Objem a povrch gule

RNDr. Marián Macko

U: Guľu a guľovú plochu môžeme definovať ako analógie istých rovinných geometrických útvarov.

Ž: *Máte na mysli kružnicu a kruh?*

U: Áno. Guľa je priestorovou analógiou kruhu. Čím je daný v rovine jednoznačne kruh?

Ž: *Stačí zadať stred S kruhu a polomer r kruhu.*

U: Spomenieš si na definíciu kruhu?

Ž: *Pokúsim sa o to. Kruhom nazývame množinu všetkých bodov v rovine, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť menšiu alebo rovnú polomeru r.*

U: Treba ešte uviesť, že spomínaný bod S je stredom kruhu. Definíciu pojmu guľa vytvoríš veľmi jednoducho. Stačí, ak v definícií kruhu nahradíš slovné spojenie ***v rovine*** spojením ***v priestore***.

Ž: *To znamená, že* **guľu** *mám chápať ako* **množinu všetkých bodov v priestore, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť menšiu alebo rovnú kladnému reálnemu číslu r.**

U: Presne tak. Bod S nazývame ***stred gule*** a kladné reálne číslo r predstavuje ***polomer gule***.

Ž: *Ak by sme zobrali iba body, ktorých vzdialenosť od stredu gule by bola rovná polomeru gule, tak by sme dostali povrch gule?*

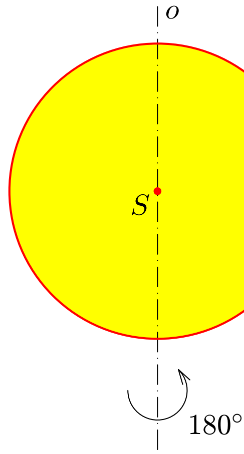
U: Nie. Je to hranica gule, ktorú nazývame ***guľová plocha***.

Ž: *Aha! To je ako kružnica, ktorá ohraničuje kruh.*

U: Máš pravdu. Navyše to súvisí aj s povrchom gule. ***Obsah guľovej plochy*** vyjadruje povrch gule.

U: Guľu môžeme definovať aj ako ***rotačné teleso***. Máš predstavu, rotáciou akého rovinného geometrického útvaru vznikne guľa s polomerom r?

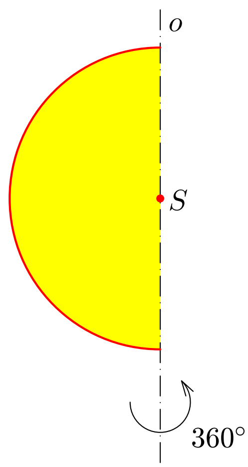
Ž: *Zobral by som* **kruh** *s polomerom r.* **Os rotácie** *by však musela prechádzať stredom S kruhu.*



U: Kruh by sme otočili okolo osi o uhol 180 stupňov.

Ž: *Možno by stačilo zobrať polkruh, ale musel by sa otočiť o* 360 *stupňov.*

U: V tomto prípade by os rotácie musela obsahovať priemer polkruhu.

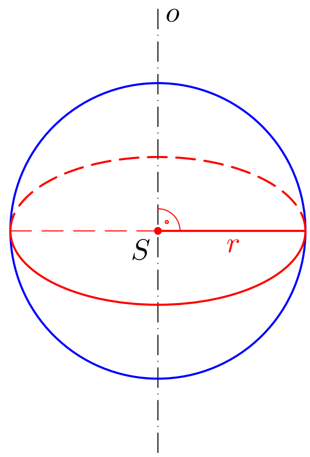


U: Predstav si teraz, že by sme zostrojili ***rez gule*** rovinou kolmou na os rotácie. Čo by sme dostali?

Ž: *Boli by to kružnice s rôznym polomerom. V dvoch krajných prípadoch by sme dostali iba jeden bod.*

U: Pozor! Guľa je teleso. Patria jej aj vnútorné body. Rezom budú preto kruhy, nie kružnice. To, o rôznosti ich polomerov si uviedol správne. Kedy bude rezom gule kruh s najväčším polomerom?

Ž: *Najväčší polomer kruhu dostanem, ak rovina rezu bude obsahovať stred gule.*



U: Kružnica, ktorá ohraničuje tento najväčší kruh sa nazýva ***rovník gule***.

Ž: *Ale, to je ako v geografii, keď zoberiem glóbus Zeme.*

U: Aj pomenovanie pre kružnice ohraničujúce ostatné kruhy, ktoré sú rezmi gule rovinami kolmými na os rotácie, je identické s poznatkami z geografie.

Ž: *Máte na mysli rovnobežky?*

U: Áno. Presnejšie by bolo, keby sme ***rovnobežky*** charakterizovali ako kružnice, ktoré sú ***prienikom guľovej plochy*** a ***roviny kolmej na os rotácie*** gule. Spomínaná guľová plocha je pritom hranicou gule.

Ž: *V geografii sme rozprávali aj o poludníkoch Zeme. Viem, že Zem nie je presná guľa, ale existuje niečo podobné aj na guli?*

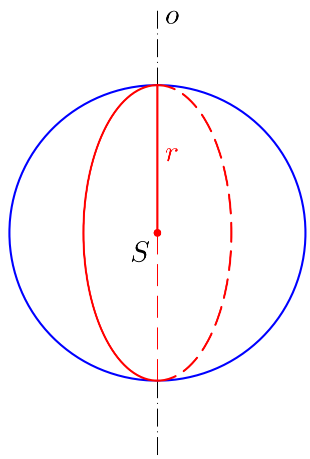
U: Iste si spomínaš, že poludníky Zeme vymedzujú časové pásma. Tento pojem sa samozrejme dá definovať aj na guli. ***Poludníkom gule*** nazývame ***prienik guľovej plochy*** s ***rovinou***, ktorá obsahuje ***os rotácie*** kruhu, otočením okolo ktorej guľa vznikla.

Ž: *Budú to teda kružnice?*

U: Tak ako rovnobežky, aj poludníky sú kružnice. Rozdiel je ale v tom, že všetky poludníky majú rovnaký polomer. Všetky poludníky sa navyše pretínajú v dvoch spoločných bodoch.

Ž: *Aha! Máte pravdu. Je to dosť analogické s geografiou. Týmito bodmi sú severný a južný pól Zeme.*

U: Pomenoval si ich správne. Pozri sa ešte raz na obrázok. Jedným z poludníkov je aj kružnica ohraničujúca kruh, rotáciou ktorého guľa vznikla.



Ž: *Ako vypočítame objem gule?*

U: Objem gule vypočítame podľa vzorca

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

keďže guľu charakterizuje iba jej polomer r.

