto, lebo trojuholníky $ATD$, $BTD$ a $CTD$ sú zhodné. Jednou ich stranou je bočná hrana štvorstena, druhou stranou časť ťažnice a tretiu stranu majú spoločnú. Vyplýva to z toho, že štvorsten je pravidelný.

**Ž**: *Aha! Máte pravdu. Mýlilo ma to, lebo ja som uvažoval nad* **priesečníkom výšok** *v podstave. Ťažisko a ortocentrum v rovnostrannom trojuholníku predsa splývajú.*

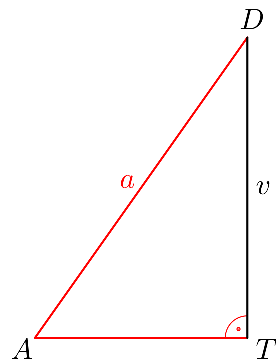
**U**: Týmto si zároveň naznačil myšlienku, ako určiť dĺžku strany $AT$. Vieme, že ťažisko rozdeľuje ťažnicu na dve časti v pomere $1 : 2$.

**Ž**: *Úsečka $AT$ predstavuje* **dve tretiny ťažnice**.

**U**: A keďže ***ťažnica*** je zároveň ***výškou***, môžeme využiť už nami vyjadrenú dĺžku výšky $v_a$ na stranu $a$. Dostávame

$$|AT| = \frac{2}{3} v_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3},$$

lebo dvojky sa vykrátia.




**Ž**: *V pravouhlom trojuholníku $ATD$ už poznám dve strany. Prepona $AD$ má dĺžku $a$ a dĺžku odvesny $AT$ sme teraz vypočítali. Telesovú výšku $v$ vypočítam využitím* **Pytagorovej vety**. *Platí*

$$v^2 = a^2 - |AT|^2.$$

**U**: Dosadíme za dĺžku strany $AT$ a výšku vypočítame po odmocnení. Dostávame

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{9a^2 - 3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}}.$$

Umocnili sme jednotlivé členy a upravili zlomky na spoločného menovateľa. V tomto prípade je to číslo 9.

**Ž**: *V čitateli môžem odmocniť druhú mocninu hrany $a$ a odmocnina z čísla deväť v menovateli je číslo tri.*

$$v = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

---

**U**: Všetky potrebné veličiny na určenie objemu štvorstena sme vyjadrili pomocou dĺžky hrany $a$. Preto objem štvorstena vyjadríme v tvare

$$V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

Pokračuj v úpravách výrazu.

**Ž**: *Výraz zjednoduším na jeden zlomok. V menovateli bude číslo* 36*, lebo je súčinom čísel* 3*,* 4 *a* 3*, ktoré sú v menovateľoch zlomkov. Súčin odmocnín v čitateli napíšem ako jednu odmocninu, a to zo súčinu čísel* 3 *a* 6*. Teda pod odmocninou bude číslo* 18*. V čitateli bude navyše* **tretia mocnina** *dĺžky hrany $a$, lebo je tam v súčine tri krát.*

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{18}a^3}{36}.$$

**U**: Toto vyjadrenie sa ešte dá zjednodušiť. Číslo 18 je súčinom čísel 9 a dva. Preto ho ***čiastočne odmocníme***.

$$V = \frac{\sqrt{18}a^3}{36} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}a^3}{36} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{36}.$$

Po vykrátení čísel 3 a 36 dostávame pre objem výsledný tvar

$$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

**Ž**: *To si mám pamätať?*

**U**: Nie, nemusíš. Bola to úloha. Podstatné boli vyjadrenia rôznych úsečiek, ktoré umožnili určiť telesovú výšku. Vyjadríme ešte povrch pravidelného štvorstena.

**Ž**: *Toto už bude jednoduchšie. Povrch vypočítam podľa vzorca $S = 4 \cdot S_{\Delta ABC}$, lebo štvorsten má štyri rovnaké steny. A obsah trojuholníka $ABC$ predsa poznám. Vyjadrili sme ho pri určovaní objemu. Preto iba dosadím a výraz na pravej strane upravím.*

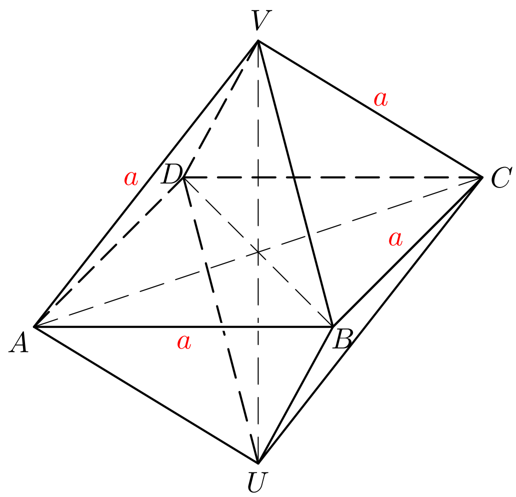
$$S = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \sqrt{3}a^2.$$

**Príklad 4**: *Vyjadrite objem a povrch pravidelného osemstena, ak je daná dĺžka jeho hrany $a$.*

**U**: Máš predstavu ako vyzerá pravidelný osemsten?

**Ž**: *Mal by mať* **osem stien**, *ale ako vyzerá, to netuším.*

**U**: Predstav si, že by si podstavami zlepil ***dva zhodné pravidelné štvorboké ihlany***. Ak ihlany budú mať ***rovnaké dĺžky bočných*** a ***podstavných hrán***, tak toto teleso bude pravidelný osemsten.




