Využitie postupností

Mgr. Jana Králiková

U: Povieme si na čo je nám dobrá ***aritmetická*** a ***geometrická postupnosť***. Budeme hovoriť napríklad o rádioaktívnej premene, o množení baktérií, o geometrických úlohách, o voľnom páde, ďalej o prírastku a úbytku obyvateľstva, o opotrebovaní strojov, o finančnej matematike . . .

Ž: *To posledné ma zaujalo. Financie sú peniažky, však? Budeme ich prepočítavať? Vyrábať? Míňať?*

U: Musím ťa sklamať, nič z toho. Budeme len sledovať ako ti peniažky môžu pribúdať.

Ž: *Aj to je niečo. Dúfam, že budú pribúdať rýchlo.*

U: To sa ešte uvidí. Predstav si takúto situáciu. Za úspešnú maturitu ti tvoji príbuzní – rodičia, babky, tetky – dajú určitú finančnú odmenu. Spolu sa ti nazbiera hodnota a_0. Jej výšku nebudem konkretizovať. Túto sumu sa rozhodneš vložiť do niektorého peňažného ústavu, aby sa ďalej zhodnocovala.

Ž: *Myslíte, aby sa mi tam zväčšila, však?*

U: Áno. Ak by si si tie peniažky strčil doma do pančuchy, tak po čase z tej pančuchy vyberieš len toľko, koľko si do nej strčil.

Ž: *Len v tom lepšom prípade. Ak tú pančuchu totiž objaví môj mladší brat, tak v nej veľa neostane.*

U: Lenže ak peniaze uložíš v banke, tak ti za určité časové obdobie, počas ktorého bude banka disponovať s tvojimi peniažkami, dajú určitý finančný obnos. Hovorí sa tomu, že „peniaze robia peniaze“.

Ž: *Už rozumiem. Keď som sa narodil, rodičia mi založili vkladnú knižku. Ani neviem na aký úrok. Musím doma preveriť, ako sa mi tie peniažky zhodnotili.*

U: Použil si slovo úrok. Takže niečo o tom vieš. Upresníme si pojmy, ktoré budeme používať:

- ***istina*** - je ***finančná (peňažná) čiastka***, ktorú má klient v peňažnom ústave na svojom ***účte (konte)*** v istom okamihu. Ide buď o ***vložené čiastky – vklady***, keď klient je vkladateľom alebo o ***pôžičky – úvery***, keď klient je dlžníkom finančného ústavu.

- ***úrok*** - je ***čiastka***, ktorú by mal finančný ústav pripísať k istine na účet klienta (vkladateľa alebo dlžníka) po dohodnutom časovom období. V skutočnosti sa na účet klienta nepripisuje celý úrok, ale zdanený, pretože tieto úroky sa zdaňujú daňou z príjmu. Daň predstavuje v súčasnosti 19% z úroku.

Ž: *To je nespravodlivé.*

U: S tým nič nenarobíš. Dávaj pozor, vysvetlím ti ďalšie pojmy:

- ***úroková miera*** alebo tiež ***úroková sadzba*** je ***počet percent***. Udáva, koľko percent z istiny tvorí úrok.

- ***úrokovacie obdobie*** - je ***časové obdobie***. Najčastejšie je to rok, polrok, štvrťrok, mesiac . . . Po jeho uplynutí sa pripisuje úrok k istine.

Ž: *Teraz si uvedomujem, že keď som hovoril o vkladnej knižke na nejaký úrok, tak som to nepovedal správne. Mal som povedať, že mám vkladnú knižku s nejakou úrokovou mierou.*

U: Áno. Ľudia si to dosť pletú. Správne je teda – vkladná knižka s trojpercentnou úrokovou mierou za dané úrokovacie obdobie a nie – vkladná knižka s trojpercentným úrokom.

Ž: *Dobre teda. Dám svoju istinu a_0 do banky. Tam sa mi k nej budú pripočítavať úroky. Kedy budem bohatý?*

U: Musí ti byť jasné, že to záleží od výšky istiny, od výšky úrokovej miery, od dĺžky úrokovacej doby a aj od druhu úrokovania (úročenia).

Ž: *A to je zasa čo? Aké druhy úrokovania môžu byť?*

U: Môže ísť o ***jednoduché úrokovanie*** alebo ***zložené úrokovanie***.

Ž: *Vysvetlíte mi to?*

U: Samozrejme. Nie je to ťažké:

- ***jednoduché úrokovanie*** - v ňom sa vypočítavajú ***úroky*** za celé úrokovacie obdobie ***z tej istej hodnoty istiny***. Jednoduché úrokovanie sa používa vtedy, ak úrokovacia doba je menšia alebo rovná úrokovaciemu obdobiu.

- ***zložené úrokovanie*** - v ňom sa za prvé úrokovacie obdobie vypočítajú úroky z počiatočnej istiny jednoduchým úrokovaním. Úrok sa pripíše k istine a v ďalšom úrokovacom období sa úročí už nová istina. Hovoríme, že sa započítavajú ***„úroky z úrokov“***. Zložené úrokovanie sa používa vtedy, ak úrokovacia doba je väčšia než jedno úrokovacie obdobie.

Ž: *Uf. Som z toho hotový. Všetko sa mi pletie. Možno dám prednosť tej punčoche.*

U: Tak ešte trošku vydrž. Vložil si svoju istinu a_0 do banky. Aktuálna úroková miera nech je $p\%$. Necháš tam peniažky uložené počas n úrokovacích období. Iste by si chcel vedieť, akú sumu budeš mať na účte po uplynutí tohto obdobia, ak sa ti vklad bude úročiť zloženým úrokovaním.

Ž: *Pravdaže, to predsa zaujíma každého, kto sa rozhodne uprednostniť banku pred pančuchou. Koľko to bude?*

U: Nech to bude a_n. Vyjadri, ako táto hodnota závisí od hodnôt a_0, p a n.

Ž: *Vôbec netuším ako to mám urobiť.*

U: Vyjadri si vzorcom, ako sa zmení istina po prvom úrokovacom období. Označ si túto hodnotu a_1. Podobne si vyjadri hodnotu istiny po skončení druhého úrokovacieho obdobia. To bude a_2. A tak ďalej. Snáď v tom nájdeš nejakú zákonitosť. Daň z príjmu teraz nemusíš brať do úvahy.

Ž: *Takže po prvom úrokovacom období sa mi k istine a_0 pripočíta veľkosť úroku. To je $p\%$ z a_0. Nová istina bude mať hodnotu:*

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100} \cdot a_0 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

U: Dobre. Po druhom úrokovacom období sa budú úroky počítať už z tejto novej istiny.

Ž: *Vyjadrím si, koľko mi to hodí.*

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

U: Vyjadri si hodnotu a_2 pomocou a_0.

Ž: *Dobre.*

$$a_2 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left[a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right] \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

$$a_2 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

U: Výborne. Rovnakým spôsobom vyjadri ešte veľkosť istiny po treťom úrokovacom období.

Ž: *Uhm.*

$$a_3 = a_2 + \frac{p}{100} \cdot a_2 = a_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left[a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2\right] \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$a_3 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

U: Vedel by si teraz rovno povedať všeobecný vzorec vyjadrujúci veľkosť istiny po uplynutí n úrokovacích období?

