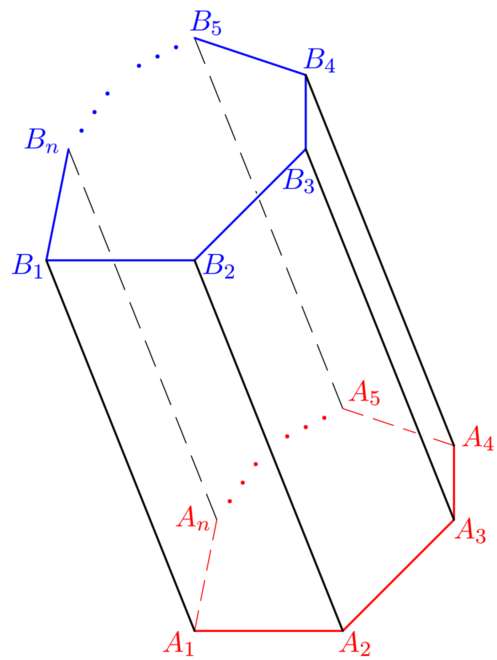
Objem a povrch hranolov

RNDr. Marián Macko

U: Ako by si charakterizoval n-boký hranol?

Ž: *Je to teleso, ktoré má* **dve význačné steny***, ktorými sú zhodné n-uholníky. Ležia v navzájom rovnobežných rovinách.*

U: Tieto steny nazývame ***podstavy hranola***. Rovnobežnými však musia byť aj odpovedajúce si strany týchto n-uholníkov.



Ž: *To znamená, že platí*

$$A_1A_2 \,||\, B_1B_2, \quad A_2A_3 \,||\, B_2B_3, \quad A_3A_4 \,||\, B_3B_4, \quad . \;\; . \;\; . \quad A_nA_1 \,||\, B_nB_1.$$

U: Uvedené strany n-uholníkov nazývame ***podstavné hrany***.

Ž: *Spomínam si, že hranol má aj* **bočné hrany***. Sú to navzájom rovnobežné úsečky rovnakej dĺžky. Podľa nášho označenia sú to napríklad bočné hrany A_1B_1, A_2B_2, A_nB_n. n-boký hranol ich má n.*

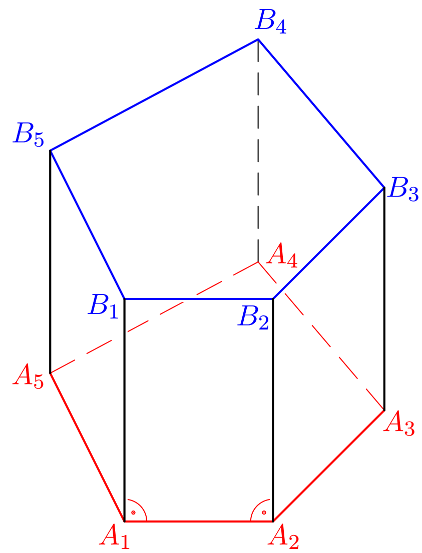
U: Spolu s podstavnými hranami vytvárajú ***bočné steny hranola***. Akými rovinnými geometrickými útvarmi sú bočné steny?

Ž: *Vzhľadom na rovnobežnosť, o ktorej už bola reč, sú to* **rovnobežníky***. Spolu má teda n-boký hranol $n + 2$* **stien***.*

U: Spoločné body hrán n-bokého hranola sa nazývajú ***vrcholy hranola***.

Ž: *To znamená, že n-boký hranol má $2n$ vrcholov.*

U: Pripomenieme si ešte niekoľko špeciálnych prípadov hranolov. ***Kolmý hranol*** má všetky bočné hrany kolmé na roviny podstáv hranola.



Ž: *To ale znamená, že bočnými stenami kolmého hranola sú obdĺžniky.*

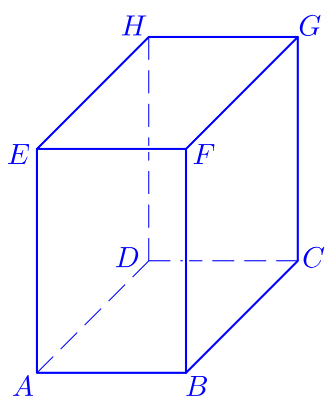
U: Máš pravdu. Ak navyše podstavami ***kolmého hranola*** budú pravidelné n-uholníky, tak hranol nazveme ***pravidelným***.

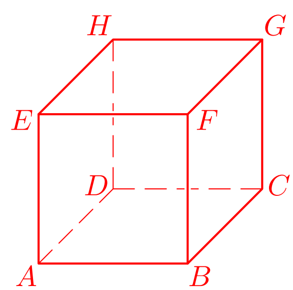
Ž: *Pravidelný n-boký hranol má teda podstavy pravidelné n uholníky a bočnými stenami sú zhodné obdĺžniky.*

U: Naše pripomenutie základných pojmov o hranoloch zakončíme kvádrom a kockou. Vieme, že patria medzi hranoly. Čím sa vyznačujú?

Ž: **Kváder** *by som zaradil medzi kolmé štvorboké hranoly. Jeho podstavou je obdĺžnik.*

U: No a nakoniec, kváder, ktorého každá stena je štvorec, sa nazýva ***kocka***.





U: Skôr, než uvedieme všeobecný vzorec pre objem n-bokého hranola, pripomenieme si niektoré základné vlastnosti, ktoré platia pre objem telies. Z vlastnej skúsenosti vieme, že objem telesa je vždy ***kladné reálne číslo***. Dajú sa porovnať objemy zhodných telies?

Ž: *No, ak sú* **telesá zhodné**, *tak musia mať* **rovnaký objem**.

U: Častokrát sa stáva, že dané teleso sa dá rozložiť na viacero jednoduchších, navzájom sa neprekrývajúcich telies. Vieš, aký je súvis medzi objemom daného telesa a objemami telies, z ktorých pozostáva?

