Objem a povrch častí gule

RNDr. Marián Macko

U: Určite si si všimol strechy na rôznych historických budovách. Aký majú tvar?

Ž: *Niektoré strechy sú rovné, iné tvarovo dosť komplikované. Na vežičkách niektorých hradov a zámkov majú strechy tvar rotačného kužeľa. Videl som dokonca aj rovnú strechu, ale v strede strecha pripomínala polovicu gule.*

U: Strecha v každom z tvojich prípadov predstavuje iba časť hranice telies, ktoré si vymenoval. V poslednom tebou uvedenom príklade to však môže byť iba čať gule. Vznikne ***rezom*** gule určitou rovinou a nazývame ju ***guľový odsek***.

Ž: *Predpokladám, že aj druhá časť gule, ktorá takto vznikne, je guľový odsek.*

U: Máš pravdu. Rezom gule vzniknú dva guľové odseky. Hranica každého guľového odseku sa skladá z ***podstavy guľového odseku*** a z ***guľového vrchlíka***.

Ž: **Guľový vrchlík** *mám chápať ako* **plášť guľového odseku***?*

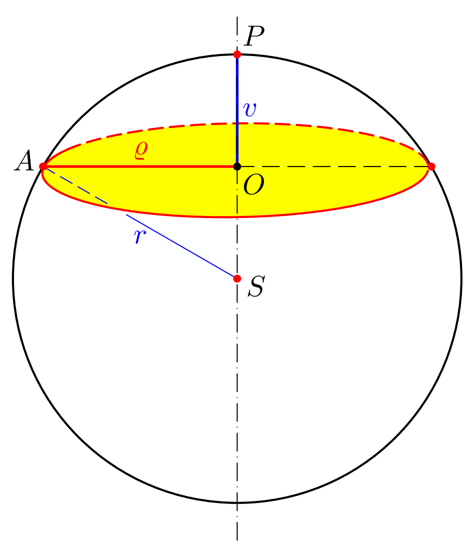
U: Pochopil si správne. Strechy, o ktorých bola reč na začiatku, môžu mať teda aj tvar guľového vrchlíka.

Ž: *Čo potrebujem poznať, aby som vypočítal objem a povrch guľového odseku?*

U: Okrem polomeru gule, z ktorej guľový odsek vznikol, dané teleso určujú aj ***polomer podstavy*** a ***výška*** guľového odseku.

Ž: *To, že podstavou je kruh je mi jasné. Jeho polomer je vždy menší alebo rovný polomeru gule. Môžete mi ale vysvetliť, kde nameriam výšku guľového odseku?*

U: Pozri sa na obrázok. Priamka určená stredom S gule a stredom O podstavy guľového odseku je ***kolmá*** na rovinu podstavy. Táto priamka pretne guľový vrchlík v bode P.



Ž: *Už to mám. Bod P má zo všetkých bodov vrchlíka najväčšiu vzdialenosť od podstavy, preto súvisí s výškou.*

U: Áno. ***Vzdialenosť bodu*** P ***od bodu*** O určuje ***výšku*** guľového odseku. Obrázok nám zároveň naznačuje, že medzi spomenutými tromi veličinami je určitý súvis. Stačí poznať dve z nich. Tretiu veličinu potom vieme vypočítať.

Ž: *Akože stačí zadať napríklad výšku v a polomer gule r a viem vypočítať polomer podstavy ρ guľového odseku? Mohol by som síce využiť pravouhlý trojuholník SOA, s pravým uhlom pri vrchole O, ale nepoznám dĺžku strany SO.*

U: Len sa pozri na obrázok lepšie. Polomerom gule nie je iba úsečka SA.

Ž: *Máte pravdu. Aj úsečka SP predstavuje polomer r gule. Dĺžku úsečky SO preto vyjadrím v tvare $|SO| = r - v$ a pre polomer gule r na základe* **Pytagorovej vety** *dostávam*

$$r^2 = (r - v)^2 + \rho^2.$$

U: Tento vzťah nám umožňuje vypočítať ktorúkoľvek z troch veličín. Predpokladom je, že poznáme zvyšné dve. Vyjadri teda polomer ρ.

Ž: *Je to jednoduchá záležitosť. Odrátam výraz $(r - v)^2$ a odmocním. Pre polomer ρ dostávam vyjadrenie*

$$\rho = \sqrt{r^2 - (r - v)^2}.$$

U: Ak si pochopil súvislosti medzi veličinami charakterizujúcimi guľový odsek, tak sa nebudeš čudovať, že ***objem guľového odseku*** sa dá vyjadriť v tvare

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + v^2\right),$$

alebo v tvare

$$V = \pi v^2 \cdot \left(r - \frac{v}{3}\right).$$

Ž: *Toto chápem. Záleží predsa na tom, ktoré dve veličiny sú zadané. Tak, ako sme to pred chvíľou analyzovali. V každom prípade však musím poznať* **výšku** v **guľového odseku**. *Neexistuje jednoduchšie vyjadrenie objemu? Veď tieto vzorce sa nikdy nenaučím.*

U: Priznám sa ti, že ani ja si niekedy neviem spomenúť, aký majú tvar. Prezradím ti však, ako si pamätám vzorec, ktorý som uviedol ako druhý v poradí. Roznásob výraz na pravej strane a každý z dvoch členov, ktoré dostaneš sa pokús interpretovať geometricky. Objemy ktorých telies tieto členy vyjadrujú?

Ž: *Dobre, výrazy roznásobím a mám*

$$V = \pi v^2 r - \frac{\pi v^3}{3}.$$

Jasné! Člen $\pi v^2 r$ vyjadruje objem rotačného valca s polomerom podstavy v a výškou r. Ale čo vyjadruje druhý člen …?

U: Predstav si, že tiež objem valca. Akurát, že výraz $\frac{\pi v^3}{3}$ upravíš na tvar $\pi v^2 \cdot \frac{v}{3}$. Teraz už dúfam vieš určiť rozmery valca.

Ž: *Dobrá finta. Tento valec má polomer podstavy v a výškou je* **tretina výšky** *v guľového odseku.*

U: Teda objem guľového odseku sa dá chápať ako rozdiel objemov dvoch rotačných valcov, ktorých rozmery sme pred chvíľou popísali.

Ž: *Predpokladám, že aj pri povrchu bude súvislosť s povrchom nejakého nám už známeho telesa. Tuším, že bude súčtom* **obsahu podstavy** *a* **obsahu plášťa**

$$S = S_p + S_{pl}.$$

Keďže podstavou je kruh, tak jej obsah je $S_p = \pi\rho^2$. S obsahom plášťa mi však budete musieť pomôcť.