Ž: *Ako sa na to prišlo?*

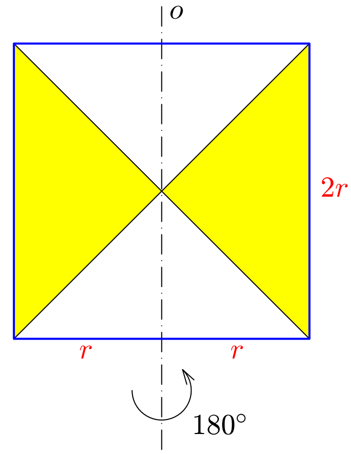
U: Jedným zo spôsobov ako odvodiť vzorec na výpočet objemu gule, je použiť ***Cavalieriho princíp***.

Ž: *To počujem prvý krát. Mohli by ste ho vysvetliť?*

U: Podľa ***Cavalieriho princípu***, ak existuje taká rovina, že každá rovina s ňou rovnobežná pretne dve telesá v rovinných geometrických útvaroch s rovnakým obsahom, tak tieto telesá majú rovnaký objem.

Ž: *Čo to znamená v našom prípade? Ktoré druhé teleso máte na mysli?*

U: Vytvoríme ho. Ale tak, aby sme splnili predpoklady Cavalieriho princípu. V tom ti však musím pomôcť. Nie je to jednoduchá záležitosť. Predstav si štvorec so stranou $2r$, kde r je polomer gule. Uhlopriečky rozdelia štvorec na štyri časti. Dve z nich necháme rotovať okolo vyznačenej osi na obrázku. Sú to tie, ktoré sme vyfarbili.

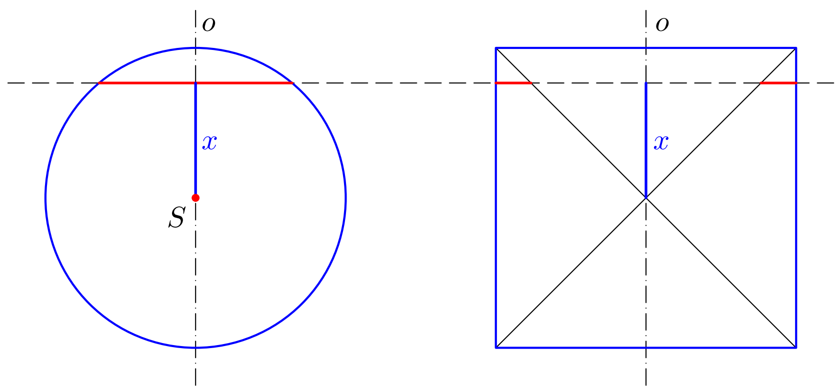


Ž: *Tak na to by som sám neprišiel.*

U: Dôležitejšia bude ďalšia časť riešenia. Musíme sa najskôr presvedčiť, či existuje taká rovina, že každá rovina s ňou rovnobežná pretne guľu a nové teleso v ***rovinných útvaroch s rovnakým obsahom***. Tušíš, aká by to mala byť rovina?

Ž: *Vyskúšal by som* **rovinu kolmú** *na os rotácie gule a os rotácie toho druhého telesa.*

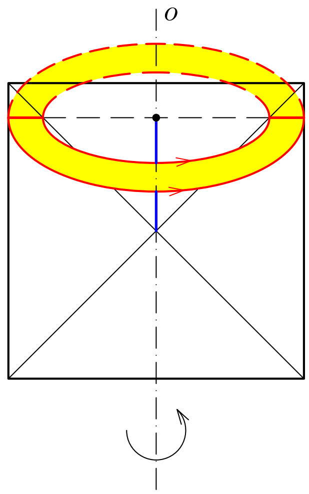
U: Máš pravdu. Vyskúšajme teda rovinu, ktorej vzdialenosť od stredu gule je x. Taká istá bude aj vzdialenosť roviny od priesečníka uhlopriečok v rotujúcom štvorci. Aké rovinné útvary vzniknú ako prieniky?



Ž: *Na guli by to mal byť* **kruh**. *V prípade druhého telesa netuším, čo bude prienikom.*

U: Daná rovina pretne útvar, rotáciou ktorého druhé teleso vzniklo, v dvoch úsečkách. Po akých dráhach okolo osi otáčania sa pohybujú najvzdialenejšie body týchto úsečiek?

Ž: *Jasné! Veď ich vzdialenosť od osi otáčania je vždy r. Pohybujú sa po kružnici s polomerom r. Aj ostatné body týchto úsečiek sa pohybujú po kružniciach, ale s menšími polomermi. Už to mám. Prienikom bude* **medzikružie**. *Ale aký bude polomer vnútornej kružnice medzikružia?*



U: Tak sa pozrime na obrázok ešte raz. Uhlopriečka štvorca zviera s úsečkou, ktorá je prienikom štvorca a uvažovanej roviny, uhol 45 stupňov. Vzdialenosť roviny od priesečníka uhlopriečok je x. Vznikol pravouhlý trojuholník, ktorého jeden vnútorný uhol má veľkosť 45 stupňov a jedna odvesna dĺžku x. Tušíš, aká dlhá je druhá odvesna?

Ž: *Teraz už áno. Má tiež dĺžku rovnú x.*

U: Prečo?

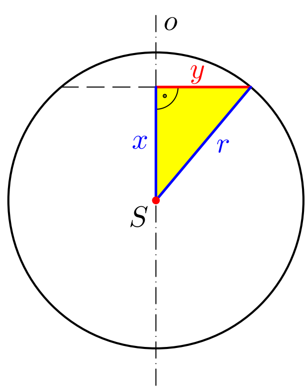
Ž: *No veď trojuholník je navyše* **rovnoramenný** *a* **pravouhlý**. *Tretí uhol má tiež veľkosť 45 stupňov.*

U: Polomer vonkajšej kružnice medzikružia je r a polomer vnútornej kružnice medzikružia je x. Ako vypočítaš ***obsah medzikružia***?

Ž: *Ako* **rozdiel obsahov kruhov**. *Od obsahu kruhu ohraničeného vonkajšou kružnicou odrátam obsah vnútorného kruhu. Preto platí*

$$S = \pi r^2 - \pi x^2.$$

U: Vráťme sa k obsahu kruhu, ktorý je prienikom danej roviny a gule. Vieš vyjadriť jeho obsah?



Ž: *Ale nepoznám jeho polomer y.*

U: Nedá sa vyjadriť pomocou polomeru r gule a vzdialenosti x stredu gule od roviny?

Ž: *Aha! V pravouhlom trojuholníku sa dá využiť* **Pytagorova veta**. *Preponou pravouhlého trojuholníka je polomer r gule. Preto platí*

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

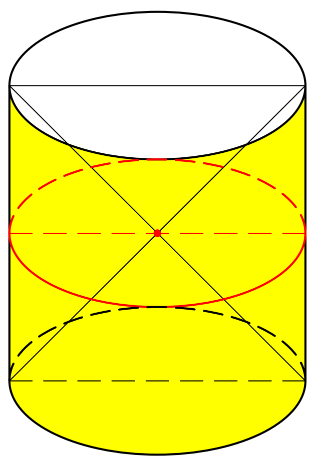
U: Obsah kruhu s polomerom y, ktorý je prienikom gule s uvažovanou rovinou vyjadríme, v tvare

$$S = \pi y^2 = \pi \cdot (r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2.$$

Ž: *Ale to je to isté ako pre medzikružie.*

U: Keďže obsahy sú rovnaké a telesá majú rovnaké výšky, splnili sme predpoklady Cavalieriho princípu. Objem gule bude taký istý ako objem telesa, ktoré vznikne rotáciou časti nami uvažovaného štvorca.