Ž: *Logicky vychádza, že* **objem daného telesa** *je* **súčtom objemov telies***, z ktorých je ono zložené.*

U: Posledná vlastnosť stanovuje, čo je jednotkou objemu.

Ž: *Jednotkou objemu je predsa* **meter kubický***. Ale môže to byť aj centimeter kubický, dokonca aj liter.*

U: V každom prípade jednotkou objemu je objem ***jednotkovej kocky***. Je to kocka s hranou jednotkovej dĺžky. Čiže základom merania objemu je objem kocky s hranou dĺžky a.

Ž: *Vzorec na jeho výpočet je* $V = a^3$.

U: Máš pravdu. Tento vzorec je zo všetkých vzorcov pre objemy telies najjednoduchší. Dôležité však je, aby si si uvedomil, že tento vzorec sa nedá dokázať. Je daný axiomaticky. Vzorce pre objem všetkých ostatných telies sa už dajú na jeho základe a základe spomenutých pravidiel odvodiť. Ako sa dá čo najvšeobecnejšie vyjadriť ***objem hranola***?

Ž: *Pamätám si na vzorec* $V = S_p v$, *kde* S_p *je* **obsah podstavy** *a* v *je* **výška hranola**.

U: Pritom výškou hranola rozumieme vzdialenosť rovnobežných rovín, v ktorých ležia podstavy hranola.

U: Okrem objemu vieme určiť aj povrch hranola. Akú predstavu máš o tomto pojme?

Ž: *Povrch súvisí s obsahom všetkých stien hranola.*

U: Všetky steny hranola tvoria jeho ***hranicu***. Hranicou n-bokého hranola je zjednotenie dvoch n-uholníkov a n rovnobežníkov.

Ž: *Rovnobežníky sú vlastne bočnými stenami hranola. Vytvárajú* **plášť hranola**.

U: Preto všeobecný vzorec pre povrch hranola má tvar $S = 2S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} obsah plášťa hranola.

Ž: *Výpočty objemov hranolov budú závisieť od toho, ako vyzerajú ich podstavy a bočné steny.*

U: Máš pravdu. Vzorce pre objem a povrch hranola sa pre konkrétne hranoly dajú vyjadriť cez zadané veličiny. Pamätať si ich, však má zmysel iba v dvoch špeciálnych prípadoch. Ide o kocku a kváder.

Ž: *Ale to je ľahké. Objem* **kocky** *je* $V = a^3$ *a jej povrch* $S = 6a^2$.

U: Prečo je vo vzorci pre povrch vyjadrenie $6a^2$?

Ž: *Kocka má predsa šesť zhodných stien. Sú to štvorce so stranou* a. *Obsah jednej steny je preto* a^2.

U: Aký bude objem kvádra, ak má rozmery a, b a c?

Ž: *Objem* **kvádra** *bude* $V = abc$ *a jeho* **povrch** *je daný vzorcom*

$$S = 2(ab + bc + ca).$$

U: Výraz ab vyjadruje obsah podstavy. Obe podstavy sú zhodné obdĺžniky, preto je tento výraz vo vzorci pre povrch zarátaný dvakrát. To isté platí aj o dvojici predná a zadná stena, ako aj o dvojici bočných stien.

Príklad 1: *Dĺžky hrán kvádra sú v pomere $a : b : c = 1 : 3 : 4$. Povrch kvádra je $342\ cm^2$. Vypočítajte objem kvádra.*

Ž: *Zo zadaného pomeru dĺžok hrán kvádra vyplýva, že hrany môžem vyjadriť pomocou jednej neznámej. Použijem premennú x. Potom platí*

$$a = x, \quad b = 3x, \quad c = 4x.$$

U: Doplním, že neznáma x patrí do množiny kladných reálnych čísel. Poznáme povrch kvádra. Vzorec by nemal byť problém.

Ž: *Povrch kvádra s rozmermi a, b, c vypočítame podľa vzorca*

$$S = 2 \cdot (ab + bc + ca).$$

U: Za dĺžky hrán dosadíme vyjadrenia $a = x$, $b = 3x$ a $c = 4x$. Dostávame

$$S = 2 \cdot (x \cdot 3x + 3x \cdot 4x + x \cdot 4x).$$

Uprav výraz na pravej strane.

Ž: *Členy v zátvorke vynásobím a mám*

$$S = 2 \cdot (3x^2 + 12x^2 + 4x^2).$$

Po sčítaní a vynásobení dvomi dostaneme vyjadrenie povrchu kvádra v tvare

$$S = 2 \cdot 19x^2 = 38x^2.$$

U: Podľa zadania je povrch kvádra rovný 342 centimetrov štvorcových. Získame preto rovnicu

$$38x^2 = 342.$$

Vypočítaj hodnotu neznámej x.

Ž: *Vydelím číslom 38*

$$x^2 = \frac{342}{38} = 9.$$

Riešením kvadratickej rovnice v množine kladných reálnych čísel je číslo tri.

$$x = 3.$$

U: Hrany kvádra budú mať preto dĺžky

$$a = x = 3 \text{ cm}, \qquad b = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}, \qquad c = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}.$$

Zvyšok riešenia úlohy už dokončíš sám.