**Ž**: *Ale potom mi stačí uvažovať iba jeden štvorboký ihlan. Objem celého telesa bude dvojnásobkom jeho objemu.*

$$V = 2V'.$$

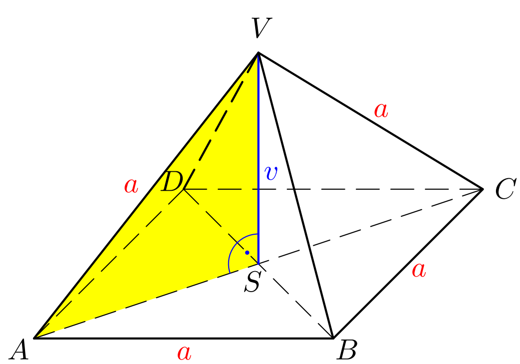
**U**: Máš pravdu. Vyjadríme preto objem pravidelného štvorbokého ihlana, ktorého všetky hrany majú dĺžku $a$. Čo k tomuto vyjadreniu potrebujeme?

**Ž**: *Vzorec na výpočet objemu je* $V' = \frac{1}{3}S_p v$. **Obsah $S_p$ podstavy** *je druhá mocnina dĺžky hrany, lebo podstavou je* **štvorec**.

$$S_p = a^2.$$

*Nepoznám však telesovú výšku $v$.*

**U**: Ako vieme, ***telesová výška*** je úsečka určená hlavným vrcholom ihlana a stredom podstavy. Je to úsečka $SV$. Vypočítame ju z ***pravouhlého trojuholníka*** $ASV$ s pravým uhlom pri vrchole $S$. To preto, lebo výška je kolmá na podstavu.



**Ž**: *Ako to chcete urobiť, keď v tomto trojuholníku poznáme iba preponu $AV$ dĺžky $a$?*

**U**: Dĺžka úsečky $AS$ je predsa ***polovicou uhlopriečky*** $AC$. A tú vieme vypočítať z ďalšieho pravouhlého trojuholníka $ABC$.

**Ž**: *Jasné! Pravý uhol v tomto trojuholníku je pri vrchole $B$ a obe odvesny majú dĺžku podstavnej hrany $a$. Preto platí*

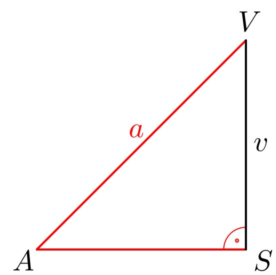
$$|AC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

*Uhlopriečka $AC$ má dĺžku $\sqrt{2}a$.*

**U**: Úsečka $AS$ má polovičnú dĺžku.

$$|AS| = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Teraz môžeš vyjadriť telesovú výšku $v$.




**Ž**: *Podľa* **Pytagorovej vety** *platí*

$$v^2 = a^2 - |AS|^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4}.$$

*Zlomok som umocnil tak, že som umocnil zvlášť čitateľa aj menovateľa.*

**U**: Výšku vyjadríme odmocnením. Výraz pod odmocninou upravíme na spoločného menovateľa. Je ním číslo štyri a potom niektoré členy odmocníme. Dostávame

$$v = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - 2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Nič nám teraz nebráni, aby sme vyjadrili objem ihlana.

**Ž**: *Objem pravidelného osemstena bude* **dvojnásobkom objemu pravidelného štvorbokého ihlana**, *pričom objem ihlana vyjadrím ako jednu tretinu zo súčinu obsahu podstavy a telesovej výšky.*

$$V = 2V' = 2 \cdot \frac{1}{3} S_p v.$$

**U**: Obsah podstavy sme vyjadrili v tvare $S_p = a^2$ a telesovú výšku v tvare $v = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. Dosaď tieto hodnoty do vzorca pre objem.