U: Poďme vyjadriť objem telesa, ktoré vznikne rotáciou dvoch častí nami uvažovaného štvorca so stranou $2r$, kde r je polomer gule. Máš predstavu ako teleso vyzerá?

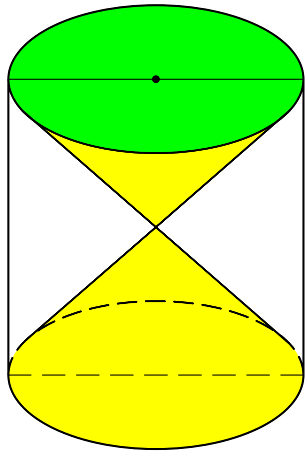


Ž: *Mám dojem, že je komplikovanejšie ako guľa. Ale netuším, čo za teleso to je.*

U: Čo vznikne rotáciou štvorca so stranou $2r$ by si však mal vedieť.

Ž: *To je ľahké. Rotáciou celého štvorca vznikne rotačný valec. Jeho výška bude $v_v = 2r$ a polomer podstavy rotačného valca bude $r_v = r$.*

U: Keďže nerotuje celý štvorec, tak niečo v tom valci bude chýbať. Každý bod nami rotujúceho útvaru sa predsa pri otáčaní okolo osi pohybuje po kružnici. Polomery kružníc môžu byť pre rôzne body rôzne. Aké teleso by vytvorili body dvoch nevyfarbených pravouhlých trojuholníkov v štvorci?



Ž: *Jasné! Vo valci budú vyvŕtané* **dva rotačné kužele** *so spoločným vrcholom. To preto, lebo rotáciou pravouhlého nevyfarbeného trojuholníka okolo odvesny vznikne rotačný kužeľ. Veď výsledné teleso bude vyzerať ako presýpacie hodiny.*

U: Pekne si to pomenoval. Každý z týchto dvoch kužeľov má podstavu s polomerom $r_k = r$ a pre telesovú výšku platí $v_k = r$. Teraz už nebude problém vyjadriť objem presýpacích hodín.

Ž: *Teraz je to už ľahké. Objem vypočítam ako* **rozdiel objemu rotačného valca** *a dvojnásobku* **objemu jedného rotačného kužeľa**. *Preto platí*

$$V = V_v - 2V_k.$$

U: Pripomenmeniem ti, že objem rotačného valca vypočítaš podľa vzorca $V_v = \pi r_v^2 v_v$. Pre objem rotačného kužeľa platí vzorec $V_k = \frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k$.

Ž: *Po dosadení hodnôt za polomery podstáv a výšky dostávam*

$$V = \pi r_v^2 v_v - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k = \pi r^2 \cdot (2r) - \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3.$$

U: Oba členy upravíme na zlomky so spoločným menovateľom. Je to číslo tri. Objem sa dá preto upraviť na tvar

$$V = \frac{6}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Na základe Cavalieriho princípu sa preto aj objem gule dá vyjadriť v tvare

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ž: *Dosť komplikované odvodenie. Mám to vedieť?*

U: Pri riešení úloh využiješ iba vzorec pre objem gule. V odvádzaní si však mal možnosť vidieť spojitosť medzi objemami rôznych telies. Pripomenul si si aj ostatné rotačné telesá.

Ž: *Ešte mi prezraďte, ako vypočítam povrch gule.*

U: ***Povrch gule*** vypočítaš podľa vzorca

$$S = 4\pi r^2.$$

Je to ako, keby guľovú plochu, ktorá je hranicou gule, tvorili štyri kruhy s polomerom r. Obsah jedného kruhu je totiž πr^2.

Ž: *Aj tento vzorec budeme odvádzať?*

U: Teraz nie. Pre väčšinu úloh postačí, ak ho budeš vedieť správne aplikovať. Samotný vzorec sa dá odvodiť, napríklad využitím integrálneho počtu. Ale o integráloch, ktoré k tomu potrebuješ, asi zatiaľ nemáš vedomosti. Treba povedať, že aj vzorec pre objem gule sa dá odvodiť využitím integrálneho počtu.

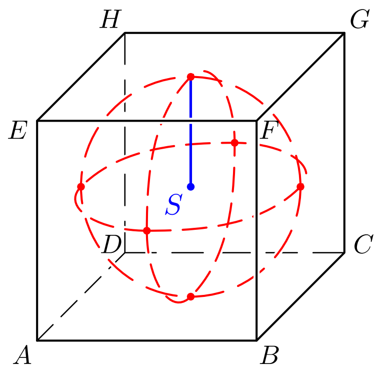
Príklad 1: *Kocke s hranou dĺžky a je vpísaná guľa. Koľko percent objemu kocky predstavuje objem gule?*

U: Máš predstavu o tom, ako vyzerá guľa vpísaná do kocky?

Ž: *Nemala by vyčnievať nad kocku. Mala by sa teda dotýkať stien kocky.*

U: V ktorých bodoch?

Ž: *Guľa sa* **dotýka steny** *kocky v* **strede** *steny. Dotykovým bodom je priesečník uhlopriečok štvorca, ktorý je stenou kocky.*



U: Ktorý bod kocky je stredom gule vpísanej do kocky?

Ž: *Vzhľadom na to, že kocka a guľa sú symetrické telesá,* **stredom gule** *bude stred kocky.*

U: Čo je stred kocky? Skús tento bod špecifikovať presnejšie.

Ž: *Stred kocky získam ako priesečník telesových uhlopriečok kocky. Bude to stred uhlopriečky BH.*

U: Zostáva nám určiť ***polomer gule***, ktorá je do kocky vpísaná. Poznáš stred gule a vieš, v ktorých bodoch sa guľa dotýka stien kocky.

Ž: *Polomerom gule bude polovica dĺžky hrany kocky. Preto platí*

$$r = \frac{a}{2}.$$

U: Keďže úlohou je vypočítať, koľko percent objemu kocky je objem gule, potrebujeme vyjadriť objemy týchto telies. Začni objemom kocky.

Ž: *Kocka má hranu dĺžky a, preto jej objem vypočítam podľa známeho vzorca*

$$V_k = a^3.$$

U: Polomer gule je $r = \dfrac{a}{2}$. Ako vieme, objem gule vypočítame podľa vzorca

$$V_g = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Dosaď za polomer gule a vyjadri objem pomocou dĺžky hrany kocky.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$V_g = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{a^3}{8} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Zlomok som umocnil a potom som zlomky vykrátil.