Ž: *Áno. Pekne vidieť, ako narastá mocnina zátvoiek. Takže veľkosť istiny a_0 sa po n úrokovacích období pri p-percentnom úročení zmení na hodnotu a_n, pričom:*

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

U: Do tohto vzorca dosadíš hodnotu svojej počiatočnej istiny, počet percent, ktorý ti banka ponúkne a počet období - napríklad rokov, počas ktorých chceš sporiť. A vypočítaš, koľko peňazí môžeš očakávať na konci.

Ž: *Ak dovtedy banka neskrachuje.*

U: To je riziko podnikania.

U: Vrátim sa späť k vzorcu, ktorý si odvodil. Predstav si, že namiesto peňazí budeš mať ľudí.

Ž: *Budem mať na vkladnej knižke človiečikov?*

U: Nie. Každý dobrý štát zaujíma, koľko obyvateľov mu pribúda alebo ubúda. Prírastok obyvateľstva môže byť spojený s vysokou pôrodnosťou alebo prisťahovaním sa cudzincov. A úbytok môže byť spôsobený nízkou pôrodnosťou, vysokou úmrtnosťou, odsťahovaním sa obyvateľov do iného štátu.

Ž: *Načo slúžia štátu tieto poznatky?*

U: Ak má štát tieto informácie, tak vie odhadnúť, či o pár rokov bude potrebovať otvárať nové škôlky a školy, alebo, či nejaké nebude musieť zrušiť pre nedostatok detí. Bude vedieť, či bude treba o 20 rokov stavať nové byty, ako dlho budeme musieť pracovať a kedy pôjdeme do dôchodku.

Ž: *Uf. Niečo o tom viem. Je nás stále menej. Ubúdame a vymierame. Ako mamuty.*

U: Teraz hovoríš o Európe. Tá naozaj starne. Ale je veľa krajín, kde zaznamenávajú vysoké ročné prírastky narodených detí. Ak teraz nebudeš myslieť len na našu krajinu, tak ľudí na celom svete je stále viac a viac.

Ž: *Ani to nie je radostná správa. Preľudníme sa, nebudeme mať čo jesť a vymrieme. Ako mamuty.*

U: Tak dosť už toho pesimizmu. V prípade, že na základe ***štatistického skúmania*** zistíš hodnotu ročného prírastku alebo úbytku obyvateľstva v danej krajine, môžeš odhadnúť počet ľudí v tejto krajine o niekoľko rokov. Ako to urobíš?

Ž: *Rovnako ako by to boli peniaze. Ak ten prírastok bude vyjadrený v percentách, tak to urobím ako keby som počítal peniaze na účte. Vzorcu je jedno, či vypočíta počet ľudí alebo sumu peniažkov alebo kopec zemiakov.*

U: Presne tak. A čo ak by v krajine bol pokles počtu obyvateľstva? Alebo by opotrebovaním klesala hodnota nejakého stroja? Ako by vyzeral vzorec v takomto prípade?

Ž: *Od vstupnej hodnoty sa teraz bude asi odpočítavať.*

Hodnota po 1. období bude: $a_1 = a_0 - \frac{p}{100} \cdot a_0 = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right).$

Hodnota po 2. období bude: $a_2 = a_1 - \frac{p}{100} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2.$

Jasné. Už to vidím. Vzorec pre úbytok bude podobný ako pre prírastok, len v ňom namiesto znamienka $+$ *bude znamienko* $-$. *Takto:*

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

U: Výborne. Ja to teraz zhrniem:

V prípade pravidelného prírastku o $p\%$ sa počiatočný číselný údaj a_0 zmení po uplynutí n-tého obdobia na údaj a_n takto:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

V prípade pravidelného poklesu o $p\%$ sa počiatočný číselný údaj a_0 zmení po uplynutí n-tého obdobia na údaj a_n takto:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Platnosť oboch týchto vzorcov sa dá dokázať pomocou matematickej indukcie.

Ž: *A budeme to dokazovať?*

U: Nič ti nebráni v tom, aby si si tieto vzorce iniciatívne a samostatne dokázal. Ale ešte chvíľočku vydrž. Oba tieto vzorce sa dajú vyjadriť v tvare:

$$a_n = a_0 \cdot q^n, \quad \text{kde} \quad q = 1 \pm \frac{p}{100}.$$

Tvar $a_n = a_0 \cdot q^n$ predstavuje vzorec, ktorý by si mal poznať.

Ž: *Podobá sa to na vzorec pre n-tý člen geometrickej postupnosti, ale tam je* **exponent** *o stupeň menší.*

U: Súhlasím. V geometrickej postupnosti je definičným oborom množina prirodzených čísel, ktorá začína číslom 1. Ale v našom prípade prvý člen postupnosti označujeme ako a_0 a nie a_1, lebo to už je hodnota po uplynutí jedného obdobia. Definičný obor je teraz množina $\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ž: *Ak si takto upravím definičný obor, tak naozaj pôjde o vzorec pre* ***n-tý člen geometrickej postupnosti****. A jeho platnosť sme už dokazovali, takže teraz nemusíme.*

U: Podľa tohto vzorca sa počítajú aj mnohé príklady z praxe. V ***jadrovej fyzike*** platí zákon rádioaktívnej premeny jadier rádionuklidov, počas ktorej sa uvoľňuje rádioaktívne žiarenie. Pomocou tohto zákona a vzorca pre n-tý člen geometrickej postupnosti ***archeológia*** vypočítava vek archeologických nálezov – kostí, jaskynných malieb, hlinených črepov . . .

Ž: *Jadrová fyzika - to musí byť asi dosť náročné. Ale to s tými kosťami - to znie zaujímavo.*

U: Tak spomeniem niečo z bližšej oblasti - v ***biológii*** a v ***medicíne*** sa sleduje rozmnožovanie živých buniek, napríklad baktérií. Ich počet po uplynutí nejakého času vieme tiež odhadnúť pomocou vzorca pre n-tý člen geometrickej postupnosti.

Ž: *To by ma celkom zaujímalo, ako rýchlo sa vo mne rozmnoží vírus chrípky.*

U: A spomeniem ešte ***ekonomiku*** - zväčšovanie alebo zmenšovanie produktivity výroby, amortizácia - teda pokles hodnoty nejakého zariadenia dôsledkom jeho opotrebovania, potom ***fyziku***, ***geológiu***, už spomínané ***finančníctvo*** . . . Všade tam nájdeš mnohé príklady na využitie postupností.
S niektorými z nich sa môžeš oboznámiť v riešených úlohách.

Príklad 1: *Určte, kedy dosiahneme väčší nárast finančného vkladu:*

a) za 5 rokov pri úrokovej miere 10% alebo za 10 rokov pri úrokovej miere 5%, ak v oboch prípadoch je úrokovacie obdobie 1 rok,

b) za 5 rokov pri štvrťročnom úrokovaní s úrokovou mierou 2% alebo pri polročnom úrokovaní s úrokovou mierou 4%?