**Ž**: *Po dosadení dostávam*

$$V = \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3},$$

*lebo dvojky sa vykrátia a súčin druhej a prvej mocniny premennej a je jej tretia mocnina.*

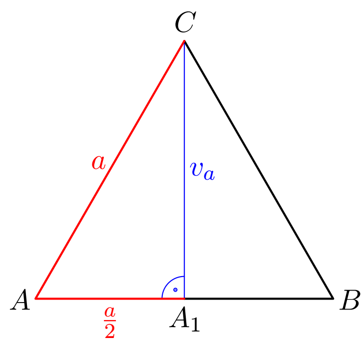
---

**U**: Poďme teraz vyjadriť povrch osemstena.

**Ž**: **Bočnými stenami** *sú* **rovnostranné trojuholníky** *a podstavou je štvorec.*

**U**: Pozor! Osemsten nemá podstavu. Má len osem zhodných bočných stien, čo sú rovnostranné trojuholníky.

**Ž**: *Aha! Podstavy sme spolu zlepili. Sú vo vnútri osemstena. Budem teda počítať iba trojuholníky. Vyjadrím si preto výšku $v_a$ na stranu $a$ v rovnostrannom trojuholníku. Výška rozdelí tento trojuholník na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Preponou je strana $a$ a jedna z odvesien má polovičnú dĺžku ako prepona.*




**U**: Použijeme ***Pytagorovu vetu*** v tvare

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Zlomok sme umocnili a členy upravili na spoločného menovateľa.

**Ž**: *Odmocním a dostanem stenovú výšku*

$$v_a = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

**U**: Povrch osemstena je ***osemnásobkom obsahu*** jedného ***rovnostranného trojuholníka***. Dúfam, že vzorec na výpočet obsahu trojuholníka nie je problém.

**Ž**: *Obsah jedného trojuholníka je* $S_\Delta = \frac{av_a}{2}$. *Pre povrch platí*

$$S = 8S_\Delta = 8 \cdot \frac{av_a}{2} = 4av_a.$$

*Za výšku dosadím výraz* $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ *a členy vynásobím*

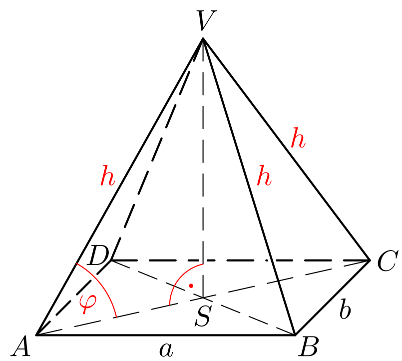
$$S = 4a \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = 2\sqrt{3}a^2.$$

**U**: Povrch osemstena sa dá vyjadriť v tvare $S = 2\sqrt{3}a^2$.

**Príklad 5**: *Bočné hrany kolmého štvorbokého ihlana majú dĺžku $h = 2$ dm a zvierajú s rovinou podstavy uhol $\varphi = 60°$. Podstavou ihlana je obdĺžnik, ktorého uhlopriečky zvierajú uhol $\beta = 60°$. Vypočítajte objem kolmého štvorbokého ihlana.*

**U**: Všeobecný vzorec pre objem ihlana je $V = \frac{1}{3}S_p v$, kde $S_p$ je obsah podstavy a $v$ telesová výška. Našou úlohou je najskôr zistiť rozmery podstavy a veľkosť telesovej výšky. Čo znamená, že ihlan je kolmý?

**Ž**: *Telesová výška v takomto ihlane spája jeho hlavný vrchol so stredom podstavy. Podstavou je obdĺžnik, preto stredom podstavy bude priesečník uhlopriečok obdĺžnika.*




**U**: To znamená, že kolmým priemetom bodu $V$ do podstavy bude jej stred. A keďže bod $A$ leží v podstave, tak ***kolmým priemetom bočnej hrany*** $AV$ do podstavy je úsečka $AS$. Preto uhol pri vrchole $A$ v trojuholníku $ASV$ má veľkosť 60 stupňov.

**Ž**: *To viete odkiaľ?*

**U**: Podľa zadania je známy uhol medzi bočnou hranou a rovinou podstavy. Vieme, že takýto uhol sa určuje ako uhol medzi ***zadanou hranou a jej kolmým priemetom do roviny***. A to sme pred chvíľou urobili.

**Ž**: *Dobre. Teraz už viem vypočítať veľkosť telesovej výšky. Využijem* **pravouhlý trojuholník** *$AVS$ s pravým uhlom pri vrchole $S$. Poznám jeho preponu. Je to bočná hrana $h$ ihlana. Uhol veľkosti 60 stupňov je oproti telesovej výške. Preto použijem funkciu sínus*

$$\sin\varphi = \frac{v}{h}.$$

**U**: Po vynásobení rovnice dĺžkou bočnej hrany $h$ dostávame

$$v = h\sin\varphi.$$

Dosaď hodnoty.

**Ž**: *Viem, že hodnota funkcie sínus pre uhol 60 stupňov je rovná reálnemu číslu $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Preto platí*

$$v = 2\sin 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Telesová výška ihlana má veľkosť** $\sqrt{3}$ dm.