U: Objemy oboch telies si vyjadril pomocou dĺžky hrany kocky. Ako zistíš koľko percent objemu kocky predstavuje objem gule?

Ž: *Použijem trojčlenku. Objem kocky* $V_k = a^3$ *predstavuje* **sto percent**. *Počet percent, ktoré prislúchajú objemu gule* $V_g = \frac{\pi a^3}{6}$, *označím ako neznámu* x.

U: Máš pravdu. Čím je objem gule menší ako objem kocky, tým menej percent z objemu kocky predstavuje. Medzi percentami a objemami je priama úmera. Ako sa to dá zapísať?

Ž: *Pomer objemov musí byť rovnaký, ako je pomer percent, ktoré im odpovedajú. Preto platí*

$$\frac{x}{100} = \frac{\frac{\pi a^3}{6}}{a^3}.$$

U: Vypočítať neznámu x by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Rovnicu vynásobím stomi a dostávam*

$$x = \frac{\frac{\pi a^3}{6}}{a^3}\cdot 100.$$

Upravím zložený zlomok a výraz a^3 *vykrátim. Počet percent bude vyjadrený číselným výrazom*

$$x = \frac{\pi a^3}{6}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot 100 = \frac{\pi}{6}\cdot 100.$$

U: Približná hodnota tohto výsledku je asi 52 ***percent***.

Ž: *Zaujímavé. Objem gule predstavuje približne polovicu objemu kocky.*

Úloha : *Kocke s hranou dĺžky a je opísaná guľa. Koľko percent objemu kocky predstavuje objem opísanej gule?*

Výsledok: 272 percent

Príklad 2: *Guľa a kocka majú rovnaký povrch. Určte pomer ich objemov.*

Ž: *Nemám rád úlohy, v ktorých nie sú zadané číselné údaje. Potom neviem, čo mám robiť.*

U: Skús analyzovať postupne každú informáciu v zadaní úlohy. K čomu slúži informácia z prvej vety zadania?

Ž: *Guľa a kocka majú mať rovnaký povrch. Ale stále neviem, k čomu ma to dovedie.*

U: Nemaj obavu. V procese riešenia sa to ukáže. Máš predsa porovnať povrchy dvoch telies. Tak ich vyjadri!

Ž: *Toto nie je problém. Povrch kocky s hranou dĺžky a vypočítam podľa vzorca $S_k = 6a^2$ a povrch gule viem vyjadriť pomocou jej polomeru r. Pre povrch gule platí vzorec $S_g = 4\pi r^2$.*

U: A v čom vidíš problém pre ďalšie riešenie?

Ž: *Keby som poznal povrch kocky, tak si vypočítam polomer gule. Povrchy sú rovnaké, preto ich dám do rovnosti.*

U: No vidíš! V poslednej vete si povedal myšlienku ďalšieho riešenia. Rovnica, ktorú získaš, nám poslúži na vyjadrenie dĺžky hrany kocky pomocou polomeru gule alebo naopak.

Ž: *Aha! Čiže v takýchto úlohách mám* **jeden rozmer vyjadriť pomocou druhého***?*

U: Áno. Urob to.

Ž: *Porovnaním povrchov získam rovnicu*

$$6a^2 = 4\pi r^2.$$

Vyjadrím si dĺžku hrany a kocky. Rovnicu vydelím číslom 6 a odmocním. Získam vzťah

$$a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot r.$$

U: Po odstránení odmocniny z čísla 3 v menovateli zlomku sa dĺžka hrany kocky dá vyjadriť v tvare $a = \frac{\sqrt{6\pi}}{3} \cdot r$. Toto vyjadrenie využiješ pre objem kocky.

Ž: *Objem kocky sa dá vyjadriť v tvare $V_k = a^3$. Po dosadení za hranu a kocky dostávam*

$$V_k = a^3 = \left(\frac{\sqrt{6\pi}}{3} \cdot r\right)^3.$$

Ako to upravím?

U: Tretia mocnina reálneho čísla x je skrátený zápis $x^3 = x \cdot x \cdot x$. To isté využijeme pri úprave výrazu, ktorý vyjadruje objem kocky a dostávame

$$V_k = \frac{\sqrt{6\pi}}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{6\pi}}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{6\pi}}{3} \cdot r = \frac{2\pi \cdot \sqrt{6\pi}}{9} \cdot r^3.$$

Aký je objem gule s polomerom r, to by si mal vedieť.

Ž: *Pre* **objem gule** *s polomerom r platí vzorec*

$$V_g = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

U: Zostáva nám posledná časť riešenia úlohy. Vypočítať pomer objemov kocky a gule.

Ž: *Objemy dám do pomeru a dosadím ich vyjadrenia. Pre* **pomer objemov** *dostávam*

$$\frac{V_k}{V_g} = \frac{\frac{2\pi\sqrt{6\pi}}{9}r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Po vykrátení čísel a výrazu r^3 bude pomer objemov vyjadrený v tvare

$$\frac{V_k}{V_g} = \frac{\sqrt{6\pi}}{6}.$$

Pomer objemov je vyjadrený v tvare $\frac{\sqrt{6\pi}}{6}$.

U: Z výpočtu je zrejmé, že pomer objemov kocky a gule za daných podmienok nezávisí od číselných hodnôt hrany a kocky a polomeru r gule. Dôležité ale je, aby povrchy týchto telies boli rovnaké. Tak, ako je to povedané v zadaní úlohy.

Príklad 3: *Tri kovové guľôčky s polomermi* 3 cm*,* 4 cm *a* 5 cm *sme roztavili a zliali do jednej gule. Aký má povrch?*

U: Na akej myšlienke založíme riešenie úlohy?

Ž: *No, keď mám vypočítať povrch novej gule, tak asi zrátam povrchy daných troch guľôčok.*

U: Čo sa, z hľadiska fyziky, v procese tavenia a zliatia kovových guľôčok zachová? Povrch alebo hmota?

Ž: *Mala by sa zachovať hmota.*

U: Hmotu charakterizuje hmotnosť, a tá ako vieme z fyziky súvisí s objemom. V takýchto procesoch tavenia a liatia sa ***zachováva objem***.

Ž: *Jasné! Máte pravdu. Nová guľa bude mať objem, ktorý je súčtom objemov daných kovových guľôčok. Preto platí*

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

kde V je objem novej gule.

U: Vieš vyjadriť objemy kovových guľôčk a objem gule, ktorá z nich vznikla?

Ž: *Vzorec pre objem gule je predsa*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

U: Označ symbolom r ***polomer*** gule, ktorá vznikla zliatím a polomery kovových guľôčok predsa poznáš.