Ž: *Použijem vzorec pre objem kvádra*

$$V = abc.$$

Dosadím dĺžky hrán a po vynásobení čísel dostávam výsledok 324 *centimetrov kubických.*

$$V = abc = 3 \cdot 9 \cdot 12 = 324\ \mathrm{cm}^3.$$

Úloha 1: *Dĺžky hrán kvádra sú v pomere* $a : b : c = 2 : 4 : 3$. *Povrch kvádra je* $13\ \mathrm{dm}^2$. *Vypočítajte objem kvádra.*

Výsledok: $V = 3\ \mathrm{dm}^3$

Príklad 2: *Dĺžky hrán kvádra sú v pomere $a : b : c = 2 : 3 : 6$. Jeho telesová uhlopriečka má dĺžku 14 cm. Vypočítajte objem a povrch kvádra.*

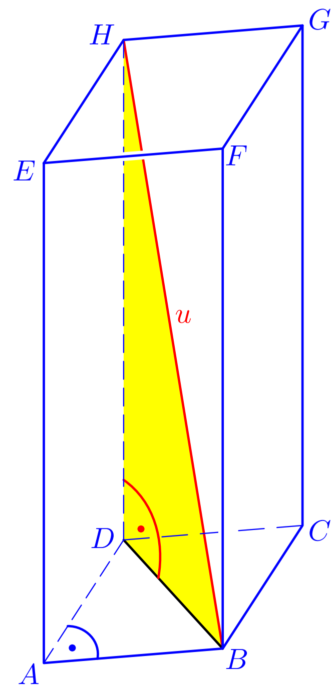
Ž: *Zo zadaného pomeru dĺžok hrán kvádra vyplýva, že hrany môžem vyjadriť pomocou jednej neznámej. Použijem premennú x. Potom platí*

$$a = 2x, \qquad b = 3x, \qquad c = 6x.$$

Viem, že dĺžky hrán kvádra sú kladné reálne čísla. Preto aj neznáma x je kladné reálne číslo.

U: Na jej výpočet využijeme telesovú uhlopriečku. Máš predstavu, koľko telesových uhlopriečok má kváder?

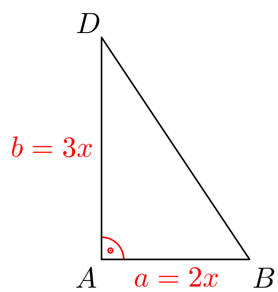
Ž: *Ak označím vrcholy kvádra $ABCDEFGH$, tak telesovými uhlopriečkami budú úsečky AG, BH, CE a DF. Všetky majú rovnakú veľkosť.*



U: Dĺžku telesovej uhlopriečky BH vyjadríme z pravouhlého trojuholníka BDH. Pravý uhol je pri vrchole D. Podľa zadania je dĺžka hrany DH rovná $6x$.

Ž: *Budeme však potrebovať dĺžku stenovej uhlopriečky BD.*

U: Vyjadríme ju z pravouhlého trojuholníka BAD s pravým uhlom pri vrchole A.



Ž: *Poznám dĺžky odvesien, lebo* $|AB| = a = 2x$ *a* $|AD| = b = 3x$. *Použijem* **Pytagorovu vetu**

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2.$$

Dosadím vyjadrenia strán, umocním a sčítam. Dostávam

$$|BD|^2 = (2x)^2 + (3x)^2 = 4x^2 + 9x^2 = 13x^2.$$

U: Vrátime sa k výpočtu telesovej uhlopriečky BH. Vyjadríme ju z pravouhlého trojuholníka BDH. Pravý uhol je pri vrchole D. Opäť využijeme Pytagorovu vetu v tvare

$$|BH|^2 = |BD|^2 + |DH|^2.$$

Za prvý člen na pravej strane dosadíme $13x^2$ a za dĺžku hrany DH výraz $6x$. Dostávame

$$|BH|^2 = 13x^2 + (6x)^2 = 13x^2 + 36x^2 = 49x^2.$$

Ž: *Dĺžka telesovej uhlopriečky je podľa zadania rovná* 14 cm. *Preto platí*

$$14^2 = 49x^2.$$

Po umocnení čísla 14 *vydelím rovnicu číslom* 49. *Kvadratická rovnica bude mať tvar*

$$x^2 = \frac{196}{49} = 4.$$

U: Hodnota neznámej x bude rovná číslu ***dva***. Môžeme vyjadriť číselné hodnoty dĺžok hrán kvádra. Teda

$$a = 2x = 4 \text{ cm}, \quad b = 3x = 6 \text{ cm}, \quad c = 6x = 12 \text{ cm}.$$

Ž: *Vypočítať objem už nebude problém. Použijem vzorec* $V = abc$. *Dosadím číselné hodnoty*

$$V = abc = 4 \cdot 6 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^3.$$

Objem kvádra je 288 *centimetrov kubických.*

U: Povrch kvádra vypočítaš podľa vzorca $S = 2(ab + bc + ca)$.

Ž: *Aj to je ľahké. Za dĺžky hrán dosadím číselné hodnoty. Potom číselné hodnoty vynásobím a sčítam.*

$$S = 2(ab + bc + ca) = 2(4 \cdot 6 + 6 \cdot 12 + 12 \cdot 4) = 2(24 + 72 + 48) = 288 \text{ cm}^2.$$

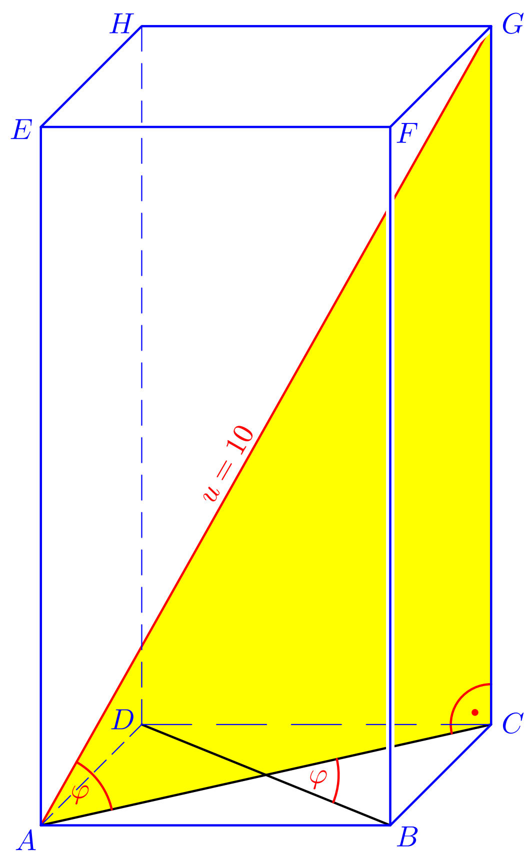
U: Dosť zaujímavý výsledok. Objem aj povrch kvádra je vyjadrený tým istým číslom, a to 288.