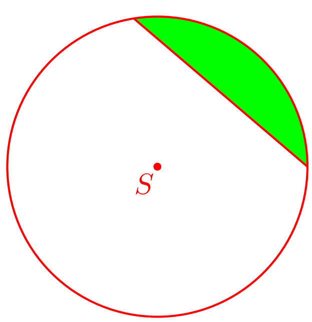
U: ***Vzorec pre obsah plášťa***, čiže ***obsah guľového vrchlíka*** je pomerne jednoduchý,

$$S_{pl} = 2\pi r v.$$

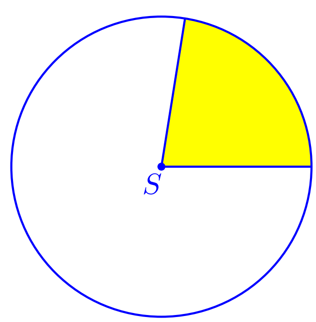
Ž: *Veď je to obsah plášťa rotačného valca s polomerom podstavy r a výškou v. Vidíte, mal som pravdu.*

U: Ako si sa mal možnosť presvedčiť, objem a povrch guľového odseku sa dá spojiť s objemom a povrchom rotačných valcov.

Ž: *Napadlo mi, že aj v rovine existuje* **odsek**, *ale* **kruhový**. *Mám chápať guľový odsek ako jeho priestorovú analógiu?*



odsek

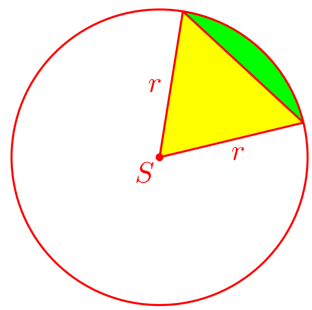


výsek

U: Rozmýšľaš správnym smerom.

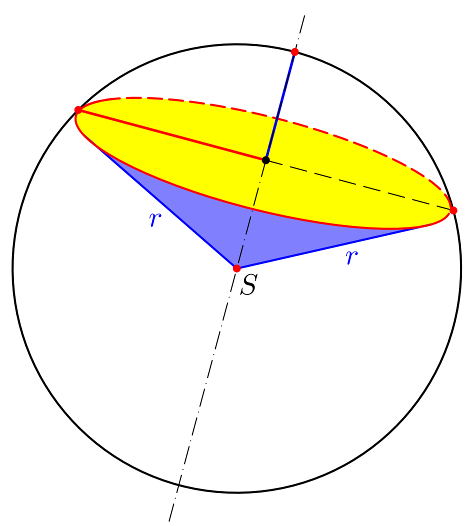
Ž: *Takže musí existovať aj guľový výsek, lebo s* **kruhovým výsekom** *v rovine som sa už stretol.*

U: Nemá náhodou kruhový výsek súvis aj s kruhovým odsekom?



Ž: *Vlastne máte pravdu. Veď je to zjednotenie kruhového odseku a rovnoramenného trojuholníka, ktorého základňou je úsečka ohraničujúca odsek a hlavným vrcholom je stred kruhu.*

U: No vidíš! Na podobnom princípe je založená aj definícia guľového výseku. ***Guľový výsek*** je ***zjednotením guľového odseku*** a rotačného kužeľa, ktorý má s guľovým odsekom spoločnú podstavu. Vrcholom rotačného kužeľa je stred gule.



Ž: *Takže s* **povrchom** *by nemal byť problém. Musím sčítať* **obsah guľového vrchlíka** *a obsah plášťa rotačného kužeľa. Všetko vlastne už poznám. To prvé sa dá vyjadriť v tvare* $2\pi rv$*, kde* r *je polomer gule a* v *výška guľového odseku. Pokiaľ si dobre spomínam, obsah plášťa rotačného kužeľa vypočítam podľa vzorca*

$$S_{pl} = \pi r s,$$

kde r *je polomer podstavy a* s *strana kužeľa.*

U: Máš pravdu, ale na našom obrázku sú tieto rozmery označené inými symbolmi. Pozri sa ešte raz na obrázok.

Ž: *To som si neuvedomil. Polomer podstavy rotačného kužeľa je teraz ρ a stranou je polomer gule r. Preto* **povrch guľového výseku** *vyjadrím v tvare*

$$S = 2\pi r v + \pi \rho r.$$

U: Objem tohto telesa bude súčtom ***objemu guľového odseku*** a objemu rotačného kužeľa. Rozmery poznáš, vyjadri teda objem guľového výseku.

Ž: *Použijem známe vzorce pre objem týchto telies a dostávam*

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + v^2\right) + \frac{\pi \rho^2}{3} \cdot (r - v),$$

lebo výška kužeľa je rozdielom polomeru gule a výšky guľového odseku.

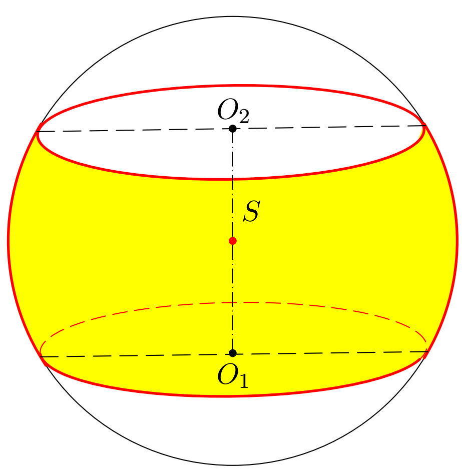
U: Vzorce si použil správne, dokonca aj výšku kužeľa si zdôvodnil excelentne. Prezradím ti, že po vykonaní všetkých úprav bude mať vzorec pre ***objem guľového výseku*** tvar

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v.$$

U: Pozrime sa ešte na to, aké telesá dostaneme, ak guľu prerežeme dvomi rovnobežnými rovinami. Vzdialenosti týchto rovín od stredu S gule sú menšie ako polomer r gule.

Ž: *Veď to bude to isté ako pri jednej rovine. Dostaneme dva guľové odseky.*

U: Zabudol si na prostrednú časť gule. Okrem dvoch guľových odsekov dostaneme aj ***guľovú vrstvu***. Je to teda časť gule ***ohraničená dvomi rovnobežnými podstavami***. Polomery podstáv sú vždy menšie alebo rovné polomeru gule. Môžu byť rovnaké, ale nemôže sa tak stať v jednom prípade. Ak polomer jednej podstavy je rovnaký ako polomer gule.