U: ***a)*** Toto je klasický príklad z finančnej matematiky. Určite ťa zaujíma, či dosiahneš viac peňazí, ak budeš šetriť kratšie - s vyššou ***sadzbou***, alebo dlhšie – ale s nižšou sadzbou.

Ž: *To asi vždy záleží na veľkosti ponúkaných percent a na dĺžke sporenia, však?*

U: Samozrejme. Nás to bude zaujímať pre dané hodnoty ***úrokových mier*** a ***úrokovacích období***.

Ž: *V prvom príklade sa mi zdá, že to vyjde rovnako.*

U: To je smelý názor. Určite si to musíš prepočítať a potom sa uvidí.

Ž: *Tak dobre. Úrokovacie obdobie je jeden rok.*

U: Áno. ***Úrok*** sa bude pripisovať na konci každého uplynutého roku.

Ž: *Uhm. Vypočítam najprv ako sa mi zväčší vklad pri prvej ponuke:*

$a_0 = ?$
$p = 10\%$
$n = 5$
$a_5 = ?$

Vzorec pre výpočet pravidelného narastania nejakej hodnoty je:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

U: Áno. Môžeš do tohto vzorca dosadiť dané hodnoty a vypočítať nárast.

Ž: *Nemôžem. Nepoznám počiatočnú hodnotu vkladu. Neviem, čo mám dosadiť za* a_0*.*

U: Ak nepoznáš hodnotu vkladu, alebo ak ju nechceš prezradiť, tak pomocou vzorca vypočítaš koľkokrát sa ti táto vstupná hodnota zmení.

Ž: *Takže za* a_0 *nemusím dosadiť nič?*

U: Presne tak. Používaj naďalej označenie a_0.

Ž: *Dobre. Dosadím do vzorca a vypočítam, čo sa bude dať:*

$$a_5 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = a_0 \cdot 1,1^5 = a_0 \cdot 1,61\,051.$$

U: Dobre. Prvá ponuka ti zabezpečí zvýšenie vkladu približne 1,61-krát. Ako to bude v druhej ponuke?

Ž: *Zapíšem si, čo poznám:*

$a_0 = ?$
$p = 5\%$
$n = 10$
$a_{10} = ?$

Znova dosadím do vzorca pre nárast hodnoty:

$$a_{10} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = a_0 \cdot 1,05^{10} \doteq a_0 \cdot 1,62\,889.$$

Na porovnanie s prvou ponukou mi stačia aj prvé 2 *desatinné miesta.*

U: A ktorá ponuka je zaujímavejšia?

Ž: *V druhej ponuke mi vklad narastie približne* 1,63*-krát, čo je trošku výhodnejšie ako v prvej ponuke.* **Väčší nárast vkladu dosiahnem pri úrokovej miere 5% za 10 rokov.**

U: A teraz nechaj pracovať zdravý sedliacky rozum. Je skutočne druhá ponuka výhodnejšia?

Ž: *Ako to myslíte? Veď mi vyšlo, že nárast v druhej ponuke je väčší. Je to zle vypočítané?*

U: Nie, nie. Vypočítané je to správne. Vyšlo ti, že výhodnejšie je mať vklad uložený 10 rokov. Ale ak sa už rozhodneš čakať 10 rokov, čo keby si vzal prvú ponuku, po piatich rokoch vybral navýšený vklad a na ďalších 5 rokov ho znovu uložil? Ako by v takom prípade vzrástol vklad?

Ž: *Úloha by sa zmenila na celkom inú. Vklad by narastal počas desiatich rokov buď s úrokovou mierou* 10% *alebo s úrokovou mierou* 5%. *Tak to je jasné. Prvá ponuka je určite výhodnejšia.*

U: Je dobré porovnávať nárast (alebo pokles) vstupnej hodnoty za rovnaké časové obdobie. Ukážeme si to v nasledujúcom príklade.

Ž: **b)** *V druhom príklade mám štvrťročné a polročné úrokovacie obdobia. V oboch prípadoch je vklad uložený na* 5 *rokov.*

U: Áno. Teraz ťa bude zaujímať, či dostaneš viac peňazí, ak budú úročené s menšou sadzbou ale častejšie, alebo ak budú úročené s väčšou sadzbou, ale menej často.

Ž: *Najprv si rozoberiem prvú ponuku:*

$a_0 = ?$
$p = 2\%$
$n = 5$
$a_5 = ?$

U: Počkaj. Koľko je úrokovacích období počas piatich rokov?

Ž: *Predsa* 5.

U: Lenže v prvej možnosti sa úročí štvrťročne. To znamená, že počas jedného roku uplynú 4 úrokovacie obdobia.

Ž: *Aha. Za 5 rokov to bude 20 štvrťrokov. Teda 20 úrokovacích období. Takže ešte raz:*

$n = 20$
$a_{20} = ?$

$$a_{20} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = a_0 \cdot 1,02^{20} \doteq a_0 \cdot 1,48\,594$$

U: Dobre. Len dúfam, že takýto počet desatinných miest bude stačiť.

Ž: *Keby to bolo na porovnanie málo, tak dopočítam ďalšie. A teraz prepočítam tú druhú možnosť. Tam sa úročí polročne. Za 5 rokov bude 10 polrokov. Zapíšem, čo poznám a vrhnem sa na výpočet:*

$a_0 = ?$
$p = 4\%$
$n = 10$
$a_{10} = ?$

$$a_{10} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{10} = a_0 \cdot 1,04^{10} \doteq a_0 \cdot 1,48\,024$$

U: Ten rozdiel je minimálny, však?

Ž: *Áno, ale predsa len je tá prvá možnosť trošku zaujímavejšia.* **Väčší nárast vkladu bude pri štvrťročnom úrokovaní s úrokovou mierou 2%.**

U: Už len jednu poznámku na záver: obyčajne sa vo finančných ústavoch používa ročná úroková miera. Treba si dať pozor na to, či je ponúkaná úroková miera skutočne štvrťročná alebo je pri danej ročnej úrokovej miere len štvrťročné pripisovanie úrokov. To je veľký rozdiel.

Úloha :

Vypočítajte, kedy dôjde k väčšiemu nárastu počiatočného vkladu po uplynutí troch rokov: pri mesačnom úrokovaní s úrokovou mierou 1% alebo pri ročnom úrokovaní s úrokovou mierou 12,5%?

Výsledok:

Väčší nárast je pri mesačnom úrokovaní s úrokovou mierou 1%.

Príklad 2: *Firma si vzala úver vo výške* $3\,000\,000$ € *a zaviazala sa, že bude pravidelne splácať dohodnuté ročné úroky z úveru a konštantné splátky tak, aby pri* 10*-percentnom úročení splatila úver za* 10 *rokov. Aké veľké musia byť ročné splátky?*

U: Rozumieš zadaniu?

Ž: *Nie veľmi.*

U: Firma si od banky požičala peniaze. Za to, že jej banka poskytla túto hotovosť, musí firma platiť ***úrok*** z pôžičky aj pravidelné splátky z požičaných peňazí. Tým splatí svoj dlh voči banke. Banka poskytla peniaze na 10-percentnú ***sadzbu*** a firma ich chce splatiť do desiatich rokov.