---

**U**: Ten istý trojuholník využijeme aj na výpočet dĺžky úsečky $AS$.

**Ž**: *Táto úsečka je priľahlou odvesnou k zadanému uhlu, preto použijem funkciu kosínus. Platí*

$$\cos\varphi = \frac{|AS|}{h}.$$

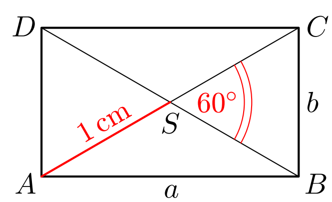
*Ak rovnicu vynásobím premennou $h$, získam dĺžku úsečky $AS$.*

$$|AS| = h\cos\varphi$$

**U**: Dosadíme tie isté zadané číselné hodnoty. Ďalej využijeme, že hodnota funkcie kosínus pre 60 stupňov je jedna polovica. Pre dĺžku strany $AS$ dostávame

$$|AS| = 2\cos 60^\circ = 2\cdot 0,5 = 1.$$

**Ž**: *Prečo sme počítali dĺžku úsečky $AS$?*




**U**: Potrebujeme ju k určeniu strán obdĺžnika, ktorý je podstavou ihlana. Bod $S$ rozpoľuje uhlopriečky obdĺžnika $ABCD$. Preto úsečky $SC$ a $SB$ majú tiež dĺžku jedna.

**Ž**: *Zo zadania však vieme, že uhlopriečky podstavy zvierajú uhol* 60 *stupňov.*

**U**: Teda trojuholník $BCS$ je ***rovnoramenný***, ktorého uhol oproti základni je 60 stupňov. Dokážeš určiť dĺžku strany $BC$?

**Ž**: *Ten trojuholník musí byť* **rovnostranný**. *Na zvyšné dva uhly pri základni, ktoré musia byť rovnaké, zvyšuje* 120 *stupňov. Teda aj uhly pri základni budú mať veľkosť* 60 *stupňov. Aj strany sú rovnaké, preto* $|BC| = b = 1$ dm.

---

**U**: Zdôvodnil si to pekne. Verím, že takto zvládneš aj výpočet strany $a$ obdĺžnika. Využi pravouhlý trojuholník $ABC$.

**Ž**: *Viem, že uhlopriečka $AC$ je dvojnásobkom dĺžky úsečky $AS$. Má veľkosť dva decimetre. Poznám ešte jednu odvesnu* $b = 1$ dm. *Druhú odvesnu vypočítam pomocou* **Pytagorovej vety**. *Bude v tvare*

$$a^2 = |AC|^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3.$$

*Strana a podstavy má dĺžku* $\sqrt{3}$ dm.

**U**: Máme teda všetky údaje na to, aby sme konečne vypočítali objem.

**Ž**: **Obsah podstavy** *bude vyjadrený súčinom dĺžok strán $a$ a $b$ obdĺžnika. Preto pre objem ihlana platí*

$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}ab \cdot v.$$

*Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}.$$

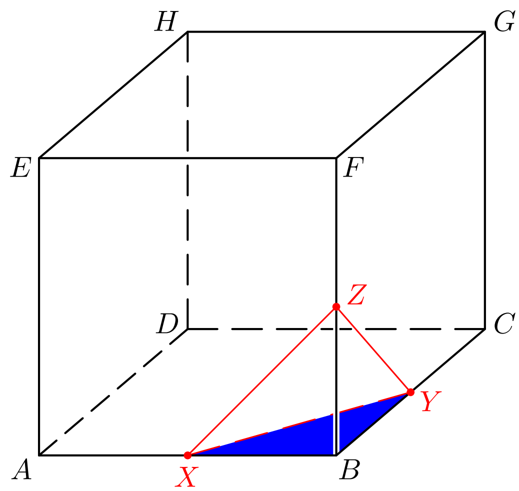
*Ale to je jedna, lebo odmocniny dajú v súčine číslo tri a trojky sa vykrátia.*

**U**: Vidíš. Koľko zložitých výpočtov a výsledok je nakoniec taký jednoduchý. Objem kolmého štvorbokého ihlana je ***jeden decimeter kubický***.

**Príklad 6**: *Kocku s hranou $a = 4$ cm zrežeme v každom vrchole rovinou určenou stredmi hrán vychádzajúcich z daného vrchola kocky. Vypočítajte objem takto vzniknutého telesa.*

**Ž**: *To teleso si neviem ani predstaviť.*

**U**: Uvidíš, že riešenie úlohy nebude až také náročné. Zoberme si naskôr vrchol $B$ kocky. Máš predstavu, ako sa odreže časť z kocky pri tomto vrchole?




**Ž**: *Rovina rezu má prechádzať stredmi hrán kocky, ktoré vychádzajú z vrchola $B$. Teda stredmi hrán $BA$, $BC$ a $BF$. Označím si ich $X$, $Y$ a $Z$. Na kocke si rovinu predstavím ako* **trojuholník** $XYZ$.