Ž: *Trochu to pripomína zrezaný rotačný kužeľ. Rozdiel však vidím v plášťoch týchto dvoch telies. Plášťom zrezaného rotačného kužeľa je* **výsek medzikružia***. Ak funguje analógia, tak* **plášťom guľovej vrstvy** *by mal byť* **guľový pás***.*

U: Výborne! Ako vidím, základné pojmy zvládaš už aj sám. Budeš prekvapený, ale ***obsah guľového pásu*** vypočítaš podľa rovnakého vzorca ako ***obsah vrchlíka***, teda

$$S_{pl} = 2\pi r v,$$

pričom v je ***výška guľovej vrstvy***. Ako ju určíš?

Ž: *Výška v telesách, ktoré majú dve rovnobežné podstavy je daná* **vzdialenosťou rovín týchto podstáv**. *Tak by to malo byť aj pre* **výšku guľovej vrstvy**.

U: Máš pravdu. Táto výška v guľovej vrstvy a polomery r_1 a r_2 jej podstáv umožňujú vyjadriť ***objem*** v tvare

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2\right).$$

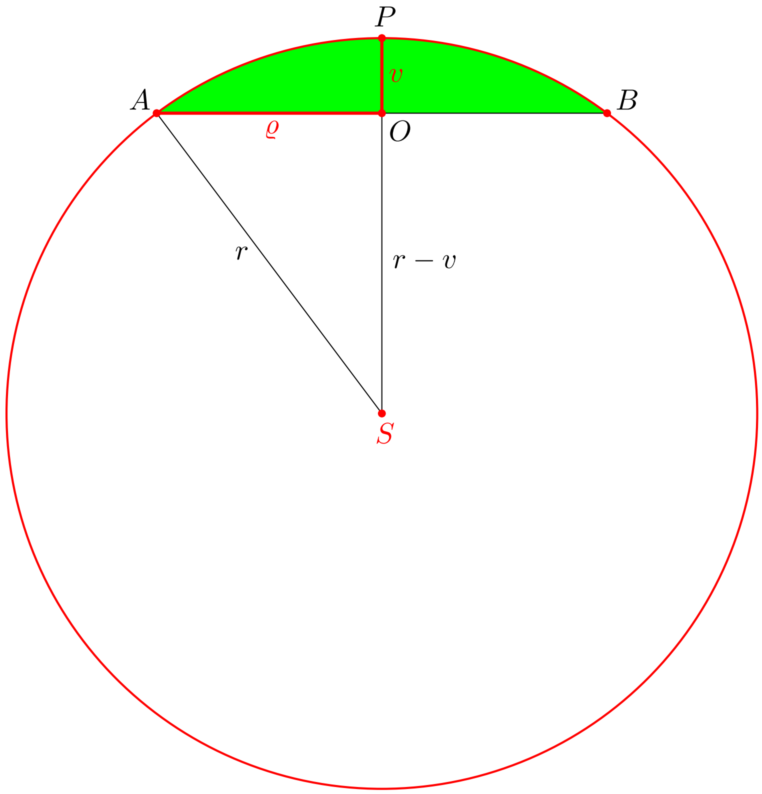
Dôležitejšie než naučenie sa vzorca bude pre teba jeho využitie pri riešení úloh. Snaž sa pochopiť súvislosti medzi zadanými veličinami a tými, ktoré potrebuješ na dosadenie do vzorca. Zadaný totižto môže byť napríklad polomer gule, z ktorej guľová vrstva vznikla.

Príklad 1: *Určte povrch a objem guľového odseku, ak polomer gule je* 5 cm *a polomer rezu* 3 cm.

U: Vzorec na výpočet objemu guľového odseku ti našepkám. Má tvar

$$V = \pi v^2 \cdot \left(r - \frac{v}{3}\right).$$

Potrebuješ najskôr určiť výšku odseku.



Ž: *Keď si znázorním* **stredový rez gule**, *z ktorej vzniká guľový odsek, tak získam* **pravouhlý trojuholník** SOA *s pravým uhlom pri vrchole* O. *Prepona* SA *má dĺžku* 5 *centimetrov, lebo je to polomer gule. Tú istú dĺžku má aj úsečka* SP. *Vypočítam si preto najskôr dĺžku úsečky* SO. *Pre výšku* v *guľového odseku potom platí*

$$v = r - |SO|.$$

U: Máš pravdu. Pre jednoduchší zápis si označ dĺžku úsečky SO symbolom x.

Ž: *Pre neznámu* x *na základe* **Pytagorovej vety** *z* **pravouhlého trojuholníka** SOA *platí*

$$x = \sqrt{r^2 - \varrho^2},$$

lebo odvesna OA *je polomerom podstavy odseku. Po dosadení číselných hodnôt dostávam*

$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

U: Aká bude teda výška guľového odseku?

Ž: *Nóóó... Aha, veď som to už povedal. Jeden centimeter, lebo* $v = r - x$.

U: Dosaď do vzorca a vypočítaj objem guľového odseku.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\right) = \pi \cdot \frac{14}{3} = \frac{14\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

U: Povrch guľového odseku vyjadríme podľa vzorca

$$S = \pi \varrho^2 + 2\pi r v.$$

Ž: *Tento vzorec poznám. Prvý člen vyjadruje* **obsah podstavy** *a druhý člen* **obsah vrchlíka**. *Teraz to už bude hračka. Stačí dosadiť zadané hodnoty* $\varrho = 3$ cm, $r = 5$ cm *a vypočítanú výšku* $v = 1$ cm *a mám*

$$S = \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 1 = 19\pi\ \mathrm{cm}^2.$$

U: Objem guľového odseku je $\frac{14\pi}{3}$ centimetrov kubických a jeho povrch je 19π centimetrov štvorcových.

Príklad 2: *Určte objem a obsah podstavy guľového odseku, ak jeho výška je* 8 cm *a obsah jeho vrchlíka je* 208π cm^2.

Ž: *Vzorec na výpočet* **objemu guľového odseku** *potrebujem pripomenúť.*

U: Objem vypočítaš podľa vzorca

$$V = \pi v^2 \cdot \left(r - \frac{v}{3}\right),$$

kde r je polomer gule a v výška guľového odseku.

Ž: *Nepoznám však polomer gule.*

U: Vypočítaš ho zo zadaného ***obsahu guľového vrchlíka***.