Ž: *Teraz je to opačná situácia, ako keď mám na účte peniaze a banka mi platí úroky?*

U: Áno. Za to, že banka môže disponovať s tvojimi peniazmi ti pravidelne vypláca úroky, podľa nejakej dohodnutej sadzby. Ale teraz si nepožičal banke ty, ale banka tebe. Do desiatich rokov musíš peniaze vrátiť a ešte aj zaplatiť za požičanie. To sú tie úroky – čiastka zaplatená za požičanie.

Ž: *Netuším, ako to budem počítať, ale zapíšem si aspoň, čo poznám:*

úver ... 3 000 000 €
počet rokov ... 10
ročné úročenie ... 10%
ročná splátka ... x

U: Dobre. Postupne si vyjadríme, ako bude dlh narastať kvôli úrokom a klesať vďaka splátkam.

Na konci prvého roku banka pripísala k úveru úroky a dlh firmy voči banke vzrástol o 10%. Firma ale zaplatila prvú splátku, takže jej dlh sa zmenšil o hodnotu x. Skús to zapísať ako výraz a zjednoduš ho.

Ž: *Viem, že* 10% *z* 3 000 000 *je* $0,1 \cdot 3\,000\,000$, *takže:*

Po 1. roku bude firma dlhovať banke sumu:

$$3\,000\,000 + 0,1 \cdot 3\,000\,000 - x = 3\,000\,000 \cdot 1,1 - x.$$

Mám vyčísliť hodnotu súčinu?

U: Nie, nechaj ten výsledok v takomto tvare. Pokračujeme ďalej. Po druhom roku banka pripočítala k dlhu, ktorý je $3\,000\,000 \cdot 1,1 - x$, 10-percentný úrok z tejto sumy a odpočítala výšku konštantnej splátky, ktorú firma zaplatila na konci druhého roku. Zapíš, ako bude vyzerať dlh, na konci druhého roka.

Ž: *Dobre. Bude to:*

$$(3\,000\,000 \cdot 1,1 - x) + 0,1 \cdot (3\,000\,000 \cdot 1,1 - x) - x = (3\,000\,000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x.$$

Mám to nejak upraviť?

U: Odstráň zátvorku, ale súčiny nevyčísľuj.

Ž: **Po 2. roku bude firma dlhovať banke sumu:**

$$(3\,000\,000 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 3\,000\,000 \cdot 1,1^2 - 1,1 \cdot x - x.$$

U: Dobre. Ako bude dlh vyzerať po treťom roku už skús vyjadriť sám.

Ž: *Takže sumu* $3\,000\,000 \cdot 1,1^2 - 1,1 \cdot x - x$ *vynásobím s* $1,1$. *Tým zabezpečím, že sa mi k predchádzajúcemu dlhu pripočíta veľkosť úroku. Potom odpočítam* x *a tým zmenším dlh o ďalšiu splátku.*

Po 3. roku bude firma dlhovať banke sumu:

$$(3\,000\,000 \cdot 1,1^2 - 1,1 \cdot x - x) \cdot 1,1 - x = 3\,000\,000 \cdot 1,1^3 - 1,1^2 \cdot x - 1,1 \cdot x - x.$$

U: Áno. Všimni si, ako vyzerajú výrazy, ktoré predstavujú výšku dlhu na konci každého roku.

Ž: $a_0 = 3\,000\,000,$
$a_1 = 3\,000\,000 \cdot 1,1 - x,$
$a_2 = 3\,000\,000 \cdot 1,1^2 - 1,1 \cdot x - x,$
$a_3 = 3\,000\,000 \cdot 1,1^3 - 1,1^2 \cdot x - 1,1 \cdot x - x$

U: Vedel by si teraz napísať výraz predstavujúci veľkosť dlhu po n rokoch?

Ž: *Myslím, že áno. Skúsim:*

$$a_n = 3\,000\,000 \cdot 1,1^n - 1,1^{n-1} \cdot x - 1,1^{n-2} \cdot x - \ \ldots\ - 1,1^2 \cdot x - 1,1 \cdot x - x.$$

U: Správne. Platnosť tohto vzorca by sa dala dokázať ***matematickou indukciou***. Ako to bude vyzerať po 10-tich rokoch?

Ž: **Po 10. roku bude dlh firmy banke takýto:**

$$a_{10} = 3\,000\,000 \cdot 1,1^{10} - 1,1^9 \cdot x - 1,1^8 \cdot x - \ \ldots\ - 1,1^2 \cdot x - 1,1 \cdot x - x.$$

U: Dobre. Po desiatom roku má byť dlh splatený, takže tento výraz bude mať nulovú hodnotu.

Ž: *Naozaj. Po desiatich rokoch chce mať firma dlh splatený. Ak si poviem, že je dlh nulový, tak dostanem rovnicu, v ktorej nepoznám len veľkosť splátky* x.

U: Presne tak. Vypočítaš, na akú výšku majú byť nastavené ročné splátky, aby po uplynutí desiatich rokov dlh klesol na nulu. Pusť sa do toho.

Ž: *Takže zostavím rovnicu a na jej ľavej strane vyberiem* x *pred zátvorku. Súčin neznámej* x *a tej dlhej zátvorky prenesiem na druhú stranu rovnice. Rovnica a jej úpravy sú v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{array}{c} 3\,000\,000 \cdot 1,1^{10} - 1,1^9 \cdot x - 1,1^8 \cdot x - \ \ldots\ - 1,1^2 \cdot x - 1,1 \cdot x - x = 0 \\ 3\,000\,000 \cdot 1,1^{10} - x \cdot (1,1^9 + 1,1^8 + \ \ldots\ + 1,1^2 + 1,1 + 1) = 0 \\ 3\,000\,000 \cdot 1,1^{10} = x \cdot (1,1^9 + 1,1^8 + \ \ldots\ + 1,1^2 + 1,1 + 1) \end{array}}$$

Vyčíslim si hodnoty mocnín na ľavej aj pravej strane rovnice.

U: Počkaj, nerob to. Pozri sa, ako vyzerá pravá strana.

Ž: *Je tam súčet desiatich rôznych mocnín čísla* $1,1$. *Od nultej mocniny po deviatu.*

U: A nepripomína ti to nič?

Ž: *Mal by som tam vidieť nejakú postupnosť?*

U: Áno. Čo takto ***geometrickú postupnosť***, ktorej ***kvocient*** je $1,1$ a prvý člen je 1?

Ž: *Aha a v zátvorke je súčet jej prvých desiatich členov. Súčet vypočítam podľa vzorca*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

U: Súhlasím, len si musíš uvedomiť, že a_1 teraz predstavuje prvý člen tejto geometrickej postupnosti a nie veľkosť dlhu po prvom roku, lebo to máš označené tým istým písmenkom.

Ž: *Nebojte sa, nepopletiem to. Vypočítam súčet v zátvorke rovnice:*

$$s_{10} = 1 \cdot \frac{1,1^{10} - 1}{1,1 - 1} = 1 \cdot \frac{1,1^{10} - 1}{0,1} \doteq 15,93\,742\,46$$

U: Dobre a teraz sa môžeš vrátiť k riešeniu rovnice. Jej pravú stranu už máš vyčíslenú.