Ž: *Polomery sú dané v zadaní úlohy. Pre objemy preto dostávam*

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 + \frac{4}{3}\pi r_3^3.$$

Ž: *Vo výrazoch na ľavej a pravej strane sa v každom člene nachádza výraz $\frac{4}{3}\pi$. Preto rovnicu predelím týmto výrazom. Polomer gule bude vyjadrený v tvare*

$$r^3 = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3.$$

U: Dosaď známe hodnoty polomerov guľôčok a vypočítaj r.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$r^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

Čísla na pravej strane rovnosti umocním, sčítam a mám

$$r^3 = 27 + 64 + 125 = 216.$$

U: Polomer gule je určený treťou odmocninou z čísla 216, čo je číslo 6:

$$r = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}.$$

Vypočítať povrch novovytvorenej gule už nebude pre teba problémom.

Ž: *Povrch gule vypočítam podľa vzorca*

$$S = 4\pi r^2.$$

Výpočet je veľmi jednoduchý. Za polomer dosadím číselnú hodnotu 6, *umocním a čísla vynásobím. Dostávam*

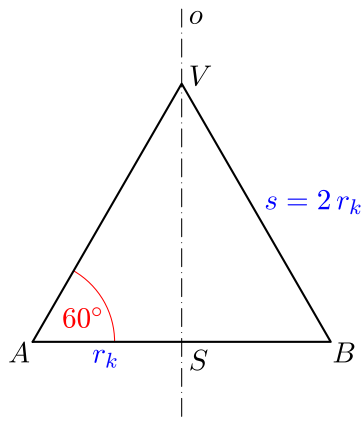
$$S = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi.$$

U: Povrch novovytvorenej gule je 144π ***centimetrov štvorcových***.

Príklad 4: *Do rovnostranného kužeľa s priemerom podstavy d je vpísaná guľa. Vyjadrite objem a povrch gule.*

Ž: *Mohli by ste mi vysvetliť, aký je to rovnostranný kužeľ?*

U: Osovým rezom rovnostranného kužeľa je ***rovnostranný trojuholník***. Strana s kužeľa je rovnako dlhá ako priemer podstavy.



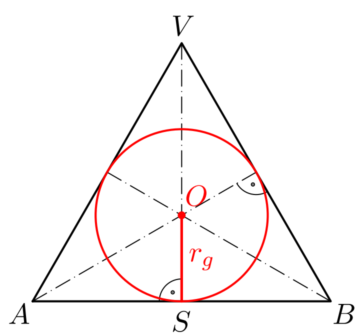
Ž: *Aha! Priemerom podstavy kužeľa je strana AB rovnostranného trojuholníka.*

U: Máš predstavu, aký geometrický útvar bude ***stredovým rezom gule*** vpísanej do kužeľa?

Ž: *Mal by to byť kruh.*

U: Môžeš ho charakterizovať presnejšie?

Ž: *Do kužeľa mám vpísať guľu. Pozerám sa na to ako na situáciu v rovine. V osovom reze kužeľa sa to prejaví tak, že vpíšem kruh do rovnostranného trojuholníka ABV.*



U: Ktorý bod bude stredom vpísanej gule?

Ž: **Stredom gule** *bude priesečník výšok trojuholníka ABV, ktorý je osovým rezom kužeľa.*

U: V tomto prípade máš pravdu. Vieme, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka zostrojíme ako ***priesečník osí vnútorných uhlov*** trojuholníka. V rovnostrannom trojuholníku je os vnútorného uhla totožná s výškou, ale aj ťažnicou na danú stranu. Táto vlastnosť však vo všeobecnosti neplatí.

U: Vedel by si určiť polomer vpísanej gule?

Ž: *Neviem, akú časť výšky na stranu rovnostranného trojuholníka mám zobrať.*

U: Ešte raz ti pripomeniem, že ***výška*** na danú stranu rovnostranného trojuholníka je totožná s ***ťažnicou*** na túto stranu. Priesečník výšok je aj ťažiskom rovnostranného trojuholníka.

Ž: *Tak, teraz je to už jasné.* **Ťažisko** *rozdeľuje ťažnicu na dve časti, ktorých dĺžky sú v pomere* $2:1$. **Polomer vpísanej kružnice**, *a teda aj gule, bude jedna tretina ťažnice.*

U: To znamená, že polomer gule bude ***tretinou výšky*** rovnostranného trojuholníka. Výšku vypočítaš z pravouhlého trojuholníka BSV s pravým uhlom pri vrchole S.

Ž: *Prepona má dĺžku* $|VB| = d$ *a odvesna* SB *má polovičnú veľkosť. To preto, lebo úsečka* SB *predstavuje* *polomer podstavy kužeľa* *a daný je priemer podstavy* d. *Na výpočet výšky* SV *využijem* **Pytagorovu vetu**

$$v_k^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Zlomok umocním a členy na pravej strane upravím na spoločného menovateľa, čo je číslo 4. *Po odčítaní členov na pravej strane dostávam*

$$v_k^2 = d^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{4d^2 - d^2}{4} = \frac{3d^2}{4}.$$

U: Pre výšku kužeľa po odmocnení dostávame

$$v_k = \frac{\sqrt{3}d}{2}.$$

U: Aký bude polomer gule?

Ž: *Povedali sme, že je* **tretinou výšky**. *Preto platí*

$$r_g = \frac{v_k}{3}.$$

Po dosadení vyjadrenia pre výšku kužeľa dostávam

$$r_g = \frac{\sqrt{3}d}{6}.$$

U: Vyjadriť objem a povrch gule už nebude problém. Ako vypočítame objem gule?

Ž: *Objem vypočítame podľa vzorca*

$$V = \frac{4}{3}\pi r_g^3.$$

Za polomer gule dosadím odvodené vyjadrenie, výraz umocním a čísla vykrátim. Pre objem gule dostávam

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}d}{6}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}d^3}{216} = \frac{\sqrt{3}\pi d^3}{54}.$$

U: Zvládaš to v pohode. Dúfam, že takto ľahko zvládneš aj vyjadrenie povrchu gule.

Ž: *Vzorec na výpočet povrchu gule má tvar*

$$S = 4\pi r_g^2.$$

Dosadím vyjadrenie polomeru gule, umocním a čísla vykrátim. Pre povrch gule dostávam

$$S = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}d}{6}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{3d^2}{36} = \frac{\pi d^2}{3}.$$

U: Za predvedené výpočty ťa môžem iba pochváliť.

Príklad 5: *Do rovnostranného valca je vpísaná guľa a kužeľ. Podstava kužeľa je totožná s podstavou valca, vrchol kužeľa je v strede druhej podstavy valca. Určte pomer objemov týchto troch telies.*

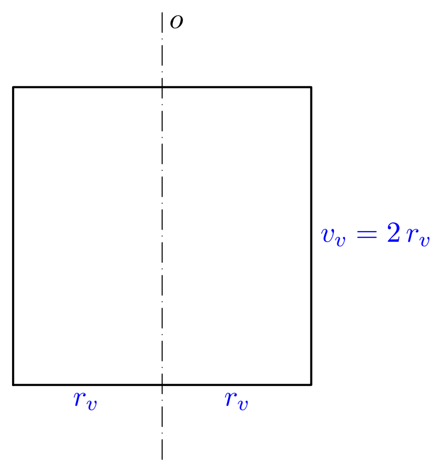
U: Východiskom úlohy je rovnostranný valec. Ako by si ho charakterizoval?