Príklad 3: *Telesová uhlopriečka kvádra má dĺžku $u = 10$ cm a zviera s rovinou podstavy kvádra uhol $\varphi = 60^\circ$. Taký istý uhol zvierajú uhlopriečky podstavy. Vypočítajte objem kvádra.*

U: Čo potrebujeme poznať na výpočet objemu kvádra?

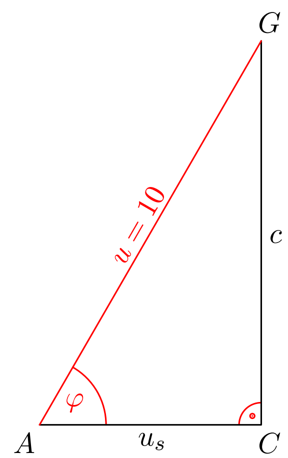
Ž: *Dĺžky jeho troch rôznych hrán. Vzorec pre objem je $V = abc$.*

U: Nepoznáme však dĺžku žiadnej hrany kvádra. Preto ich musíme najskôr vypočítať zo zadaných hodnôt. Kde nameriame uhol, ktorý zviera telesová uhlopriečka AG s rovinou podstavy?



Ž: *Uhol φ bude medzi úsečkami AG a AC. Teda pri vrchole A v pravouhlom trojuholníku ACG.*

U: Tento trojuholník má pravý uhol pri vrchole C. V trojuholníku poznáme dĺžku prepony, čo je telesová uhlopriečka $u = 10$ cm a ostrý uhol pri vrchole A. Nepoznáme dĺžku protiľahlej odvesny CG, čo je vlastne hrana c kvádra.



Ž: *Tak si ju vypočítam. Použijem funkciu sínus pre uhol φ. Je to pomer protiľahlej odvesny k prepone. Preto platí*

$$\sin\varphi = \frac{c}{u}.$$

Ak rovnicu vynásobím dĺžkou uhlopriečky, dostanem hranu c:

$$c = u\sin\varphi.$$

U: Dosadíme zadané číselné hodnoty a využijeme, že hodnota funkcie sínus pre 60 stupňov je $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$c = 10\sin 60^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Z toho istého trojuholníka vypočítame aj dĺžku stenovej uhlopriečky AC.

Ž: *Teraz použijem funkciu kosínus. Platí*

$$\cos\varphi = \frac{|AC|}{u},$$

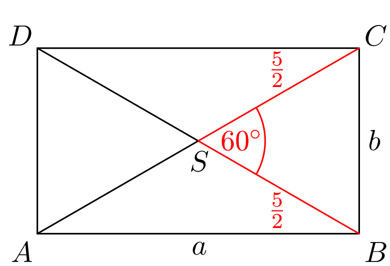
čiže pre stenovú uhlopriečku AC dostávam $|AC| = u\cos\varphi$.

U: Hodnota funkcie kosínus pre 60 stupňov je rovná číslu $\dfrac{1}{2}$, preto

$$|AC| = 10\cos 60^\circ = 10\cdot\frac{1}{2} = 5.$$

Ž: *Ako vypočítame dĺžky podstavných hrán a a b?*

U: Využijeme teraz vypočítanú dĺžku stenovej uhlopriečky AC a uhol, ktorý uhlopriečky v podstave zvierajú. Podľa zadania má tento uhol tiež 60 stupňov.



Ž: *Viem, že uhlopriečky v obdĺžniku majú rovnakú veľkosť. Teda* $|SB| = |SC| = 2,5$ cm*, lebo dĺžka celej uhlopriečky je* 5 *centimetrov. Trojuholník je rovnoramenný.*

U: Dokonca je rovnostranný, lebo uhol medzi ramenami je 60 stupňov. Keďže uhly pri základni majú rovnakú veľkosť a súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je 180 stupňov, aj uhly pri základni majú veľkosť 60 stupňov.

Ž: *Teda dĺžka hrany b kvádra je $b = 2{,}5$ cm. Hranu a vypočítam z pravouhlého trojuholníka ABC. Poznám dĺžku prepony, čo je strana AC a jednu odvesnu. To je vypočítaná strana b. Použijem* **Pytagorovu vetu** *v tvare*

$$a^2 = |AC|^2 - b^2.$$

U: Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$a^2 = 5^2 - 2,5^2 = 25 - 6,25 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}.$$

Hrana a kvádra má veľkosť $a = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. Vypočítaj objem kvádra.

Ž: *Dĺžky hrán dosadím do vzorca $V = abc$. Potom*

$$V = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{375}{4}.$$

U: Objem kvádra je $\frac{375}{4}$ cm^3.

Príklad 4: *Vypočítajte objem a povrch pravidelného šesťbokého hranola, ktorého podstavná hrana má dĺžku* 4 cm *a telesová výška* $v = 6$ cm.