Ž: *Aha! Použijem vzorec* $S_{pl} = 2\pi r v$, *odkiaľ pre polomer* r *dostávam*

$$r = \frac{S_{pl}}{2\pi v}.$$

Dosadím číselnú hodnotu, zlomok vykrátim a mám

$$r = \frac{208\pi}{2\pi \cdot 8} = 13 \text{ cm}.$$

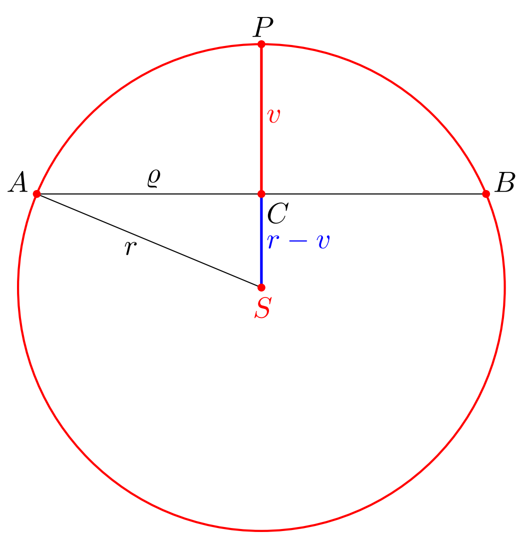
U: Môžeš vypočítať objem guľového odseku.

Ž: *Do vami spomenutého vzorca dosadím hodnoty* $r = 13$ cm *a* $v = 8$ cm *a dostávam*

$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot \left(13 - \frac{8}{3}\right) = 64\pi \cdot \frac{31}{3} = \frac{1984\pi}{3}.$$

U: Zatiaľ ti to ide šikovne. Dokážeš vypočítať aj obsah podstavy?

Ž: *Podstavou je kruh s polomerom* ϱ, *preto sa dá obsah vyjadriť v tvare* $S_p = \pi\varrho^2$. *Ale pri výpočte polomeru* ϱ *podstavy potrebujem poradiť.*



U: Pozri sa na obrázok, na ktorom je stredový rez gule. Na výpočty využi ***pravouhlý trojuholník*** SCA s pravým uhlom pri vrchole C.

Ž: *Prepona SA má dĺžku polomeru gule, teda 13 centimetrov. Polomerom gule je aj úsečka SP. Keďže výšku v guľového odseku už poznám, viem aj dĺžku úsečky SC. Vyjadrím ju ako* **rozdiel** *polomeru gule a výšky guľového odseku. Dostávam*

$$x = |SC| = r - v = 13 - 8 = 5.$$

U: Vypočítaj ešte polomer ϱ podstavy guľového odseku. Je ním odvesna AC v pravouhlom trojuholníku ACS.

Ž: *Prepona AS má dĺžku 13 centimetrov a odvesna SC je dlhá 5 centimetrov. Použijem* **Pytagorovu vetu**

$$\varrho^2 = r^2 - x^2$$

a mám

$$\varrho = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

U: Aký je potom obsah podstavy?

Ž: *Pre obsah podstavy potom mám*

$$S_p = \pi\varrho^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi.$$

U: Objem guľového odseku je $\frac{1984\pi}{3}$ centimetrov kubických a obsah podstavy 144π centimetrov štvorcových.

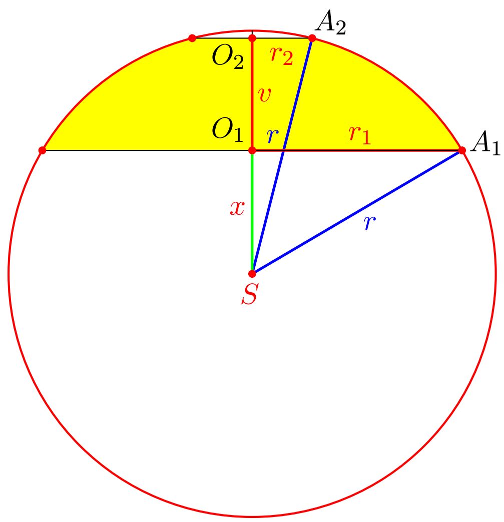
Príklad 3: *Určte objem guľovej vrstvy, ak sú dané polomery podstáv* $r_1 = 11{,}2$ cm, $r_2 = 3{,}2$ cm *a polomer gule* $r = 13$ cm. *Stred gule neleží vo vnútri vrstvy.*

U: Vzorec na výpočet ***objemu guľovej vrstvy*** ti prezradím. Má vyjadrenie

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2\right).$$

Ž: *Pozerám, že najskôr budem musieť vypočítať výšku* v. *Ale načo je v zadaní polomer gule, keď ho do vzorca pre objem nepotrebujem?*

U: Využiješ ho pri výpočte výšky. Pozri sa na obrázok, na ktorom je stredový rez gule. Priemery podstáv sme vyznačili rovnobežne a podľa zadania tak, aby stred gule nebol vo vnútri guľového pásu. Ktorá úsečka určuje výšku?



Ž: *Výškou je napríklad úsečka* O_1O_2. *Ale netuším ako ju vypočítam. Využijem lichobežník* $O_1A_1A_2O_2$*?*

U: Nie, nemáš pravdu. Vystačíme si s dvoma ***pravouhlými trojuholníkmi***. Najskôr využijeme trojuholník SO_1A_1 s pravým uhlom pri vrchole O_1. Vypočítame dĺžku úsečky x.

Ž: *Môžem pokračovať ja? Potom by som z trojuholníka* SA_2O_2 *vypočítal dĺžku strany* SO_2. *Dĺžka tejto strany je súčtom hľadanej výšky a úsečky* x.

U: Dobre. Plán máme, poďme ho realizovať.

Ž: *Pre strany pravouhlého trojuholníka* SO_1A_1 *platí* **Pytagorova veta** *v tvare*

$$r^2 = r_1^2 + x^2.$$

Vyjadrím si neznámu x, *dosadím číselné hodnoty a mám*

$$x = \sqrt{r^2 - r_1^2} = \sqrt{13^2 - 11{,}2^2} = \sqrt{43{,}56} = 6{,}6.$$

U: Výpočet výšky v guľovej vrstvy začnem za teba sám. Pre pravouhlý trojuholník SO_2A_2 zapíšem ***Pytagorovu vetu*** v tvare

$$r^2 = r_2^2 + (v + x)^2.$$

Po dosadení číselných hodnôt tak dostávame

$$13^2 = 3{,}2^2 + (v + 6{,}6)^2.$$

Pokračuj.

Ž: *Čísla umocním, odčítam a obe strany rovnice odmocním. To môžem, lebo dĺžky úsečiek sú* **kladné** *reálne čísla. Čiže mám*

$$\sqrt{158{,}76} = v + 6{,}6.$$

Po určení odmocniny a odčítaní čísel pre výšku dostávam

$$v = 12{,}6 - 6{,}6 = 6 \text{ cm}.$$

U: Dobre, máš všetky potrebné hodnoty. Vypočítaj objem guľovej vrstvy.