**U**: Vtip tejto úlohy nie je v tom, ako vyzerá vzniknuté teleso, ale čo z kocky týmto jediným odrezaním odpadlo.

**Ž**: *Jasné! Veď to isté urobíme ešte vo zvyšných siedmich vrcholoch.*

**U**: Áno, ale odpovedz mi na otázku. Aké teleso sme odrezali vo vrchole $B$ kocky?

**Ž**: *No, to teleso má štyri steny. Odrezali sme* **štvorsten** $XYZB$.

**U**: Štvorsten je vlastne trojboký ihlan. Čo myslíš, aké budú odrezané štvorsteny v ostatných vrcholoch kocky?

**Ž**: *Nič sa nezmení. Budú rovnaké.*

**U**: Takže, ak by si vedel vypočítať objem tohto jedného štvorstena, vedel by si vypočítať aj objem telesa, ktoré z kocky zostane?

**Ž**: *Už mi tá finta napadla. Od* **objemu kocky odrátam osemnásobok objemu jedného štvorstena**.

---

**U**: Celý problém je teda vo výpočte ***objemu trojbokého ihlana*** $XYZB$. Ako by si tento objem vypočítal? Pozri sa ešte raz na obrázok kocky.

**Ž**: *Keď za podstavu zoberiem trojuholník $XYZ$, tak nebudem vedieť určiť telesovú výšku.*

**U**: A prečo by podstavou trojbokého ihlana $XYZB$ nemohol byť trojuholník $XYB$?

**Ž**: *Zdalo sa mi, že to musí byť trojuholník $XYZ$, lebo je rovnostranný.*

**U**: Ale každá stena trojbokého ihlana je trojuholník. Je jedno, ktorý z týchto trojuholníkov je podstavou. Z hľadiska určenia telesovej výšky je jednoduchšie zobrať za podstavu napríklad trojuholník $XYB$.

**Ž**: *Jasné! Už to vidím.* **Telesovou výškou** *bude úsečka $BZ$, lebo hrana $BF$ kocky je* **kolmá** *na jej dolnú podstavu.*

**U**: No vidíš. Pre telesovú výšku ihlana preto platí $v = \frac{a}{2} = 2\ \mathrm{cm}$, lebo bod $Z$ je stredom hrany $BF$.

**Ž**: *Tak to potom aj dve strany v podstave majú dĺžku rovnú polovici hrany kocky. Platí*

$$|XB| = |YB| = 2\ \mathrm{cm}.$$

**U**: Treba si ešte uvedomiť, že ***podstavou ihlana*** je ***rovnoramenný pravouhlý trojuholník*** $XYB$ s pravým uhlom pri vrchole $B$. Preto sa jeho obsah dá vyjadriť v tvare

$$S_{\Delta XYB} = \frac{|XB| \cdot |YB|}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2}.$$

Jeden odrezaný ihlan má podstavu s obsahom ***dva centimetre štvorcové***.

---

**Ž**: *Objem telesa je teda rozdiel objemu kocky a osemnásobku objemu jedného ihlana. Objem kocky je $V_k = a^3$ a objem ihlana $V_i = \frac{1}{3} S_p v$.*

**U**: Preto platí

$$V = V_k - 8V_i = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta XYB} \cdot v.$$

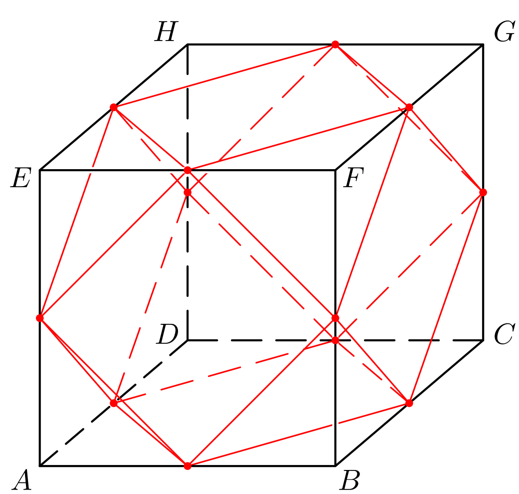
**Ž**: *Po dosadení číselných hodnôt dostávame*

$$V = 4^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 64 - \frac{32}{3} = \frac{192 - 32}{3} = \frac{160}{3}.$$