Ž: *Ak je valec rovnostranný, tak* **priemer** *jeho podstavy by mal byť* **rovnaký ako strana** *valca.*

U: Navyše vieme, že v každom rotačnom valci je strana valca rovnaká ako výška. Platí teda

$$v_v = 2r_v.$$

Osovým rezom valca je štvorec, ktorého stranou je priemer podstavy valca.



Ž: *Vyjadrím si objem valca podľa vzorca*

$$V_v = \pi r_v^2 v_v.$$

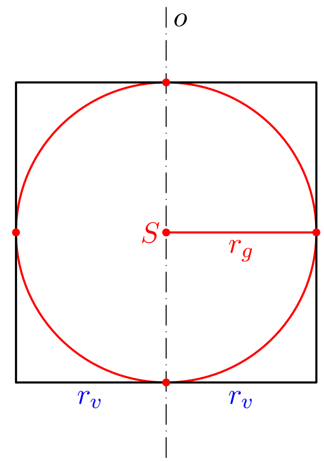
Výška valca je dvojnásobkom polomeru jeho podstavy, preto platí

$$V_v = \pi r_v^2 v_v = \pi r_v^2 \cdot (2r_v) = 2\pi r_v^3.$$

U: Aj objemy zvyšných dvoch telies vyjadríme pomocou polomeru r_v podstavy valca. Máš predstavu, aký bude ***polomer gule vpísanej*** do rovnostranného valca?

Ž: *V osovom reze valca sa guľa zobrazí ako kruh vpísaný do štvorca so stranou $2r_v$. Polomer gule bude rovnaký ako polomer podstavy valca. To preto, lebo je polovicou strany štvorca. Preto platí*

$$r_g = r_v.$$



U: Môžeme teda vyjadriť aj objem gule.

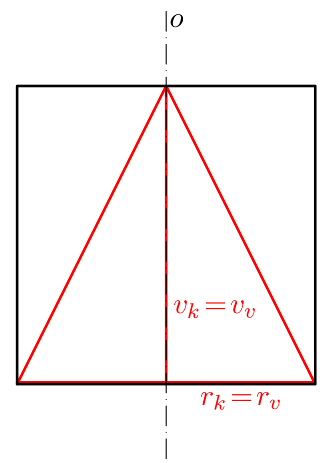
Ž: *Objem gule vypočítam podľa vzorca*

$$V_g = \frac{4}{3}\pi r_g^3.$$

Za polomer gule dosadím polomer podstavy valca a dostávam

$$V_g = \frac{4}{3}\pi r_v^3.$$

U: Do valca je vpísaný aj rotačný kužeľ. Zadanie úlohy popisuje akým spôsobom.



Ž: *Podstava kužeľa je totožná s podstavou valca. Polomery podstáv sú preto rovnaké a platí*

$$r_k = r_v.$$

Keďže vrchol kužeľa je v strede druhej podstavy valca, výšky týchto telies budú tiež rovnaké

$$v_k = v_v = 2r_v.$$

U: Nič nebráni tomu, aby si vyjadril objem kužeľa. Dúfam, že vzorec pre objem poznáš.

Ž: *Je to podobné objemu valca s rovnakými rozmermi. Objem kužeľa je však tretinou objemu takéhoto valca. Preto platí*

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k = \frac{1}{3}\pi r_v^2 \cdot (2r_v) = \frac{2}{3}\pi r_v^3.$$

U: Našou úlohou je vypočítať ***pomer objemov*** týchto troch telies.

Ž: *Ako to zapíšem, keď pomer je zlomok, a do zlomku využijem objemy iba dvoch telies?*

U: Pomer môžeš zapísať aj v riadku, v tvare $V_v : V_g : V_k$, tak ako zapisuješ napríklad pomer veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 2.$$

Ž: *Aha! Zapíšem to teda takto a dosadím vyjadrenia objemov. Pre pomer objemov platí*

$$V_v : V_g : V_k = 2\pi r_v^3 : \frac{4}{3}\pi r_v^3 : \frac{2}{3}\pi r_v^3.$$

To je výsledok? Nevyzerá to pekne.

U: Pomery sa dajú ***krátiť*** alebo ***rozširovať***. Tak ako zlomky. Pomer 12 : 18 : 6 krátením číslom 6 upravíme na tvar 2 : 3 : 1. Pozri sa na výrazy v pomere objemov daných troch telies. Majú tieto výrazy niečo spoločné?

Ž: *Vo vyjadrení objemu každého telesa sa vyskytuje výraz πr_v^3. Vykrátim ho a dostávam*

$$V_v : V_g : V_k = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}.$$

U: Tento pomer rozšírime tromi, aby sme odstránili zlomky. Preto dostávame

$$V_v : V_g : V_k = 6 : 4 : 2 = 3 : 2 : 1.$$

Pri poslednej úprave pomeru sme použili krátenie dvomi.

Ž: *Zaujímavý výsledok. Objem gule je dvakrát väčší ako objem kužeľa.*

Príklad 6: *Kocke s hranou $a = 4$ cm opíšeme a vpíšeme guľu. Vypočítajte rozdiel objemov týchto gulí.*

U: Uvedom si, od čoho závisí objem gule.

Ž: *Vzorec na výpočet objemu gule má tvar*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

kde r je polomer gule. To znamená, že objem gule závisí iba od jej polomeru.

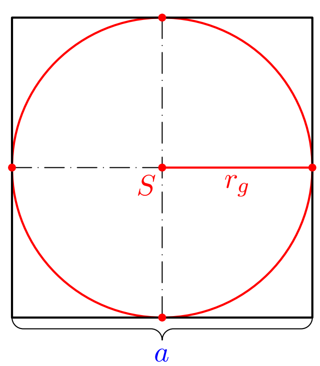
U: Aby si úlohu vyriešil, potrebuješ vypočítať ***polomer gule vpísanej*** do kocky a ***polomer gule kocke opísanej***. Začnime vpísanou guľou. Máš predstavu, kde má stred a čo znamená, že je vpísaná do kocky?

Ž: *Stredom symetrie kocky je jej stred. Guľa je tiež stredovo symetrická. Preto* **stredom gule vpísanej** *do kocky bude stred kocky. Vpísaná guľa by sa mala dotýkať povrchu kocky.*

U: Nie povrchu, ale hranice kocky, teda jej stien. Ak využiješ symetriu, tak ľahko určíš, v ktorom bode sa guľa dotýka stien kocky.