Ž: *Do vzorca pre objem dosadím hodnoty $r_1 = 11{,}2$, $r_2 = 3{,}2$ a $v = 6$. Dostávam*

$$V = \frac{\pi \cdot 6}{6} \cdot \left(3 \cdot 11{,}2^2 + 3 \cdot 3{,}2^2 + 6^2\right).$$

Čísla umocním, vynásobím a sčítam. Výsledok bude

$$V = 443{,}04\pi \text{ cm}^3.$$

U: Objem guľovej vrstvy je $443{,}04\pi$ centimetrov kubických.

Príklad 4: *V akej výške má byť rozdelená polguľa rezom rovnobežným s podstavou, ak oba diely majú mať rovnaký povrch?*

Ž: *Môžem si tipnúť?*

U: Vyskúšaj.

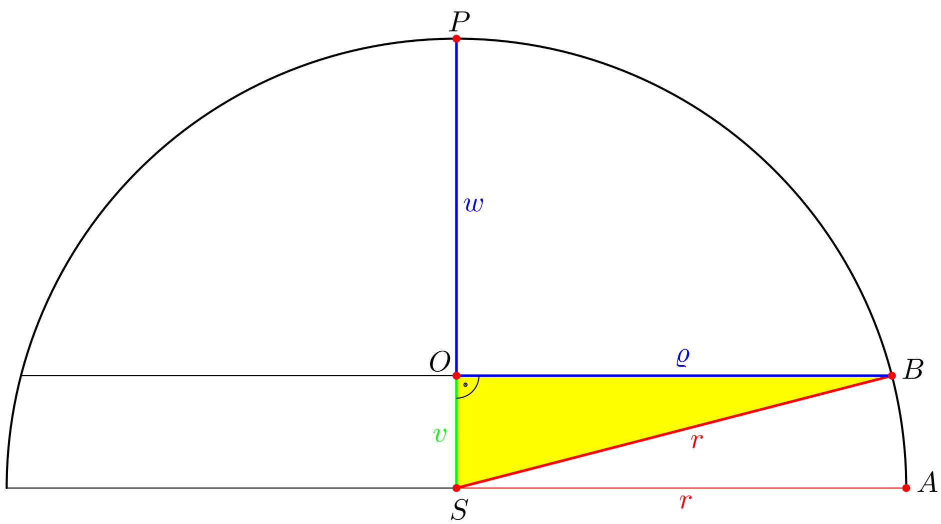
Ž: *Zdá sa mi, že to bude v polovici výšky polgule.*

U: Si o tom presvedčený? Ako by si to zdôvodnil?

Ž: *Povrchy musia byť predsa podľa zadania rovnaké. Vychádza mi to tak, že jedna aj druhá časť by mali mať rovnaký povrch. Alebo nie?*

U: Tak sa o tom presvedčíme výpočtom. Polomer polgule označme symbolom r a vzdialenosť roviny rezu od podstavy ako neznámu v. Aké telesá vzniknú rezom polgule?

Ž: *Horná časť bude* **guľový odsek** *a dolná časť* **guľová vrstva**.



U: Vieš vyjadriť ***povrch guľovej vrstvy***?

Ž: *Stačí sčítať obsahy podstáv a obsah plášťa, ktorý vyjadrím v tvare $2\pi rv$. Potrebujem však zistiť polomer ϱ hornej podstavy guľovej vrstvy.*

U: Stačí, ak vyjadríš jeho druhú mocninu. Neskôr uvidíš prečo. Využi na to ***pravouhlý trojuholník*** SOB s pravým uhlom pri vrchole O.

Ž: *Jasné! Na základe* **Pytagorovej vety** *dostávam*

$$\varrho^2 = r^2 - v^2.$$

U: Obsahy podstáv by si mal vedieť vyjadriť. ***Obsah plášťa guľovej vrstvy*** vypočítaš podľa vzorca $S_{pl} = 2\pi rv$. Vyjadri celý povrch.

Ž: *Do vzorca pre povrch dosadím vyjadrenie pre polomer ϱ, zátvorku roznásobím a členy sčítam. Pre povrch guľovej vrstvy dostanem*

$$S = 2\pi r^2 - \pi v^2 + 2\pi rv.$$

$$\boxed{\begin{gathered} S = S_1 + S_2 + S_{pl} = \pi r^2 + \pi \varrho^2 + 2\pi r v = \\ = \pi r^2 + \pi \left(r^2 - v^2\right) + 2\pi r v = 2\pi r^2 - \pi v^2 + 2\pi r v \end{gathered}}$$

U: Výborne! Na vyjadrenie povrchu horného ***guľového odseku*** potrebuješ poznať jeho výšku w. Pozri sa ešte raz na obrázok. Čo ti napadá?

Ž: *Výšky guľovej vrstvy a guľového odseku dajú celý polomer r gule. Preto platí*

$$w = r - v.$$

U: Vzorec na výpočet ***povrchu guľového odseku*** je

$$S' = \pi \varrho^2 + 2\pi r w.$$

Dosaď získané vyjadrenia a výraz uprav.

Ž: *Úpravy budú analogické úpravám pri povrchu guľovej vrstvy. Teraz však musím dosadiť vyjadrenie aj za polomer ϱ aj za výšku w. Výsledok bude v tvare*

$$S' = 3\pi r^2 - \pi v^2 - 2\pi r v.$$

$$\boxed{\begin{gathered} S' = \pi \varrho^2 + 2\pi r w = \pi \cdot \left(r^2 - v^2\right) + 2\pi r \cdot (r - v) = \\ = \pi r^2 - \pi v^2 + 2\pi r^2 - 2\pi r v = 3\pi r^2 - \pi v^2 - 2\pi r v \end{gathered}}$$

U: Posledný výpočet urobím sám. Povrchy týchto dvoch telies majú byť rovnaké. Získame preto rovnicu

$$2\pi r^2 - \pi v^2 + 2\pi r v = 3\pi r^2 - \pi v^2 - 2\pi r v.$$

Jej úpravou dostaneme rovnicu

$$4\pi r v = \pi r^2$$

a pre výšku v máme

$$v = \frac{r}{4}.$$

Ž: *To ste aké úpravy prvej rovnice urobili?*

U: Všimni si ešte raz, že členy vyznačené červenou farbou sa zrušia. K rovnici zároveň pripočítame výraz $2\pi r v$. Zvyšok by si mal pochopiť.