Ž: *Za súčet mocnín v zátvorke teda dosadím hodnotu $15,93\,742\,46$ a vypočítam neznámu x:*

$$\boxed{\begin{gathered} 3\,000\,000 \cdot 1,1^{10} = x \cdot (1,1^9 + 1,1^8 + \;\ldots\; + 1,1^2 + 1,1 + 1) \\ 3\,000\,000 \cdot 1,1^{10} = x \cdot 15,93\,742\,46 \\ x \doteq 488\,236,1847 \end{gathered}}$$

U: Výborne. Môžeš formulovať záver príkladu.

Ž: **Aby firma splatila požičané $3\,000\,000$ e musí po dobu desiatich rokoch splácať $488\,236$ e ročne.**
Vychádza mi z toho, že človek musí byť poriadne bohatý, ak si chce požičať peniaze.

U: Tak akosi. Vypočítaj ešte akú veľkú sumu firma banke zaplatí.

Ž: *Každý rok splatí $488\,236,1847$ e, takže za 10 rokov vyplatí banke spolu*

$$488\,236,1847 \cdot 10 = 4\,882\,361,847.$$

Páni. Firma si požičia 3 milióny a zaplatiť musí takmer 5. To je sila.

U: Treba dúfať, že aktivity firmy jej umožnia splácať takýto dlh. Ďalšia úloha bude pre tvoju samostatnú prácu.

Úloha :

Firma si vzala úver vo výške $2\,000\,000$ e a zaviazala sa, že bude pravidelne splácať dohodnuté ročné úroky z úveru a konštantné splátky tak, aby pri 11-percentnom úročení splatila úver za 8 rokov. Aké veľké musia byť ročné splátky?

Výsledok:

Ročné splátky musia byť $388\,642$ e.

Príklad 3: *Stroj stráca opotrebovaním každý rok $p\%$ svojej ceny z predchádzajúceho roku. Za aký čas klesne začiatočná cena stroja na polovicu?*

U: V tomto príklade sa budeme zaoberať ***amortizáciou***, teda poklesom hodnoty nejakej veci dôsledkom jej opotrebovávania.

Ž: *Je mi jasné, že ak sa niečo používa, ničí sa to a potom to už nemôže stáť toľko ako na začiatku.*

U: Presne tak. A my máme sledovať, ako tá hodnota postupne klesá až na polovicu.

Ž: *Konkrétne čísla nebudú?*

U: Nie. Je daný len počet percent - parametrom p.

Ž: *Tak si aspoň označím, čo všetko sa v zadaní vyskytlo:*

začiatočná cena stroja ... x
konečná cena stroja ... y
opotrebovanie ... $p\%$
počet rokov opotrebovávania ... n

U: Cena stroja bude každým rokom klesať. Bude teda závisieť od uplynutého času – v našom prípade od rokov. Možno by bolo dobré použiť na označenie začiatočnej a konečnej ceny také premenné, aby vyjadrovali závislosť na čase.

Ž: *Cena bude funkciou času?*

U: Áno a keďže čas teraz predstavuje počet rokov, čo je prirodzené číslo, tak cena bude členom postupnosti.

Ž: *Dobre. Namiesto x a y použijem označenie pre postupnosti a_1 a a_n.*

U: Vhodnejšie bude a_0 a a_n. Označenie a_1 si nechaj pre cenu po prvom roku.

Ž: *Aha. Jasné.*

U: Vieš, ktorý vzorec použiješ na výpočet alebo si ho najprv odvodíš?

Ž: *Skúsim ho odvodiť. Možno si v priebehu odvodzovania spomeniem na jeho presný tvar.*

U: Tak dobre. Najprv vyjadri cenu stroja po prvom roku.

Ž: *Po prvom roku klesne kúpna cena a_0 o $p\%$. To znamená, že od a_0 budem odpočítavať $\frac{p}{100}$ z a_0. Takto:*

$$a_1 = a_0 - \frac{p}{100} \cdot a_0 = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

U: Dobre. Teraz vyjadri cenu po druhom roku.

Ž: *Cenu stroja po druhom roku dostanem tak, že znížim cenu po prvom roku o $p\%$:*

$$a_2 = a_1 - \frac{p}{100} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2.$$

Už som si spomenul na presný tvar vzorca. Cena stroja po n rokoch sa bude dať vyjadriť vzorcom:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

U: Áno, tento vzorec naozaj vyjadruje ako sa začiatočný číselný údaj a_0 zmení po uplynutí n-tého obdobia na údaj a_n pri pravidelnom poklese o p%. Teraz keď sme sa už dohodli na vzorci by si mohol príklad aj vyriešiť.

Ž: *Lenže ja mám v tom vzorci príliš veľa neznámych: vypočítať mám n, ale nepoznám ani a_0 ani a_n. A parameter p sa tiež netvári príliš konkrétne.*

U: S parametrom p budeš pracovať ako s konkrétnou hodnotou. A medzi hodnotami a_0 a a_n je daný vzťah. Prečítaj si ešte raz zadanie.

Ž: *Začiatočná cena stroja má klesnúť na polovicu. Aha, takže*

$$a_n = \frac{a_0}{2}.$$

U: Správne, to by ti už malo postačovať na vyriešenie úlohy.

Ž: *Dosadím tento vzťah do vzorca pre pokles, vykrátim členy a_0 a dostanem rovnicu s parametrom p pre neznámu n:*

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \\ \frac{a_0}{2} &= a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \quad / : a_0 \\ 0{,}5 &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \end{aligned}}$$

A čo teraz?

U: Neznáma n je v exponente. Ak ju odtiaľ chceš získať, musíš rovnicu ***zlogarimovať***.

Ž: *Aha, tak pokračujem v riešení – zlogaritmujem obe strany rovnice, tým sa neznáma n dostane z exponentu. Aby som ju osamostatnil, tak musím vydeliť celú rovnicu logaritmom, ktorým je n vynásobené. Riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} 0{,}5 &= \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \quad / \log \\ \log 0{,}5 &= n \cdot \log\left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad / : \log\left(1 - \frac{p}{100}\right) \\ n &= \frac{\log 0{,}5}{\log\left(1 - \frac{p}{100}\right)} \end{aligned}}$$

A je to.

U: Správne. ***Začiatočná cena stroja klesne na polovicu o*** $\frac{\log 0{,}5}{\log\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$ ***rokov.***

Ž: *Tento výsledok mi nedáva veľmi jasnú predstavu o počte rokov.*

U: Ak ti chýbajú konkrétne hodnoty v zadaní, vyrieš si tento príklad pre $p = 20$%.

Ž: *Znenie príkladu bude teda: za ako dlho klesne cena stroja na polovicu, ak každoročne odpisujem 20%?*

U: Áno. Vyčísli to.

Ž: *Dosadím do výsledného vzorca hodnotu $p = 20$. Vezmem si do ruky kalkulačku a vyčíslim. Výpočet je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} n &= \frac{\log 0{,}5}{\log(1-\frac{p}{100})} \\ n &= \frac{\log 0{,}5}{\log(1-\frac{20}{100})} \\ n &= \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}8} \\ n &= 3,10628 \end{aligned}}$$

U: Výborne. Mám len jednu pripomienku. Premenná n vo vzorci označuje poradie člena geometrickej postupnosti.