**U**: Objem telesa, ktoré zostane z kocky je $\frac{160}{3}$ ***centimetrov kubických***.

**Ž**: *Mohli by sme si výsledné teleso načrtnúť?*

**U**: Prečo nie.



**Ž**: *Ako sa to teleso nazýva.*

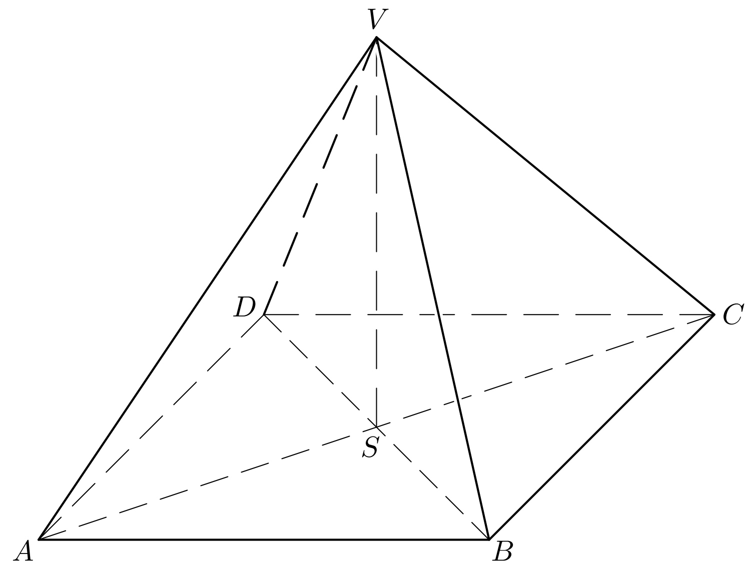
**U**: Prezradím ti, že patrí medzi ***mnohosteny***. Nazýva sa štrnásťsten.

**Ž**: *Preto, že má* 14 *stien?*

**U**: Áno. Osem stien má tvar ***rovnostranného trojuholníka***, ktoré vznikli odrezaním vrcholov kocky. Zvyšnými stenami sú ***štvorce***. Tie sú vpísané do stien kocky.

**Príklad 7**: *Vyjadrite objem pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$, ak je daná dĺžka jeho hrany $a$ a uhol $\varphi$, ktorý zviera bočná stena ihlana s rovinou podstavy.*

**Ž**: *Nepochopil som celkom dobre zadanie úlohy. Uhol $\varphi$ mám chápať ako uhol medzi bočnou hranou $BV$ a podstavnou hranou $BC$?*




**U**: Nie. Uhol medzi dvomi rovinami sa určuje ako ***uhol medzi dvomi priamkami, ktoré sú kolmé na priesečnicu daných rovín***. Pritom jedna priamka je z jednej roviny a druhá priamka z druhej roviny.

**Ž**: *Mohli by ste to vysvetliť na zadanej úlohe?*

**U**: Rozoberieme to spoločne. Čo je prienikom bočnej steny $BCV$ ihlana a jeho podstavy $ABCD$?

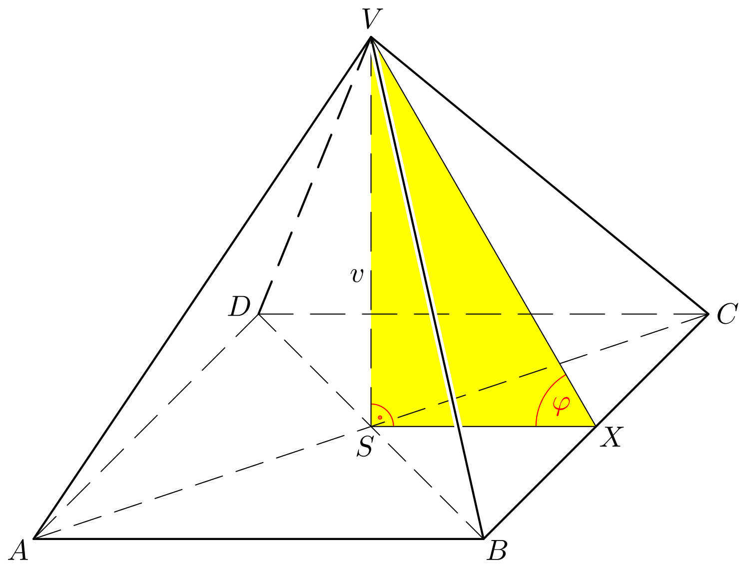
**Ž**: *Tieto steny ihlana sa pretínajú v úsečke $BC$.*

**U**: My však vieme, že úsečka $BC$ je zároveň ***základňou rovnoramenného trojuholníka*** $BCV$, ktorý je bočnou stenou ihlana. V tejto stene potrebujeme určiť jednu priamku, ktorá je na základňu $BC$ trojuholníka kolmá.

**Ž**: *Zoberieme* **výšku trojuholníka** *z bodu $V$ na základňu?*

**U**: Samozrejme. Výška je predsa kolmá na základňu trojuholníka, teda aj na priesečnicu daných dvoch rovín.

**Ž**: *Aha! Tak potom v podstave zoberiem priamku prechádzajúcu stredom podstavy. Priamka bude rovnobežná s prednou hranou $AB$ podstavy.*




**U**: Obe kolmice na hranu $BC$ majú jeden spoločný bod. Je ním stred $X$ tejto hrany. Preto ***uhol medzi bočnou stenou*** $BCV$ ***a rovinou podstavy*** je ***uhol*** $SXV$. Jeho veľkosť je podľa zadania označená symbolom $\varphi$.