Ž: *Vo vrcholoch kocky?*

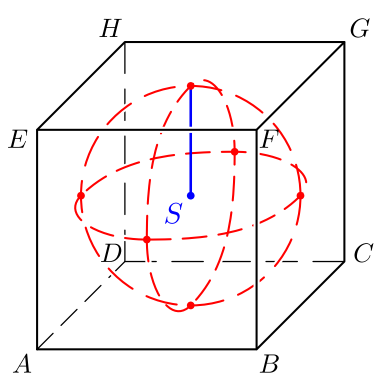
U: Nie. Pozri sa na to radšej z hľadiska rovinnej analógie. Zober si štvorec a kruh vpísaný do štvorca. V ktorých bodoch sa kruh dotýka strán štvorca?



Ž: *To je jednoduché. Dotykovými bodmi kruhu sú stredy strán štvorca.*

U: No vidíš! Kocka a guľa sú priestorovými analógiami štvorca a kruhu. Akurát namiesto strany štvorca musíš teraz zobrať stenu kocky.

Ž: *Jasné. Guľa vpísaná do kocky sa jej bude* **dotýkať v stredoch stien** *kocky.*



U: Polomer tejto gule je preto daný vzdialenosťou stredu kocky a stredu ktorejkoľvek steny. To preto, lebo stred kocky je stredom vpísanej gule. Vieš určiť veľkosť polomeru?

Ž: *Bude to polovica hrany kocky, čiže platí*

$$r_v = \frac{a}{2} = 2 \text{ cm}.$$

U: Vypočítaj objem gule vpísanej do kocky.

Ž: *Do vzorca na výpočet objemu gule dosadím za polomer gule hodnotu dva a dostávam*

$$V_v = \frac{4}{3}\pi r_v^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}.$$

U: Pozrime sa teraz na ***stred*** a ***polomer gule kocke opísanej***.

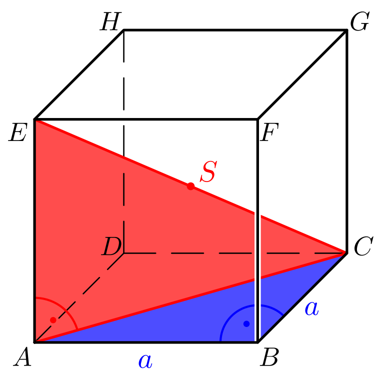
Ž: *Stred bude ten istý, lebo telesá sú stredovo súmerné.*

U: A čo polomer? Ktorými bodmi kocky prechádza guľa? Opäť si pomôž rovinnou analógiou, štvorec a kruh štvorcu opísaný.

Ž: *Teraz ste mi našepkali až príliš. Guľa opísaná kocke bude prechádzať všetkými* **vrcholmi kocky**. *Veď aj kruh opísaný štvorcu obsahuje vrcholy štvorca.*

U: Aký bude polomer tejto gule?

Ž: *Ak stred kocky je stredom gule a hranica gule prechádza vrcholmi kocky, tak* **polomer gule** *bude polovicou telesovej uhlopriečky EC. Stred gule S je totiž aj stredom tejto uhlopriečky.*



U: Na výpočet dĺžky telesovej uhlopriečky EC využi pravouhlý trojuholník EAC s pravým uhlom pri vrchole A.

Ž: *Nepoznám však dĺžku odvesny AC. Moment ... Veď úsečka AC je preponou v ďalšom pravouhlom trojuholníku. Je ním trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B. Najskôr si teda vypočítam dĺžku úsečky AC z trojuholníka ABC. Odvesny tohto trojuholníka majú dĺžku 4 centimetre, lebo sú hranami kocky. Pre trojuholník platí* **Pytagorova veta** *v tvare*

$$|AC| = \sqrt{a^2 + a^2}.$$

Po dosadení číselnej hodnoty dostávam

$$|AC| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}.$$

U: Vidím, že zvládneš aj výpočet telesovej uhlopriečky kocky. V trojuholníku EAC už poznáš dĺžky oboch odvesien.

Ž: *Aj v tomto trojuholníku využijem Pytagorovu vetu, teraz v tvare*

$$|EC| = \sqrt{|AE|^2 + |AC|^2}.$$

Dosadím číselné hodnoty a dostávam

$$|EC| = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2} = \sqrt{16+32} = \sqrt{48}.$$

U: Číslo 48 sa dá zapísať ako súčin dvoch čísel, čísla 16 a čísla 3. Preto pre dĺžku telesovej uhlopriečky kocky po ***čiastočnom odmocnení*** dostávame

$$|EC| = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Dĺžka telesovej uhlopriečky kocky je vždy násobkom čísla $\sqrt{3}$ a dĺžky hrany kocky.

Ž: *Polomer gule opísanej kocke bude polovicou tohto výsledku. Preto platí*

$$r_o = 2\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

U: Môžeš vypočítať objem tejto gule.

Ž: *Pre objem tejto gule platí*

$$V_o = \frac{4}{3}\pi r_o^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^3.$$

Ako mám druhú odmocninu z čísla tri umocniť na tretiu?

U: Tretia mocnina je vlastne súčinom dvoch členov. Jeden člen je základ tretej mocniny a druhý člen je jeho druhou mocninou. Všimni si, že druhá mocnina a druhá odmocnina sa navzájom zrušia. Pre objem gule po týchto výpočtoch platí:

$$V_o = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot (2\sqrt{3}) = \frac{4}{3}\pi \cdot (4 \cdot 3) \cdot (2\sqrt{3}).$$

Pokračuj v ďalších výpočtoch.

Ž: *Trojky vykrátim a zvyšné čísla mi stačí vynásobiť. Preto objem gule opísanej kocke je*

$$V_o = 32\sqrt{3}\pi.$$

U: A sme krôčik od výsledku úlohy. Máme vypočítať ***rozdiel objemov*** gule, ktorá je kocke opísaná a gule do kocky vpísanej.

Ž: *Veď to už nie je problém. Odčítam číselné hodnoty objemov, ktoré sme vypočítali a dostávam*

$$\Delta V = V_o - V_v = 32\sqrt{3}\pi - \frac{32\pi}{3}.$$

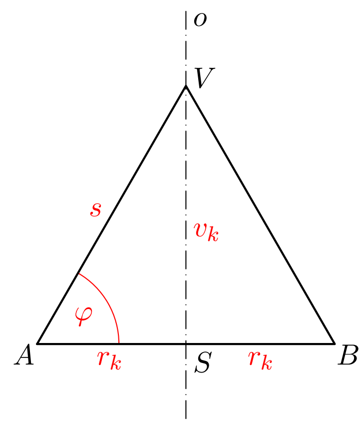
Dá sa to ešte rozumne upraviť?