Ž: *Takže by to malo byť prirodzené číslo.*

U: Áno, ale postupnosť je predsa špeciálny typ funkcie, ktorej definičný obor sú reálne čísla. Ak si to slovná úloha vyžaduje, môžeš zaokrúhliť, $n \doteq 3$. Ak nie, môžeš uvažovať aj o hodnote $n = 3,10628$, ktorá je v definičnom obore funkcie.

Ž: *Dobre.* **Cena stroja klesne na polovicu za približne 3 roky.**

U: Vyrieš si aj nasledujúce úlohy.

Úloha 1:

Začiatočná cena stroja je 15 000 €. Každoročne sa z jeho ceny odpisuje 5% kvôli opotrebeniu. Akú hodnotu bude mať stroj po štyroch rokoch?

Výsledok:

Po štyroch rokoch bude cena stroja 12 218 €.

Úloha 2:

Cena stroja po 12-tich rokoch klesla v dôsledku opotrebovania o 90% kúpnej ceny. Koľko percent ceny stroja z predchádzajúceho roku sa musí každoročne odpisovať, ak cena sa znižuje každý rok o konštantný počet percent?

Výsledok:

Každoročne sa muselo odpisovať približne 17,5% ceny stroja z predchádzajúceho roku. (Návod: a_{12} je 10% z a_0, teda $a_{12} = 0{,}1 \cdot a_0$.)

Príklad 4: *Na začiatku roka 2008 žilo v meste 34 162 obyvateľov. Koľko sa v ňom dá očakávať obyvateľov na začiatku roka 2013, ak sa každoročný prírastok obyvateľstva odhaduje približne na 1, 4%? O koľko % stúpne v meste za tento čas počet obyvateľov?*

Ž: *Myslím, že toto je celkom ľahký príklad, idem rovno na vzorec.*

U: Vysvetli mi najprv, aký vzorec máš na mysli a prečo ho použiješ.

Ž: *Viem, že ak sa nejaká hodnota pravidelne zvyšuje o určitý počet percent, tak vzorec na výpočet jej nárastu za n období je:*

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

U: Dobre, zapíš si, čo máš v úlohe dané.

Ž: *začiatočný počet obyvateľov* ... $a_0 = 34\,162$
ročný prírastok obyvateľov ... $p = 1,4\%$
počet rokov ... $n = 2013 - 2008 = 5$ *rokov*
konečný počet obyvateľov ... $a_5 = ?$

U: V poriadku, môžeš dosadzovať do vzorca.

Ž: *To bude jednoduché. Dosadím a kalkulačkou vyčíslim:*

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ a_5 = 34\,162 \cdot \left(1 + \frac{1,4}{100}\right)^5 \\ a_5 = 34\,162 \cdot (1,014)^5 \\ a_5 \doteq 36\,621,24\,151 \end{gathered}}$$

Očakáva sa, že na začiatku roku 2013 bude mať mesto asi 36 621 obyvateľov.

U: Výborne. V takomto type príkladu je možné zaokrúhľovať aj na stovky. Ostala ti druhá časť úlohy. O koľko % stúpne za tých 5 rokov počet obyvateľov v danom meste?

Ž: *Ak uplynulo 5 rokov a každý rok sa zvýšil počet ľudí o 1, 4%, tak celkový prírastok bude* $5 \cdot 1,4\% = 7\%$.

U: Tak si to skúsime prepočítať. Počiatočná hodnota a_0 bude predstavovať 100%. Máš z jednoduchej úlohy na percentá vypočítať koľko percent predstavuje konečná hodnota a_5.

Ž: *Malo by mi vyjsť 107%.*

34 162 *obyvateľov* ... 100%
36 621, 24 151 *obyvateľov* ... $x\%$

U: O aký typ úmery ide?

Ž: *Je to priama úmera, takže môžem napísať:*

$$x \;:\; 100 = 36\,621,24\,151 \;:\; 34\,162$$
$$x = \frac{36\,621,24\,151}{34\,162} \cdot 100$$
$$x \doteq 107,19\,876$$

Keď to zaokrúhlim, vyjde presne tých 107%. *Takže som mal pravdu, nie?*

U: Musím ťa zarmútiť, ale nemal. V tomto príklade sú ročné prírastky malé, ten rozdiel nie je taký viditeľný. Ale pouvažuj so mnou. Keby si každý rok vypočítal 1,4% ***z pôvodnej hodnoty*** a_0, dostal by si, že a_5 ***je*** 107% *z* a_0. Ale ty predsa počítaš 1,4% ***z predchádzajúcej hodnoty*** a to dá takmer 107,2% *z* a_0. Rozdiel je teraz síce zanedbateľný, ale je to predsa len iná hodnota.

Ž: *Už mi je to jasné. Obyvateľov som rátal podľa vzorca pre pravidelný prírastok a pri samotných percentách som na to pozabudol. A je v tom rozdiel. Ako keby som mal* **zložené** *a* **jednoduché úrokovanie**.

U: Presne tak. Dúfam, že nabudúce si už dáš pozor.

Úloha :

Počet obyvateľov v danom meste vzrástol za 10 *rokov z* 25 000 *na* 33 600.

a) Aký bol konštantný ročný prírastok obyvateľstva v percentách?

b) Aký bol celkový prírastok obyvateľstva v percentách za uplynulých 10 *rokov?*

Výsledok:

a) 3%,

b) 34,4%.

Príklad 5: *Tlak vzduchu klesá s rastúcou nadmorskou výškou približne o* $1,2\%$ *na každých* 100 *metrov, pričom na morskej hladine sa predpokladá tzv. normálny atmosferický tlak* $1\,013,24$ *hPa. Vypočítajte:*

a) o koľko percent klesne tlak vzduchu oproti normálnemu atmosferickému tlaku, ak vystúpime do nadmorskej výšky $1\,000$ *m,*

b) tlak vzduchu na vrchole Lomnického štítu v nadmorskej výške $2\,634$ *m.*

Ž: *A som nahratý. Pôjde asi o nejakú fyziku a tú ja nemám rád. Ako mám vypočítať príklad, keď v ňom takmer ničomu nerozumiem?*

U: Začneme tým, čomu rozumieš.

Ž: *Rozumiem len tomu, že vrchol Lomničáku je vo výške* $2\,634$ *metrov nad morom a morská hladina je vo výške* 0 *metrov.*

U: Dobre. S tlakom je to tak, že za základný sa považuje tlak na morskej hladine, čím nižšie - tým je tlak väčší, čím vyššie - tým je tlak menší. Tlak sa mení aj pri zmene teploty, ale to teraz nebudeme brať do úvahy.

Ž: *Z fyziky ešte viem, že tlak sa meria v Pascaloch, ale čo je to hPa?*

U: A vieš, čo je to ***ha*** alebo ***hl***?

Ž: *Jasné. Znamená to hektár a hektoliter. Aha, takže* **hPa** *bude hektoPascal, jednotka* 100*-krát väčšia než Pascal.*

U: Správne. Poznáš teda počiatočnú hodnotu tlaku a vieš, že sa bude pravidelne zmenšovať, každých 100 metrov o $1,2\%$ predchádzajúcej hodnoty. Ďalej by to už nemal byť problém.