Ž: *Teraz už hej. Vidím, že som sa sekol. Rezať musíme nie v polovici, ale v* ***štvrtine polomeru gule****.*

Príklad 5: *Rovina rezu rozdelí povrch gule v pomere 2 : 3. Určte, v akom pomere delí jej objem.*

U: Aké telesá vzniknú rezom gule rovinou?

Ž: *Rovina rozdelí guľu na dva* **guľové odseky***, ktoré majú spoločnú podstavu.*

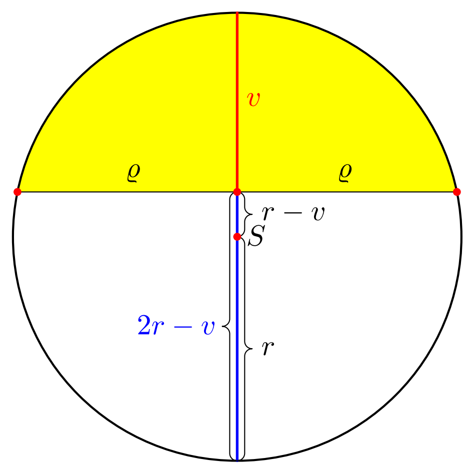
U: Pomer 2 : 3 zo zadania úlohy súvisí iba s ***obsahmi guľových vrchlíkov***, ktoré tvoria plášť týchto guľových odsekov. Čo potrebuješ poznať na výpočet ***obsahu guľového vrchlíka***?

Ž: *Keďže vzorec má tvar $S_{pl} = 2\pi rv$, potrebujem poznať polomer gule a výšku guľového vrchlíka. Polomer r bude pre oba guľové odseky rovnaký, lebo vznikli z tej istej gule. Výšky však nebudú rovnaké.*

U: Prečo?

Ž: *Ak by boli výšky rovnaké, tak by sa povrchy rovnali. My však vieme, že sú v pomere 2 : 3.*

U: Označme teda výšku menšieho guľového odseku symbolom v. Dokážeš vyjadriť výšku druhého odseku? Využi na to obrázok, na ktorom je stredový rez gule.



Ž: *Výšky oboch guľových odsekov tvoria* **priemer** *$2r$ gule. Preto* **výška druhého odseku** *bude vyjadrená výrazom $2r - v$.*

U: Môžeš teda vyjadriť obsah oboch guľových vrchlíkov.

Ž: *Menší guľový vrchlík má obsah $S_1 = 2\pi rv$ a pre obsah väčšieho vrchlíka platí $S_2 = 2\pi r \cdot (2r - v)$. Čo s tým? Veď nič nepoznám.*

U: Jednu informáciu predsa len máš. Vieš aký je pomer týchto obsahov. Zostav preto rovnicu, ktorá ti dá možnosť vyjadriť výšku v pomocou polomeru r gule. Budeš mať iba jednu premennú, pomocou ktorej vyjadríš pomer objemov. Ale začni najskôr pomerom obsahov.

Ž: *Podľa zadania je tento pomer rovný číslu* $\frac{2}{3}$. *Dostávam takto rovnicu*

$$\frac{2\pi r v}{2\pi r \cdot (2r - v)} = \frac{2}{3}.$$

Výraz $2\pi r$ *vykrátim a v rovnici odstránim zlomky. Preto mám*

$$3v = 2 \cdot (2r - v).$$

Roznásobím pravú stranu

$$3v = 4r - 2v$$

a mám

$$v = \frac{4r}{5} = 0{,}8r.$$

U: Môžeme vyjadriť pomer objemov týchto dvoch guľových odsekov. Menší z nich má objem $V_1 = \pi v^2 \cdot \left(r - \frac{v}{3}\right)$. V čom sa bude líšiť vyjadrenie objemu väčšieho odseku?

Ž: *V čom? Počkajte, musím sa zorientovať. Aha! Polomer gule je ten istý, akurát výšku* v *teraz zamením za výšku* $2r - v$. *Ostatné by to malo byť to isté. Teda*

$$V_2 = \pi(2r - v)^2 \cdot \left(r - \frac{2r - v}{3}\right).$$

U: Výšku väčšieho odseku označme symbolom v'. Ako sa dá vyjadriť pomocou polomeru r gule?

Ž: *Povedali sme, že súčet výšok oboch odsekov predstavuje priemer gule. Preto pre výšku* v' *platí*

$$v' = 2r - v = 2r - 0{,}8r = 1{,}2r.$$

U: Vyjadrenie objemu väčšieho odseku sa zjednoduší, ak použiješ výšku v'. Urob to.

Ž: *Pre objem dostávam*

$$V_2 = \pi(v')^2 \cdot \left(r - \frac{v'}{3}\right).$$

U: Pri výpočte pomeru objemov urobíme niekoľko úprav. Sleduj v rámčeku. Najskôr vykrátime číslo π, zlomky v čitateli a menovateli zloženého zlomku upravíme na spoločného menovateľa. Je ním číslo tri. Dosadíme vyjadrenie $v = 0{,}8r$ za výšku v, vyjadrenie $v' = 1{,}2r$ za výšku v' a opäť upravíme zložený zlomok. Po krátení dostávame výsledok $44 : 81$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi v^2 \cdot \left(r - \dfrac{v}{3}\right)}{\pi (v')^2 \cdot \left(r - \dfrac{v'}{3}\right)} = \frac{v^2(3r - v)}{(v')^2(3r - v')} =$$

$$= \frac{(0{,}8r)^2(3r - 0{,}8r)}{(1{,}2r)^2(3r - 1{,}2r)} = \frac{0{,}64r^2 \cdot 2{,}4r}{1{,}44r^2 \cdot 1{,}8r} = \frac{44}{81}$$

Príklad 6: *V akej vzdialenosti od stredu danej gule je umiestnený bodový zdroj svetla, ak sú ním osvetlené práve $\frac{3}{8}$ povrchu gule?*