U: Výsledok môže byť zapísaný v tvare jedného zlomku. Jeho menovateľom je číslo 3. V čitateli zlomku sa dá vybrať pred zátvorku reálne číslo 32π. To znamená, že výsledok môže byť zapísaný aj takýmto tvarom

$$\Delta V = \frac{3 \cdot 32\sqrt{3}\pi - 32\pi}{3} = \frac{32\pi(3\sqrt{3}-1)}{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

Príklad 7: *Do kužeľa, ktorého strana zviera s rovinou podstavy uhol $\varphi = 60°$, je vpísaní guľa s objemom $\frac{\pi}{6}$ cm^3. Vypočítajte objem kužeľa.*

U: Kde bude uhol 60 stupňov, ak sa pozrieme na osový rez rotačného kužeľa, ktorým je trojuholník ABV?



Ž: *Je to uhol VAB, lebo úsečka AV je stranou kužeľa a úsečka AB priemerom jeho podstavy.*

U: Aký bude trojuholník ABV?

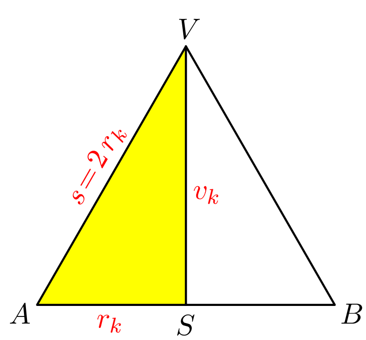
Ž: *Aha! Aj úsečka BV je stranou kužeľa, preto aj uhol VBA má veľkosť 60 stupňov. Ale aj uhol pri vrchole V bude mať tú istú veľkosť, lebo súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je 180 stupňov. To znamená, že trojuholník ABV je* **rovnostranný**.

U: Tento poznatok nám dáva možnosť vyjadriť vzťah medzi rozmermi rotačného kužeľa.

Ž: **Priemer podstavy** *rotačného kužeľa je rovnaký ako jeho* **strana** *s. Preto platí*

$$s = 2r_k.$$

U: Z ***pravouhlého trojuholníka*** ASV môžeš vyjadriť výšku rotačného kužeľa tiež pomocou polomeru podstavy kužeľa.



Ž: *Využijem* **Pytagorovu vetu** *v tvare*

$$s^2 = r_k^2 + v_k^2.$$

Za stranu s kužeľa dosadím vyjadrenie $s = 2r_k$ a zo získaného vzťahu vyjadrím výšku kužeľa. Preto dostávam

$$(2r_k)^2 = r_k^2 + v_k^2,$$
$$4r_k^2 = r_k^2 + v_k^2.$$

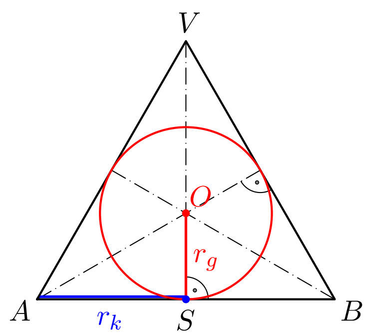
Odčítam druhú mocninu polomeru podstavy kužeľa a odmocním

$$v_k = \sqrt{4r_k^2 - r_k^2} = \sqrt{3r_k^2} = \sqrt{3}r_k.$$

U: Dobre. Rozmery rotačného kužeľa sme vyjadrili. Vieš, ako s týmito rozmermi súvisí polomer gule, ktorá je do kužeľa vpísaná?

Ž: *Vôbec netuším. Mohli by ste mi poradiť?*

U: Rezom gule je kruh vpísaný do rovnostranného trojuholníka, ktorý je osovým rezom rotačného kužeľa. Rez gule obsahuje jej stred. Vieš určiť, ktorý bod trojuholníka je stredom gule?



Ž: *Stredom gule by mal byť* **priesečník výšok** *trojuholníka, lebo trojuholník je rovnostranný.*

U: Správne. Priesečník výšok je zároveň stredom kruhu vpísaného do rovnostranného trojuholníka. A akú dĺžku bude mať polomer gule?

Ž: *Tretinu výšky?*

U: Prečo si to myslíš?

Ž: *Tipol som si.*

U: V podstate si sa trafil. Zdôvodníme to tým, že v rovnostrannom trojuholníku je ***výška*** na stranu zároveň ***ťažnicou***. Priesečník výšok je teda aj ťažiskom trojuholníka. Ako vieme, ***ťažisko*** rozdeľuje ťažnicu na dve časti, ktorých dĺžky sú v istom pomere. Vieš, v akom sú pomere?

Ž: *Už si spomínam. Časť ťažnice prislúchajúca k strane je* **tretinou dĺžky ťažnice**. *Druhá časť je dvakrát dlhšia.*

U: Výška rotačného kužeľa sa dá vyjadriť ako trojnásobok polomeru gule do kužeľa vpísanej. Platí

$$v_k = 3r_g.$$

U: K tomu, aby sme určili rozmery rotačného kužeľa, potrebujeme vyčísliť polomer gule. Potom budeme vedieť vypočítať aj objem kužeľa. Vieme určiť polomer gule?

Ž: *Zo zadania úlohy poznáme objem gule. Vzorec na výpočet objemu gule má tvar*

$$V_g = \frac{4}{3}\pi r_g^3.$$

Po dosadení číselnej hodnoty za objem dostávam

$$\frac{4}{3}\pi r_g^3 = \frac{\pi}{6}.$$

Číslo π *vykrátim a rovnicu vynásobím číslom* 3*. Zároveň ju vydelím číslom* 4*. Pre tretiu mocninu polomeru gule dostávam*

$$r_g^3 = \frac{1}{8}.$$

U: Polomer gule bude $r_g = \frac{1}{2}$ cm, lebo tretia odmocnina z čísla jedna osmina je číslo jedna polovica. Môžeš vyjadriť rozmery rotačného kužeľa.

Ž: *Povedali sme, že výška kužeľa je trojnásobkom polomeru gule, preto platí*

$$v_k = \frac{3}{2}\ \text{cm}.$$

Potrebujem ešte polomer podstavy kužeľa.

U: Na začiatku nášho riešenia sme výšku kužeľa vyjadrili pomocou polomeru podstavy kužeľa. Odvodili sme vzťah

$$v_k = \sqrt{3}r_k.$$

Výšku už poznáš, vyjadri polomer.

Ž: *Pre polomer dostávam*

$$r_k = \frac{1}{\sqrt{3}}v_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}.$$

Treba to ešte upraviť?

U: Bolo by to vhodné. Číslo tri v čitateli druhého zlomku napíšeme v tvare $(\sqrt{3})^2$. Potom zlomky vykrátime a pre polomer podstavy kužeľa dostávame

$$r_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}.$$

Môžeš vypočítať objem rotačného kužeľa.

Ž: *Využijem vzorec na výpočet objemu kužeľa v tvare*

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r_k^2 v_k.$$

Po dosadení číselných hodnôt získané zlomky umocním, vykrátim a vynásobím. Pre objem kužeľa takto dostávam

$$V_k = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

U: Objem rotačného kužeľa je teda $\frac{3\pi}{8}$ centimetrov kubických.