Ž: *Použil by som vzorec pre pravidelný pokles – úbytok nejakej vstupnej hodnoty:*

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n .$$

U: Vzorec je dobrý, ale daj si pozor na pomenovanie premenných. Vo vzorci máš písmenkom p označený počet percent, ale vo fyzikálnom príklade sa tak označuje tlak.

Ž: **a)** *Najprv teda pomocou tohto vzorca vypočítam aký bude tlak vo výške* $1\,000$ *metrov nad morom. Zapíšem si úlohu:*

normálna hodnota tlaku ... $p_0 = 1\,013,24$ *hPa*
pravidelný úbytok tlaku ... $p = 1,2\%$
počet zmien tlaku ... $n = 1\,000 : 100 = 10$
tlak vo výške $1\,000$ *m* ... $p_{10} = ?$

U: Dobre. Zápis je správny.

Ž: *Takže môžem dosadzovať do vzorca:*

$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= p_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \\ p_{10} &= 1\,013,24 \cdot \left(1 - \frac{1,2}{100}\right)^{10} \doteq 898 \end{aligned}}$$

Tlak vo výške $1\,000$ metrov je približne 898 hPa.

U: A teraz vypočítaj o koľko percent klesol atmosferický tlak zo svojej normálnej hodnoty na hodnotu 898 hPa.

Ž: $1\,013,24\ hPa\ \ldots\ 100\%$
$898\ hPa\ \ldots\ x\%$
Ide o priamu úmeru, takže platí, že v akom pomere sú počty percent, tak v takom pomere sú aj hodnoty atmosferických tlakov. Zapíšem rovnosť pomerov a vypočítam hodnotu neznámej x:

$$x : 100 = 898 : 1\,013,24$$

$$x = \frac{898}{1\,013,24} \cdot 100$$

$$x \doteq 88,63$$

$$100\% - 88,63\% = 11,37\%$$

Tlak vo výške 1000 m nad morom klesne oproti normálnej hodnote o $11,37\%$.

Ž: b) *A teraz druhá časť príkladu. Opäť si najprv zapíšem úlohu:*

normálna hodnota tlaku $\ldots\ p_0 = 1\,013,24\ hPa$
pravidelný úbytok tlaku $\ldots\ p = 1,2\%$
počet zmien tlaku $\ldots\ n = 2\,634 : 100 = 26,34$
tlak na Lomničáku $\ldots\ p_n = ?$

U: Vzorec, ktorý použijeme je vlastne vzorec pre n-tý člen geometrickej postupnosti s prvým členom a_0, v tvojom prípade p_0, a s kvocientom $q = 1 - \frac{p}{100}$. Premenná n vo vzorci označuje poradie člena geometrickej postupnosti.

Ž: *Takže by to malo byť prirodzené číslo. Mám hodnotu $n = 26,34$ zaokrúhliť a vypočítať p_{26}?*

U: Nie. V tomto príklade to nebude nutné. Tlak sa nemení skokovite, ale plynule. Postupnosť je predsa špeciálny typ funkcie, takže môžeš počítať aj s hodnotou $n = 26,34$, ktorá je v definičnom obore funkcie. Ak teda máš dobrú kalkulačku, ktorá to za teba vypočíta.

Ž: *Jasné. Takže použijem vzorec, dosadím doň a vyčíslim:*

$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= p_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \\ p_{26,34} &= 1\,013,24 \cdot \left(1 - \frac{1,2}{100}\right)^{26,34} \doteq 737 \end{aligned}}$$

Tlak na vrchole Lomnického štítu je približne 737 hPa.

U: Výborne. Na to, ako si na začiatku ničomu nerozumel, si tento príklad zvládol veľmi dobre. Už len pripomeniem, že v príklade b) sme ***rozšírením definičného oboru geometrickej postupnosti z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$ dostali exponenciálnu funkciu. Keďže postupnosť je špeciálny prípad funkcie, vzťahy platné pre geometrickú postupnosť platia samozrejme aj pre túto funkciu.***

Úloha :

Na koľko percent pôvodného tlaku klesne tlak pod recipientom vývevy po 50 *zdvihoch piestu, ak pri každom zdvihu piestu klesne tlak o* 4%*?*

Výsledok:

Tlak klesne približne na 13% *pôvodného tlaku.*

Príklad 6: *Baktérie sa množia delením na polovicu tak, že za priaznivých podmienok dochádza k tomuto deleniu vždy raz za pol hodinu. Koľko baktérií vznikne z jednej baktérie za* 10 *hodín?*

U: Tak ako by si riešil túto úlohu?

Ž: *Postupne by som si vypočítaval ako narastá počet baktérií a časom by som snáď došiel k výsledku.*

U: Skús to. Možno o chvíľu prídeš aj na menej zdĺhavé riešenie.

Ž: *Na začiatku mám jednu baktériu. Za pol hodiny vzniknú delením z jednej baktérie dve baktérie. Takže už mám dve. Prejde ďalšia pol hodina. Každá z tých dvoch sa mi rozdelí na dve. Už mám štyri. Z týchto štyroch sa po ďalšej polhodine vytvorí osem baktérií:*

$$1 \xrightarrow{\frac{1}{2}hod.} 2 \xrightarrow{\frac{1}{2}hod.} 4 \xrightarrow{\frac{1}{2}hod.} 8 \quad \ldots$$

Koľko polhodín zatiaľ uplynulo?

U: Tri. A myslím, že je najvyšší čas, aby si porozmýšľal nad nejakým iným spôsobom riešenia.

Ž: *Už som skoro na konci. Už len zopár polhodín a mám výsledok.*

U: Počúvaj. Po každej polhodine sa počet baktérií zdvojnásobí – je dvakrát väčší než predchádzajúci počet. Nepripomína ti to nič?

Ž: *Iba ak* **geometrickú postupnosť**.

U: A to je presne to, čo máš využiť. Geometrickú postupnosť s prvým členom $a_0 = 1$. To je tá naša jedna baktéria na začiatku. Kvocient q má hodnotu 2, lebo každý ďalší počet baktérií je dvakrát väčší než predchádzajúci. Aký je vzorec pre výpočet n-tého člena geometrickej postupnosti?

Ž: *Vzorec má tvar:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: To je v prípade, keď prvý člen je a_1. Teraz je výhodnejšie pomenovať prvý člen ako a_0.

Ž: *Prečo?*

U: Pretože takto bude premenná n priamo označovať počet prebehnutých delení a teda aj počet uplynutých časových jednotiek:

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Ž: *Časová jednotka je teraz polhodina?*

U: Áno.

Ž: *Desať hodín je dvadsať polhodín. Mám teda vypočítať dvadsiaty člen tejto postupnosti:*

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

$$a_{20} = 1 \cdot 2^{20}$$

$$a_{20} = 1\,048\,576$$

Za 10 **hodín vznikne z jednej baktérie** 1 048 576 **baktérií.**

U: Správne. Uznaj, že postupným vypočítavaním by ti to zabralo oveľa viac času. Ďalšia úloha je už na tvoju samostatnú prácu.