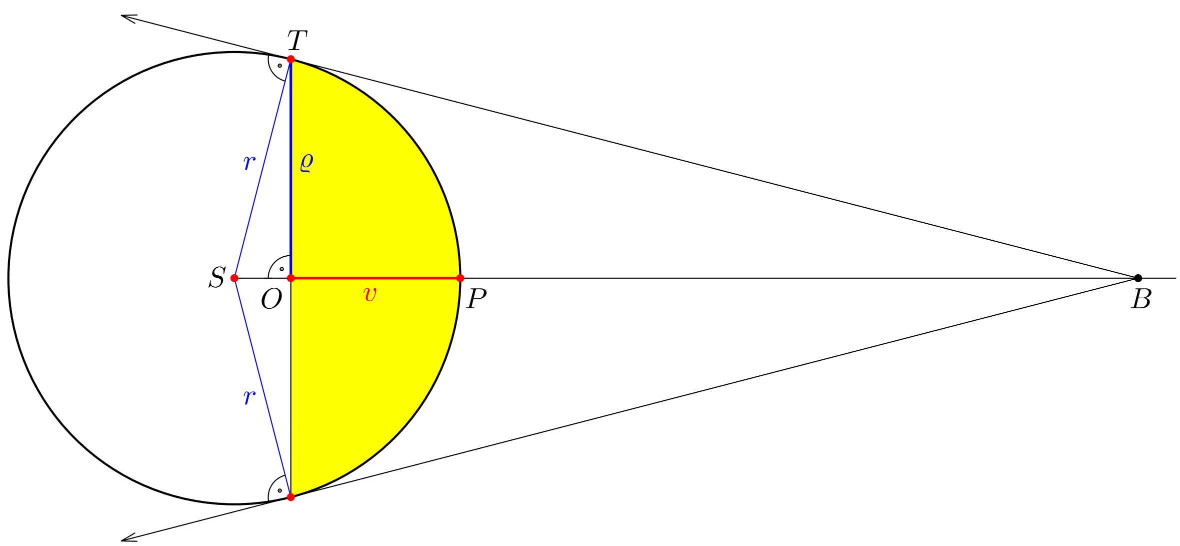
U: Všetky veličiny v riešení úlohy budeme vyjadrovať pomocou polomeru r gule. Teda aj hľadanú vzdialenosť bodového zdroja svetla od stredu gule. Vyplýva to z toho, že je daná guľa. To znamená, že je daný jej polomer r. Máš predstavu, čo z gule bude osvetlené?

Ž: *Mala by to byť bližšia časť gule.*

U: Ako by si ju ohraničil?

Ž: *V krajných polohách sa svetelné lúče* **dotýkajú** *gule.*

U: Máš pravdu. Dotykové body všetkých takýchto lúčov tak vytvárajú kružnicu, ktorej polomer popisuje osvetlenú plochu. Tušíš, čo to bude? Pozri na obrázok.



Ž: *Ak to má byť časť povrchu gule, tak mi napadá iba* **guľový vrchlík**.

U: V stredovom reze gule je úsečka OT polomerom podstavy guľového odseku, ktorého plášťom je spomenutý guľový vrchlík. Výškou vrchlíka je úsečka OP. Akú dĺžku má úsečka ST?

Ž: *Táto úsečka je polomerom gule, teda $|ST| = r$.*

U: Dobre. Poďme najskôr využiť tie tri osminy povrchu gule zo zadania úlohy. Potom sa k obrázku vrátime. Pokús sa vyjadriť obsah guľového vrchlíka s využitím spomenutej informácie. Vzorec pre povrch gule by nemal byť problém.

Ž: *Povrch gule vypočítam podľa vzorca $S_g = 4\pi r^2$. Guľový vrchlík predstavuje tri osminy, preto platí*

$$S_{pl} = \frac{3}{8}S_g = \frac{3}{8} \cdot 4\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2.$$

Na čo nám to bude?

U: Povrch guľového vrchlíka vieme vyjadriť aj vzorcom $S_{pl} = 2\pi rv$, kde v je jeho výška. Ak tieto vyjadrenia porovnáme, tak môžeme výšku vyjadriť pomocou polomeru gule, teda iba pomocou zadanej premennej. Urob to.

Ž: *Porovnaním obsahov získam rovnicu*

$$2\pi rv = \frac{3}{2}\pi r^2.$$

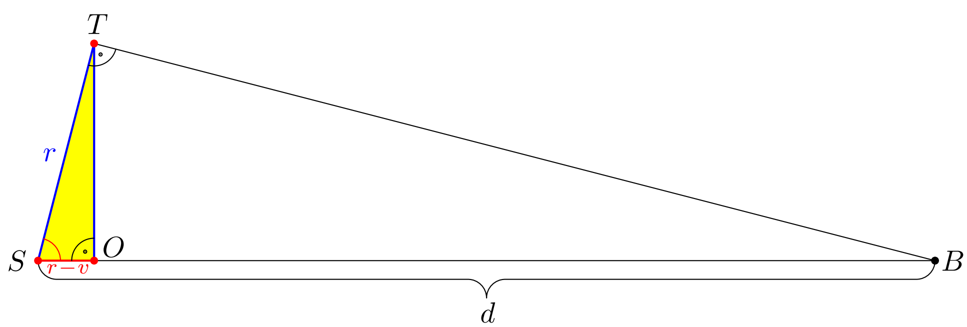
Rovnicu vydelím výrazom $2\pi r$ *a mám*

$$v = \frac{3r}{4}.$$

U: Našou úlohou je vypočítať vzdialenosť svetelného zdroja od stredu gule. Vráťme sa teda naspäť k obrázku. Zatiaľ sme vyjadrili dĺžky týchto úsečiek:

$$|ST| = r, \quad |OP| = v = \frac{3r}{4}.$$

Akú dĺžku má úsečka SO?



Ž: *To je jednoduché. Jej dĺžka je predsa rozdielom polomeru gule a výšky vrchlíka, teda*

$$|SO| = r - v = r - \frac{3r}{4} = \frac{r}{4}.$$

U: Označme dĺžku úsečky SB, ktorú máme vyjadriť, symbolom d. Na jej určenie využijeme napríklad ***podobnosť trojuholníkov***. V tom ti poradím. Trojuholníky SOT a STB tvoria dvojicu podobných trojuholníkov.

Ž: *Môžete vysvetliť, prečo sú podobné?*

U: Súvisí to s vnútornými uhlami trojuholníkov. Podobné trojuholníky majú rovnaké odpovedajúce si uhly. Vyjadruje to ***veta (uu)*** o podobnosti.

Ž: *Už som si spomenul. Naše trojuholníky majú uhol pri vrchole S spoločný a v každom z nich je jeden uhol pravý. Začínam chápať. Na vyjadrenie dĺžky d chcete využiť pomer strán týchto podobných trojuholníkov.*

U: Dokázal by si ho zapísať?

Ž: *Zoberiem iba tie strany, ktoré poznám, preto dostávam*

$$\frac{|SB|}{|ST|} = \frac{|ST|}{|SO|}.$$

Radšej si do rovnice dosadím ich vyjadrenia a mám

$$\frac{d}{r} = \frac{r}{\frac{r}{4}}.$$

Vzdialenosť d vyjadrím v tvare

$$d = 4r.$$

Svetelný zdroj má byť umiestnený vo vzdialenosti $4r$ od stredu gule.