Ž: *Objem šesťbokého hranola vypočítam tak, že obsah podstavy vynásobím telesovou výškou.*

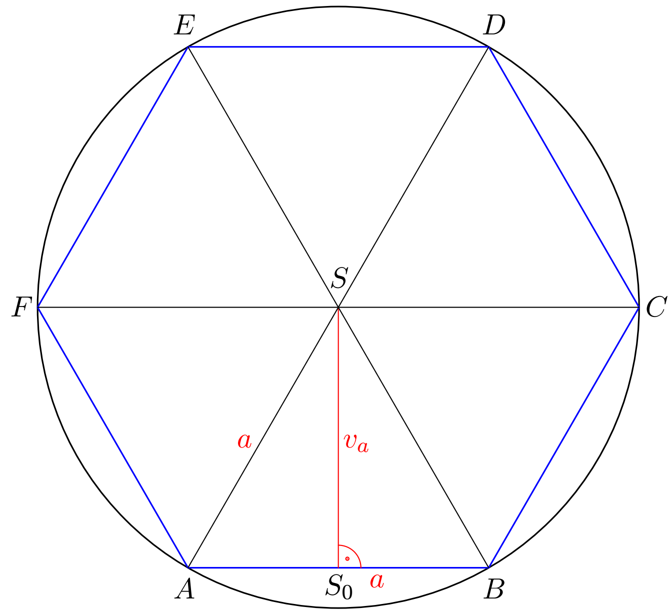
$$V = S_p v.$$

U: Telesovú výšku poznáme. Úlohou zostáva vypočítať obsah podstavy. Akým rovinným útvarom je podstava zadaného telesa?

Ž: *Mal by to byť* **pravidelný šesťuholník**, *lebo hranol je pravidelný a šesťboký. Ale ako sa vypočíta obsah pravidelného šesťuholníka, to potrebujem pripomenúť.*

U: Výpočet je jednoduchý. Určite sa pamätáš, že pravidelný šesťuholník sa dá rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov.

Ž: *Jasné! Už si spomínam. Tomuto útvaru sa dá opísať kružnica, ktorej polomer je rovnaký ako strana šesťuholníka. Preto strany AS a BS majú dĺžku a.*



U: Obsah šesťuholníka bude šesťnásobkom obsahu jedného trojuholníka. Ak označíme obsah trojuholníka $S_{\Delta ABS}$, tak obsah podstavy bude

$$S_p = 6 \cdot S_{\Delta ABS}.$$

U: Aby si vyjadril obsah trojuholníka ABS, potrebuješ vypočítať výšku na stranu a.

Ž: *Výška rozdelí rovnostranný trojuholník na dva pravouhlé trojuholníky. V trojuholníku AS_0S je strana AS preponou. Má dĺžku rovnú 4 centimetrom. Odvesna AS_0 má polovičnú dĺžku. Podľa Pytagorovej vety platí*

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

U: Dosadením hodnôt dostávame

$$v_a^2 = 4^2 - 2^2 = 12.$$

Výška na stranu a má veľkosť $v_a = 2\sqrt{3}$.

Ž: *Vypočítam obsah podstavy. Do vzorca* $S_p = 6 \cdot S_{\Delta ABS} = 6 \cdot \dfrac{av_a}{2} = 3av_a$ *dosadím číselné hodnoty.*

$$S_p = 3 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

U: Ak obsah podstavy vynásobíme telesovou výškou, dostaneme objem hranola. Preto platí

$$V = S_p v = 24\sqrt{3} \cdot 6 = 144\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

Vypočítať povrch pravidelného šesťbokého hranola, už nebude problémom.

Ž: *Na výpočet povrchu použijem vzorec* $S = 2S_p + S_{pl}$. *Obsah podstavy už poznám,*

$$S_p = 24\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

Plášť hranola tvorí šesť zhodných odĺžnikov s rozmermi $a = 4$ cm *a* $v = 6$ cm. *Preto povrch hranola bude mať tvar*

$$S = 2S_p + 6 \cdot ab.$$

U: Dosaď číselné hodnoty.

Ž: *Po dosadení známych hodnôt dostanem*

$$S = 2 \cdot 24\sqrt{3} + 6 \cdot 4 \cdot 6 = 48\sqrt{3} + 144.$$

U: Povrch pravidelného šesťbokého hranola je $48\sqrt{3} + 144$ centimetrov štvorcových.

Príklad 5: *Ako sa zmení objem a povrch kocky, ak sa hrana kocky*
a) trikrát zväčší,
b) zmenší o 25 percent?

U: Aký objem má daná kocka, ak dĺžka jej hrany je a?

Ž: *To je triviálne. Objem bude* $V = a^3$.

U: Podľa zadania zväčšíme hranu kocky trikrát. Preto sa jej dĺžka dá vyjadriť v tvare $a' = 3a$. Aký bude teraz objem kocky?

Ž: *Objem bude* $V' = (a')^3$. *Po dosadení dostávam*

$$V' = (3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3.$$

Objem je 27 krát väčší.

U: Na otázku, ako sa zmenil objem, sa dá odpovedať minimálne dvojako. Môže nás zaujímať, koľkokrát sa zmenil objem, alebo o koľko sa zmenil objem.

Ž: *Máte pravdu. To som si neuvedomil. O zmene objemu som uvažoval podľa zadania, ktoré hovorí o zmene hrany. Ak sa pýtate, o koľko sa zmení objem, ani to nebude ťažké vypočítať. Objemy teraz odrátam.*

$$V' - V = 27a^3 - a^3 = 26a^3.$$

U: Ak sa hrana kocky zväčší trikrát, objem kocky sa zväčší o 26-násobok objemu pôvodnej kocky. Na druhej strane uznávam, že prirodzenejšia odpoveď na otázku v zadaní úlohy je tá, ktorú si uviedol ako prvú. Porovnaj povrchy.

Ž: *Pôvodná kocka bude mať povrch* $S = 6a^2$, *kde* a *je dĺžka jej hrany. Po trojnásobnom zväčšení hrany kocky bude hrana* $a' = 3a$ *a teda povrch novej kocky bude* $S' = 6 \cdot (a')^2 = 6 \cdot (3a)^2 = 6 \cdot 9a^2 = 54a^2$. *Tento povrch je* **deväťkrát väčší** *ako povrch pôvodnej kocky.*

U: Všeobecne platí, že povrchy sú v pomere druhej mocniny pomeru dĺžok hrán kocky. Podobne vyriešime úlohu b). Hrana kocky sa teraz zmenší o 25 percent. Ako sa dá vyjadriť dĺžka hrany kocky po zmenšení, ak hrana kocky mala pôvodne dĺžku a?