---

**Ž**: *Načo nám bude tento uhol, keď máme vyjadriť objem ihlana?*

**U**: Všeobecný vzorec pre ***objem ihlana*** poznáš?

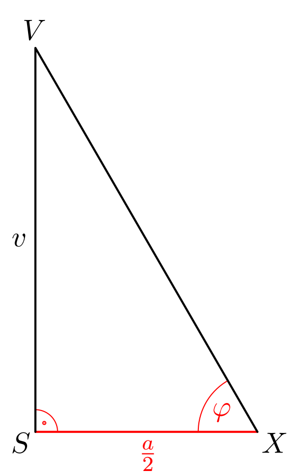
**Ž**: *Samozrejme. K výpočtu objemu potrebujem obsah podstavy a telesovú výšku. Vzorec má tvar*

$$V = \frac{1}{3} S_p v.$$

*Obsah podstavy viem vyjadriť v tvare* $S_p = a^2$*, lebo podstavou je štvorec so stranou* $a$*.*

**U**: Potrebuješ ešte vyjadriť telesovú výšku $v$. A práve na to využiješ aj zadaný uhol. Dĺžku jednej zo strán pravouhlého trojuholníka $SXV$ by si mal vedieť vyjadriť.

**Ž**: *Strana* $SX$ *je polovicou hrany* $a$*.*



**U**: V ***pravouhlom trojuholníku*** $SXV$ poznáme uhol a priľahlú odvesnu. Telesová výška je v tomto trojuholníku protiľahlou odvesnou. Odvesny trojuholníka dáva do vzťahu funkcia tangens. Platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v}{|SX|}.$$

**Ž**: *Čiže telesová výška bude* $v = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\varphi$*, lebo dĺžka úsečky* $SX$ *je rovná polovici strany* $a$*.*

**U**: Teraz už máme všetky informácie na to, aby sme vyjadrili ***objem*** pravidelného štvorbokého ihlana.

**Ž**: *Po dosadení dostávame*

$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{6}a^3\mathrm{tg}\varphi.$$

*Objem štvorbokého ihlana je vyjadrený vzťahom* $V = \frac{1}{6}a^3\mathrm{tg}\varphi$*.*

**Príklad 8**: *Vypočítajte povrch pravidelného štvorbokého ihlana s objemom $V = 48\ \mathrm{cm}^3$. Dĺžky podstavnej hrany a telesovej výšky ihlana sú v pomere $a : v = 3 : 2$.*

**U**: Vzorec na výpočet objemu ihlana je $V = \frac{1}{3}S_p v$, kde $S_p$ je obsah podstavy a $v$ telesová výška ihlana.

**Ž**: *Podstavou je štvorec, lebo ihlan je pravidelný a štvorboký. Obsah podstavy sa preto dá vyjadriť v tvare $S_p = a^2$. Nepoznáme však dĺžku podstavnej hrany $a$.*

**U**: Vypočítame ju zo zadaného objemu ihlana.

**Ž**: *Ako, keď nepoznáme ani telesovú výšku?*

**U**: Poznáme však ***pomer*** dĺžok týchto dvoch úsečiek, $a : v = 3 : 2$. Ak rovnicu vynásobíme telesovou výškou $v$, tak dostaneme vyjadrenie podstavnej hrany $a = \frac{3v}{2}$.

**Ž**: *Prečo ste násobili, keď je tam pomer?*

**U**: Pomer $a : v$ chápeme ako delenie, teda aj zlomok. Preto sa zadaný pomer $a : v = 3 : 2$ dá prepísať do tvaru

$$\frac{a}{v} = \frac{3}{2}.$$

**Ž**: *Rozumiem. Zadaný pomer sme využili na vyjadrenie podstavnej hrany pomocou telesovej výšky.*

**U**: Presne tak. Objem ihlana môžeme teraz vyjadriť iba pomocou neznámej telesovej výšky. Platí

$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3v}{2}\right)^2 v.$$

Pokračuj v úprave výrazu, ktorý vyjadruje objem ihlana.