U: Výpočet úsečky d sa dá zvládnuť aj využitím ***Euklidovej vety o odvesne*** v ***pravouhlom trojuholníku*** STB. Odvesnou je úsečka r, preponou vzdialenosť d a úsekom priľahlým odvesne úsečka SO. Preto platí

$$|ST|^2 = |SB| \cdot |SO|.$$

Toto vyjadrenie je aj pri podobnosti trojuholníkov. Výhodou riešenia pomocou Euklidovej vety je jeho skrátenie. Nemusíš zdôvodňovať podobnosť trojuholníkov.

Príklad 7: *Z akej výšky vidí letec povrch Zeme s rozlohou* $63\ 700\pi\ \text{km}^2$*? Polomer zeme je* $r = 6\ 370\ \text{km}$.

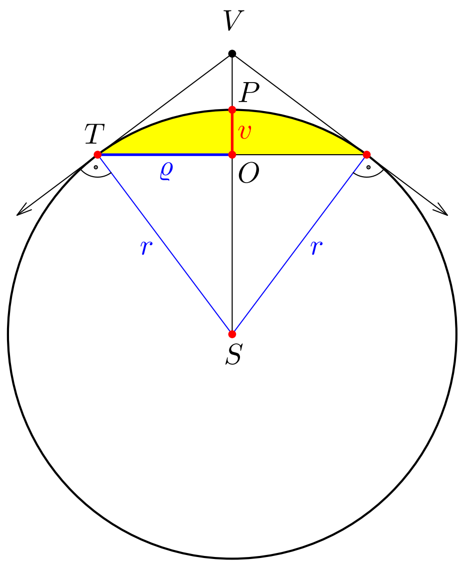
U: Máš predstavu akým geometrickým útvarom je časť povrchu Zeme, ktorú vidí letec?

Ž: *Mala by to byť bližšia časť povrchu Zeme.*

U: Ako by si ju ohraničil?

Ž: *V krajných polohách by to boli dotyčnice ku guli.*

U: Máš pravdu. Dotykové body všetkých takýchto dotyčníc vytvárajú kružnicu, ktorej polomer popisuje videnú plochu. Tušíš, čo to bude? Pozri na obrázok.



Ž: *Ak to má byť časť povrchu gule, tak mi napadá iba* **guľový vrchlík**.

U: V stredovom reze gule je úsečka OT polomerom podstavy guľového odseku, ktorého plášťom je spomenutý guľový vrchlík. Výškou vrchlíka je úsečka OP. Akú dĺžku má úsečka ST?

Ž: *Táto úsečka je polomerom gule, teda* $|ST| = 6\ 370\ \text{km}$.

U: Dobre. Poďme najskôr využiť rozlohu Zeme, ktorú vidí letec. Vzorec na výpočet ***obsahu guľového vrchlíka*** by nemal byť problém.

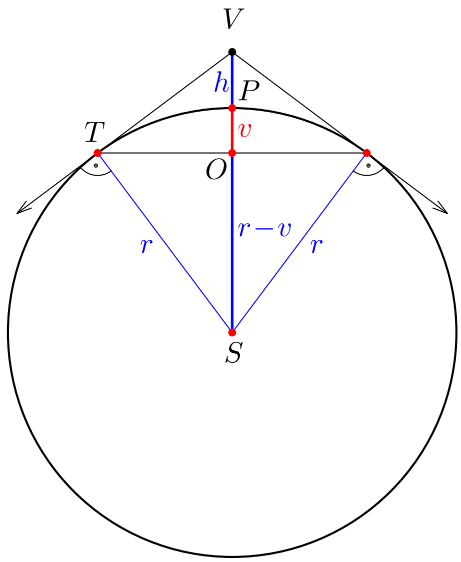
Ž: *Povrch guľového vrchlíka viem vyjadriť vzorcom* $S_{pl} = 2\pi rv$*, kde* v *je jeho výška. Pre výšku dostávam*

$$v = \frac{S_{pl}}{2\pi r}.$$

Po dosadení hodnoty za polomer mám

$$v = \frac{63\ 700\pi}{2\pi \cdot 6\ 370} = 5\ \text{km}.$$

U: Našou úlohou je vypočítať výšku, v akej je letec nad zemským povrchom. Vráťme sa teda naspäť k obrázku. Akú dĺžku má úsečka SO?



Ž: *To je jednoduché. Jej dĺžka je predsa rozdielom polomeru gule a výšky vrchlíka, teda*

$$|SO| = r - v = 6\ 370 - 5 = 6\ 365.$$

U: Označme dĺžku úsečky PV, ktorú máme vyjadriť, symbolom h. Jej veľkosť budeme poznať, ak určíme dĺžku úsečky SV.

Ž: *Máte pravdu. Od dĺžky úsečky SV potom odrátame polomer Zeme a dostaneme výšku h. Ako však vypočítame dĺžku úsečky SV? V obrázku vidím* **pravouhlý trojuholník** *STV. Použijeme Pytagorovu vetu?*

U: To by sme museli poznať dĺžku odvesny TV. V pravouhlých trojuholníkoch platia aj Euklidove vety. My využijeme ***Euklidovu vetu o odvesne***. Pamätáš sa na jej formuláciu?

Ž: *Nechcem vás sklamať, ale Euklidovu vetu mi budete musieť pripomenúť.*

U: Dá sa vyjadriť vzorcom

$$a^2 = c_a \cdot c,$$

kde a je odvesna pravouhlého trojuholníka, c je prepona a c_a označuje ***úsek prepony priľahlý k odvesne*** a. Pozri sa ešte raz pozorne na obrázok a potom zapíš Euklidovu vetu pre trojuholník STV.

Ž: *Odvesnou, ktorej dĺžku poznám, je úsečka ST. Je to polomer gule. Úsekom prepony priľahlým k tejto odvesne je úsečka SO dĺžky 6365 a úsečka SV je preponou tohto pravouhlého trojuholníka. Preto dostávam*

$$r^2 = |SO| \cdot |SV|.$$

Teraz to už nebude ťažké. Pre dĺžku úsečky SV mám

$$|SV| = \frac{r^2}{|SO|} = \frac{6\ 370^2}{6\ 365} = 6\ 374{,}9686.$$

U: Ako vysoko nad zemským povrchom je teda letec?

Ž: *Od výsledku, ktorý som dostal ako posledný odrátam polomer Zeme* $6\ 370\ \mathrm{km}$*. Letec je vo výške približne* **piatich kilometrov***.*