Ž: *Viem, že hrana kocky sa zmenšila o 25 percent. Bude preto predstavovať 75 percent pôvodnej dĺžky hrany. Potom platí* $a' = 0{,}75a$.

U: To znamená, že aj objem kocky sa zmenší. Z tohto vyjadrenia zmeny jej hrany vypočítame, o koľko percent.

Ž: *Objem teraz bude*

$$V' = (a')^3 = (0{,}75a)^3 = 0{,}421875a^3.$$

U: Objem a^3 predstavuje 100 percent a objem $0{,}421875a^3$ vyjadruje 42,1875 percent zo základu. To znamená, že objem sa ***zmenšil o 57,8125 percent***. Porovnaj povrchy.

Ž: *Povrch pôvodnej kocky je* $S = a^2$. *Po zmenšení hrany bude povrch* $S' = 6 \cdot (a')^2 = 6 \cdot (0{,}75a)^2 = 6 \cdot 0{,}5625a^2$. *To je 56,25 percenta pôvodného povrchu. Povrch sa* **zmenšil o 43,75 percenta**.

Príklad 6: *Pravidelný šesťboký hranol s objemom* $81\sqrt{3}$ cm^3 *má telesovú výšku dvakrát väčšiu ako dĺžku podstavnej hrany. Vypočítajte povrch hranola.*

U: Najskôr vypočítame dĺžku podstavnej hrany. Využijeme vzorec pre objem pravidelného šesťbokého hranola

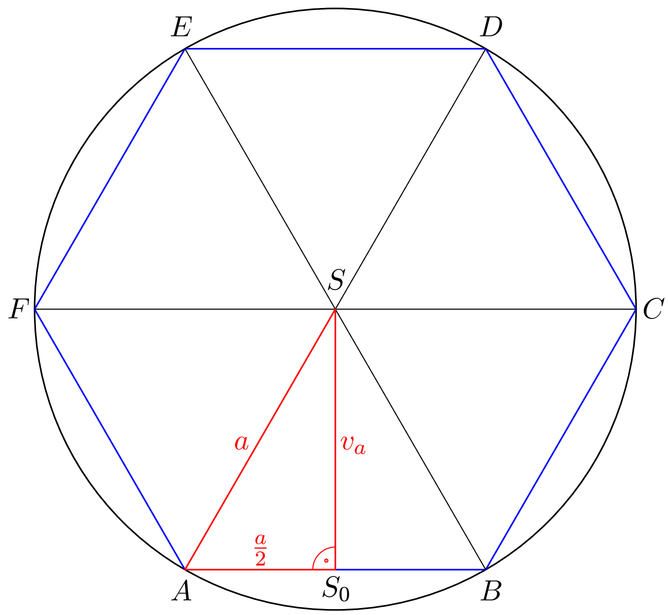
$$V = S_p v.$$

Ž: *Ale viem, že telesová výška je dvakrát väčšia ako dĺžka podstavnej hrany. Platí teda* $v = 2a$. *Objem hranola potom vyjadrím vzorcom*

$$V = S_p \cdot 2a.$$

U: Zostáva nám vyjadriť obsah podstavy hranola pomocou dĺžky podstavnej hrany. Podstavou je pravidelný šesťuholník. Ten sa dá rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov. Preto obsah podstavy bude šesťnásobkom obsahu trojuholníka ABS.

$$S_p = 6S_{\Delta ABS}.$$



Ž: *Keďže trojuholník* ABS *je rovnostranný so stranou dĺžky* a, *nebude problém vyjadriť jeho obsah. Rozdelím si ho výškou* v_a *na dva pravouhlé trojuholníky. Pre trojuholník* AS_0S *použijem* **Pytagorovu vetu**. *Prepona* AS *má dĺžku* a, *odvesna* AS_0 *polovičnú veľkosť ako prepona. Výšku* v_a, *čo je druhá odvesna v tomto trojuholníku, vyjadrím v tvare*

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

U: Po umocnení a odčítaní pre druhú mocninu výšky dostávame

$$v_a^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Odmocníme, čím dostaneme výšku v tvare $v_a = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

U: Vyjadri obsah šesťuholníka.

Ž: *Obsah podstavy, ako sme povedali, je šesťnásobkom obsahu jedného trojuholníka. Teda*

$$S_p = 6 \cdot S_{\Delta ABS} = 6 \cdot \frac{av_a}{2} = 3 \cdot av_a = 3 \cdot a\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

U: Toto vyjadrenie dosadíme do vzorca pre objem $V = S_p \cdot 2a$ a dostávame

$$V = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot 2a = 3\sqrt{3}a^3.$$

Ž: *Objem poznám, tak ho dosadím:*

$$81\sqrt{3} = 3\sqrt{3}a^3$$

a teraz rovnicu vykrátim číslom $3\sqrt{3}$*. Pre tretiu mocninu podstavnej hrany platí*

$$a^3 = 27.$$

Podstavná hrana a **má veľkosť 3 centimetre**, *lebo* $a = \sqrt[3]{27} = 3$.

U: Povrch šesťbokého hranola vypočítame podľa vzorca $S = 2S_p + S_{pl}$. Obsah podstavy sme už vyjadrili, stačí dosadiť vypočítanú číselnú hodnotu. Plášť predstavuje zjednotenie šiestich obdĺžnikov, ktorých rozmermi sú podstavná hrana a telesová výška. Preto sa povrch dá vyjadriť aj v tvare

$$S = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + 6 \cdot av.$$

Ž: *V prvom člene vykrátim dvojky a potom dosadím číselné hodnoty. Povrch hranola je*

$$S = 3\sqrt{3} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \cdot 6.$$

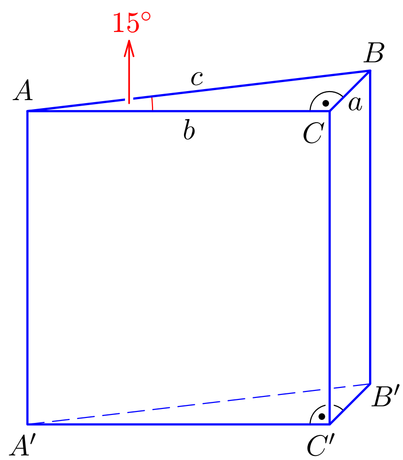
Po vynásobení dostávam

$$S = 27\sqrt{3} + 108.$$

U: Povrch hranola s objemom $81\sqrt{3}$ centimetrov kubických je $27\sqrt{3} + 108$ ***centimetrov štvorcových***.