**Ž**: *Najskôr druhý zlomok umocním a potom všetky členy vynásobím. Dostávam*

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9v^2}{4} \cdot v = \frac{9v^3}{12}.$$

**U**: Zlomok ***vykrátime*** tromi. Objem ihlana teraz vyjadríme v tvare $V = \frac{3v^3}{4}$.

---

**U**: Objem poznáš, vypočítaj telesovú výšku.

**Ž**: *Objem je 48 centimetrov kubických. Dosadím a získam rovnicu*

$$48 = \frac{3v^3}{4}.$$

*Rovnicu vydelím číslom tri, vynásobím číslom štyri a mám*

$$64 = v^3.$$

**U**: ***Telesová výška*** má dĺžku 4 ***centimetre***, lebo tretia odmocnina z čísla 64 je číslo štyri.

**Ž**: *Čiže poznáme aj dĺžku podstavnej hrany a, lebo*

$$a = \frac{3v}{2}.$$

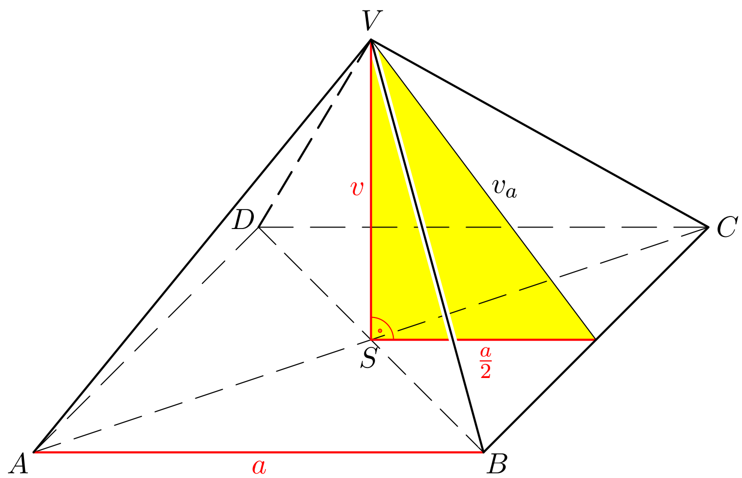
*Ak za telesovú výšku dosadím číslo štyri, tak pre podstavnú hranu dostanem* $a = 6$ cm.

**U**: Určili sme zatiaľ dĺžky podstavnej hrany a telesovej výšky ihlana. Úlohou je však vypočítať jeho povrch. Vzorec by nemal byť problémom.

**Ž**: **Povrch ihlana** *vypočítame podľa vzorca* $S = S_p + S_{pl}$. *Obsah podstavy už máme, ale pre obsah plášťa budeme potrebovať výšku v bočnej stene ihlana.*

**U**: Prečo?

**Ž**: **Plášť ihlana** *tvoria* **štyri rovnoramenné trojuholníky** $ABV$, $BCV$, $CDV$ *a* $DAV$, *ktoré sú bočnými stenami ihlana. Obsah plášťa je teda štvornásobkom obsahu jedného trojuholníka. Základňou je podstavná hrana a, ale výšku na túto stranu nepoznáme.*




---

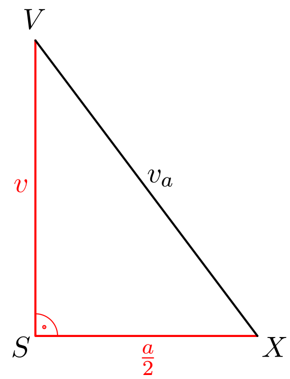
**U**: Výšku bočnej steny $BCV$ vypočítame z pravouhlého trojuholníka $VSX$ s pravým uholom pri vrchole $S$. Bod $S$ je stredom podstavy a bod $X$ je stredom hrany $BC$.

**Ž**: *Prečo ste zobrali bod* $X$*?*

**U**: Trojuholník $BCV$ je ***rovnoramenný*** so základňou $BC$. Výška na túto základňu je v rovnoramennom trojuholníku zároveň ***ťažnicou***. A ťažnica spája vrchol a stred protiľahlej strany.

**Ž**: *Môžete ešte vysvetliť, prečo je v trojuholníku* $VSX$ *pravý uhol pri vrchole* $S$*?*

**U**: Úsečka $SV$ je telesová výška. Je kolmá na podstavu. Podľa definície kolmosti priamky na rovinu je úsečka $SV$ kolmá na každú úsečku podstavy. Teda je kolmá aj na úsečku $SX$.




**Ž**: *Teraz je to už ľahké. V pravouhlom trojuholníku $VSX$ poznám obe odvesny, čo sú telesová výška $v = 4$ cm a polovica podstavnej hrany $|SX| = 3$ cm. Preponu vypočítam podľa* **Pytagorovej vety**. *Platí*

$$v_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2.$$

*Po dosadení a odmocnení dostávam stenovú výšku*

$$v_a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}.$$

**Stenová výška má dĺžku päť centimetrov**.

**U**: Pre povrch ihlana potom platí

$$S = S_p + S_{pl} = a^2 + 4 \cdot S_{\Delta BCV} = a^2 + 4 \cdot \frac{av_a}{2} = a^2 + 2av_a.$$

**Ž**: *Viem, že $a = 6$ cm a $v_a = 5$ cm. Po dosadení do vzorca pre povrch dostávam*

$$S = a^2 + 2av_a = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 36 + 60 = 96 \text{ cm}^2.$$

**U**: Povrch pravidelného štvorbokého ihlana je 96 ***centimetrov štvorcových***.