Príklad 7: *Podstavou trojbokého hranola je pravouhlý trojuholník s ostrým uhlom* 15 *stupňov a preponou* $c = 4$ dm. *Výška hranola má tú istú veľkosť ako prepona podstavy. Určte veľkosť hrany kocky, ktorej objem je rovnaký ako objem tohto hranola.*

Ž: *Najskôr vypočítam objem trojbokého hranola. Použijem vzorec* $V = S_p v$. *Viem, že telesová výška má veľkosť* $v = 4$ dm, *lebo je rovnako dlhá ako prepona podstavy. Problém vidím vo výpočte obsahu podstavy.*



U: Podstavou hranola je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole C. Jeho obsah vypočítame podľa vzorca $S_p = \dfrac{ab}{2}$, lebo jedna odvesna je výškou na druhú odvesnu pravouhlého trojuholníka.

Ž: *Ale odvesny trojuholníka nepoznáme.*

U: Vyjadríme ich pomocou prepony c a uhla α. Ich veľkosti poznáme. Odvesna a je protiľahlá k uhlu α, preto využijeme funkciu sínus. Platí

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Ak rovnicu vynásobíme premennou c, dostaneme vyjadrenie dĺžky odvesny a:

$$a = c\sin\alpha.$$

Ž: *Nedosadíme hodnoty?*

U: Zatiaľ nie. Hodnotu funkcie sínus pre 15 stupňov by sme počítali s využitím kalkulačky. Dostali by sme však približnú hodnotu. Skúsme vyjadriť všetky zatiaľ neznáme dĺžky pomocou zadaných veličín. Neskôr uvidíš, že sa výpočty istým spôsobom zjednodušia. Vyjadri z pravouhlého trojuholníka odvesnu b.

Ž: *Keďže je priľahlou odvesnou k uhlu* α, *tak použijem funkciu kosínus. Pre jej hodnotu platí*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Opäť vynásobím premennou c. *Odvesna* b *bude mať vyjadrenie* $b = c\cos\alpha$.

U: Vyjadrenia odvesien dosadíme do vzorca pre obsah podstavy $S_p = \dfrac{ab}{2}$ a dostávame

$$S_p = \frac{(c \sin \alpha) \cdot (c \cos \alpha)}{2}.$$

To sa dá upraviť na tvar

$$S_p = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2}.$$

Ž: *Dosadíme zadané hodnoty?*

U: Ešte nie. Problém stále robia hodnoty goniometrických funkcií pre uhol 15 stupňov. Preto prejdeme k uhlu 30 stupňov.

Ž: *Ako?*

U: Použijeme vzorec pre hodnotu funkcie sínus dvojnásobného argumentu. Iste sa pamätáš, že platí

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ž: *Tak, to by mi nenapadlo. Ale, je to zaujímavý trik.* **Súčin hodnôt** *funkcií sínus a kosínus môžeme nahradiť výrazom* $\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$.

U: Vzorec pre obsah podstavy môžeme vďaka tejto finte upraviť na tvar

$$S_p = \frac{c^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}.$$

Ž: *Po dosadení hodnôt dostávam*

$$S_p = \frac{16 \sin 30^\circ}{4}.$$

U: Hodnota funkcie sínus pre 30 stupňov je jedna polovica, preto obsah podstavy je $S_p = 2\ \mathrm{dm}^2$. Dopočítaj objem trojbokého hranola.

Ž: *Obsah podstavy vynásobím výškou, čo sú štyri decimetre. Dostávam*

$$V = S_p v = 2 \cdot 4 = 8.$$

Objem hranola bude **osem decimetrov kubických**.

U: Taký istý objem má aj kocka, ktorej dĺžku hrany máme vypočítať.

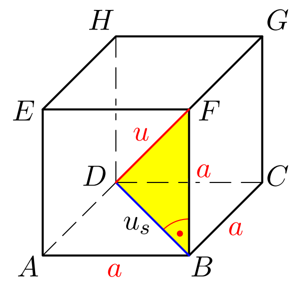
Ž: *Je to už jednoduché. Vzorec pre* **objem kocky je** $V = h^3$, *kde h je hrana kocky. Keďže objem má byť osem decimetrov kubických, tak hrana kocky bude mať dĺžku* **dva decimetre**. *To preto, lebo*

$$h = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

U: Hrana kocky, ktorá má rovnaký objem ako zadaný trojboký hranol, má dĺžku dva decimetre.

Príklad 8: *Vypočítajte objem a povrch kocky, ak jej telesová uhlopriečka má dĺžku* $3\sqrt{6}$ cm.

U: Na výpočet objemu a povrchu kocky potrebujeme poznať dĺžku hrany kocky a.



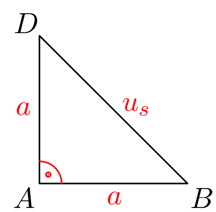
Ž: *V náčrte kocky si vyznačím telesovú uhlopriečku DF. Vedel by som ju vyjadriť pomocou dĺžky hrany BF kocky. V pravouhlom trojuholníku DBF použijem* **Pytagorovu vetu**. *Platí*

$$u^2 = |BF|^2 + |BD|^2,$$

lebo pravý uhol v trojuholníku DBF je pri vrchole B.

U: Hrana BF má dĺžku a. Zostáva nám vyjadriť dĺžku stenovej uhlopriečky BD pomocou hrany kocky a.

Ž: *Opäť využijem* **Pytagorovu vetu**. *Teraz pre pravouhlý trojuholník BAD s pravým uhlom pri vrchole A.*



U: Dokonca, trojuholník je pravouhlý a ***rovnoramenný***. Jeho odvesny AB a AD majú dĺžku a.

Ž: *Pre stenovú uhlopriečku BD platí*

$$|BD|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Rovnicu odmocním.

U: Nie je to potrebné. Do vyjadrenia telesovej uhlopriečky u v tvare $u^2 = |BF|^2 + |BD|^2$ potrebujeme druhú mocninu stenovej uhlopriečky BD.

Ž: *Dobre. Za výraz $|BD|^2$ dosadím $2a^2$ a dĺžka hrany BF je hrana kocky a. Dostávam*

$$u^2 = |BF|^2 + |BD|^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2.$$

U: Dosadíme dĺžku telesovej uhlopriečky $u = 3\sqrt{6}$. Pre hranu kocky dostávame rovnicu

$$3a^2 = \left(3\sqrt{6}\right)^2 .$$

Ž: *Súčin čísel na pravej strane umocním tak, že umocním každé z nich a výsledky vynásobím*

$$3a^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = 9 \cdot 6 = 54.$$

U: Rovnicu vydelíme tromi. Druhá mocnina dĺžky hrany kocky je rovná číslu 18, pretože

$$a^2 = \frac{54}{3} = 18.$$

Ž: *Dĺžku hrany dostaneme po odmocnení*

$$a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

U: Výborne! Nezabudol si na čiastočné odmocnenie čísla 18. Vypočítať objem a povrch kocky, by už teraz pre teba nemal byť problém.

Ž: *Použijem vzorec pre objem kocky* $V = a^3$. *Dosadím číselnú hodnotu a umocním*

$$V = a^3 = \left(3\sqrt{2}\right)^3 = 3^3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 = 27 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 .$$

To by mal byť výsledok.

U: Tretia mocnina druhej odmocniny z čísla dva sa dá zapísať ako súčin troch rovnakých činiteľov

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Ž: *Aha! Súčin prvých dvoch dáva číslo dva. Platí teda* $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$.

U: Objem kocky sa dá vyjadriť v tvare

$$V = 27 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 = 27 \cdot 2\sqrt{2} = 54\sqrt{2}.$$

Objem kocky je $54\sqrt{2}$ ***centimetrov kubických***. Vypočítaj povrch kocky.

Ž: *Použijem vzorec* $S = 6a^2$. *Po dosadení dostávam*

$$S = 6 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 6 \cdot 3^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 6 \cdot 9 \cdot 2 = 108.$$

Povrch kocky je 108 **centimetrov štvorcových**.

Príklad 9: *Objem pravidelného štvorbokého hranola je* 192 cm^3. *Veľkosť jeho podstavnej hrany a telesovej výšky sú v pomere* $1 : 3$. *Vypočítajte povrch hranola.*

U: Vzorec pre objem hranola je $V = S_p v$, kde S_p je obsah podstavy a v je telesová výška. Vyjadriť obsah podstavy by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Podstavou pravidelného štvorbokého hranola je štvorec so stranou* a. *Obsah podstavy bude obsah štvorca, a to je* $S_p = a^2$.

U: Telesovú výšku v vyjadríme pomocou podstavnej hrany a. Vieme, že ich veľkosti sú v pomere $a : v = 1 : 3$.

Ž: *Výška musí byť trikrát väčšia ako podstavná hrana. Preto platí* $v = 3a$.

U: Všetky získané skutočnosti dosadíme do vzorca pre objem hranola. Preto platí

$$V = S_p v = a^2 \cdot (3a) = 3a^3.$$

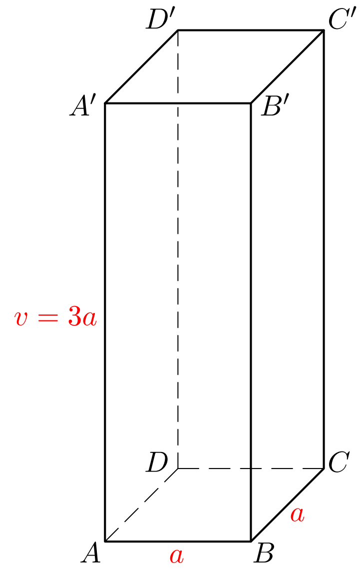
Ž: *Za objem dosadím hodnotu* 192 *a vypočítam dĺžku podstavnej hrany. Dostávam*

$$192 = 3a^3.$$

Predelím tromi a odmocním. Výsledok je 4, *lebo tretia odmocnina z čísla* 64 *je číslo štyri.*

$$a = \sqrt[3]{\frac{192}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

U: Teraz už poznáme aj veľkosť telesovej výšky. Je trikrát väčšia ako podstavná hrana, teda má dĺžku $v = 12$ cm. Môžeme vypočítať povrch hranola.



Ž: *Vzorec na výpočet povrchu hranola je* $S = 2S_p + S_{pl}$. *Podstava je štvorec so stranou* 4 *centimetre a plášť pozostáva zo štyroch zhodných obdĺžnikov. Ich rozmermi sú podstavná hrana* $a = 3$ cm *a telesová výška* $v = 12$ cm.

U: Vzorec pre povrch hranola sa preto dá upraviť na tvar

$$S = 2a^2 + 4av.$$

Dosaď číselné hodnoty a dopočítaj.

Ž: *Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$S = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 12 = 2 \cdot 16 + 16 \cdot 12 = 32 + 192 = 224.$$

Povrch hranola je 224 *centimetrov štvorcových.*