Úloha :

Na prvé políčko šachovnice položíme jedno euro. Na druhé políčko položíme dve eurá. Na každé ďalšie políčko položíme dvojnásobok predchádzajúcej sumy.
a) Akú sumu budeme musieť položiť na posledné políčko šachovnice?
b) Akú sumu potrebujeme na pokrytie celej šachovnice?

Výsledok:

a) $2^{63} \doteq 9,22\,337 \cdot 10^{18} \doteq 10^{19}$ e.
b) $2^{64} - 1 \doteq 1,84\,467 \cdot 10^{19} \doteq 2 \cdot 10^{19}$ e.

Príklad 7: *Koľkokrát udrie palička hodinového stroja počas dvanástich hodín – od polnoci do poludnia, ak okrem celých hodín bije aj všetky štvrťhodiny? (Štvrťhodiny bije nasledovne: prvú štvrť jedným úderom, druhú štvrť dvoma, tretiu štvrť troma a štvrú štvrť štyrmi údermi. Celé hodiny bije potom iným typom úderu tak, že padne toľko úderov, koľko je hodín.)*

Ž: *Zdá sa mi to pekná úloha. Čísla nie sú veľké, to spočítam aj ručne.*

U: Máš pravdu, ale ja by som bol predsa len rád, keby si využil nejaký šikovnejší postup.

Ž: *Rozoberiem si úlohu, možno na niečo prídem.*

- *Stroj bije každú štvrťhodinu. Počas každej hodiny bude biť* $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ *takých úderov, ktoré znamenajú štvrťhodinky.*
- *Okrem toho bije aj celé hodiny. Počas dvanástich hodín bude biť* $1+2+3+4+\cdots+11+12$ *úderov.*

U: A presne tento výpočet ma zaujíma.

Ž: *Mám spočítať prvých* 12 *prirodzených čísel. Mohol by som vziať do ruky kalkulačku a jednoducho to tam nahádzať, ale vy to asi chcete inak.*

U: Správna úvaha. Máš vypočítať súčet čísel, z ktorých každé je o 1 väčšie ako predchádzajúce. Ako to urobíš?

Ž: **Aritmetická postupnosť**! *Vypočítam súčet jej prvých dvanástich členov. Ak si spočítam prvé číslo s posledným a druhé s predposledným a tretie s predpredposledným, dostanem vždy rovnaký súčet* 13. *Takýchto súčtov budem mať toľko, koľko je členov v postupnosti, teda* 12. *Ale každý súčet je započítaný dvakrát – napríklad prvé číslo s posledným, ale aj posledné s prvým. Dostanem:*

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78.$$

Čiže počet úderov na celé hodiny bude spolu 78.

U: Dobre. Vzorec, ktorý si popísal a použil má tvar:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2},$$

kde s_n je súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti s prvým členom a_1 a posledným uvažovaným členom a_n.

Ž: *Teraz to už len dám dohromady. Počet štvrťhodinových úderov počas jednej hodiny je* 10, *teda počas dvanástich hodín to bude*

$$12 \cdot 10 = 120.$$

K tomu pridám počet úderov na celé hodiny a dostanem:

$$120 + 78 = 198.$$

V časovom intervale od polnoci do poludnia udrie palička hodinového stroja spolu 198-krát.

U: Správne.

Úloha :

Koľkokrát zakuká kukučka v hodinách počas 24 *hodín, ak okrem celých hodín kuká aj všetky polhodiny? (Kukučka je nastavená tak, aby na celú hodinu zakukala len toľkokrát, koľko je hodín a na polhodinu zakuká len raz. Kukučkové hodiny majú* 12*-hodinový cyklus.)*

Výsledok*:*

Počas 24 *hodín kukučka zakuká* 180*-krát.*

Príklad 8: *Dráha s telesa pri voľnom páde za čas t je vyjadrená vzorcom $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, kde g je tiažové zrýchlenie. Ukážte, že číselné hodnoty dráh telesa v jednotlivých po sebe nasledujúcich časových jednotkách (napríklad sekundách) tvoria konečnú aritmetickú postupnosť.*

U: A máme tu krásny príklad na využitie postupností vo fyzike. Voľný pád je rovnomerne zrýchlený pohyb a ty máš dokázať, že dráhy v jednotlivých časových jednotkách, ktoré padajúce teleso prekoná, sú členmi ***aritmetickej postupnosti***.

Ž: *Tak ja by som si najprv vyjadril niekoľko takých dráh a potom uvidím.*

U: Dobre. Tiažové zrýchlenie má hodnotu $g \doteq 9{,}81\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, ale nemusíš s ňou pracovať. Stačí, ak budeš používať parameter g. Vzorec pre výpočet dráhy padajúceho telesa je

$$s = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Ž: *Vyjadrím teda dráhy telesa pre jednotlivé hodnoty času podľa daného vzorca:*

pre $t = 1 \quad \ldots \quad s_1 = \frac{g}{2} \cdot 1^2 = \frac{g}{2},$

pre $t = 2 \quad \ldots \quad s_2 = \frac{g}{2} \cdot 2^2 = \frac{g}{2} \cdot 4,$

pre $t = 3 \quad \ldots \quad s_3 = \frac{g}{2} \cdot 3^2 = \frac{g}{2} \cdot 9,$

pre $t = 4 \quad \ldots \quad s_4 = \frac{g}{2} \cdot 4^2 = \frac{g}{2} \cdot 16, \ldots$

No neviem, mne to veľmi ako členy aritmetickej postupnosti nepripadá.

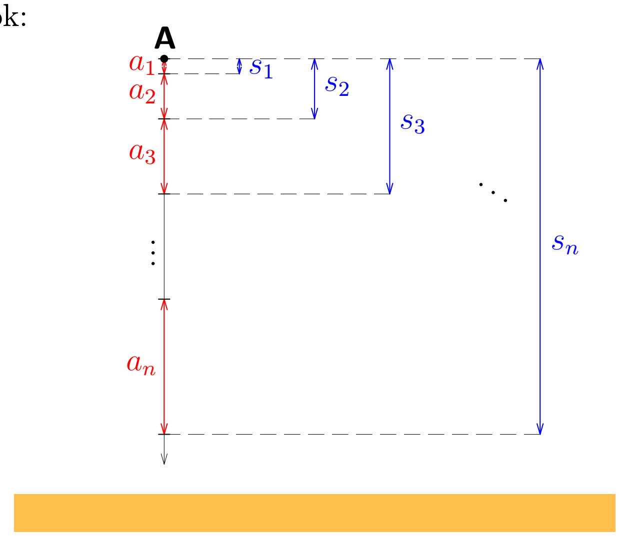
U: Pretože to nie sú tie členy, ktoré budeš potrebovať.

Ž: *Nie? Tak čo som vlastne vypočítal? A čo potrebujem vypočítať?*

U: Dráhy označené ako s_1, s_2, s_3, s_4, $\ldots$ sú dráhy merané vždy od bodu A, v ktorom teleso začne voľný pád, až po bod, v ktorom sa teleso nachádza po uplynutí konkrétneho čaasu t. Ty máš ale vyjadriť dráhy v jednotlivých časoch. Sú to len úseky tej celej dráhy. Označme si ich napríklad a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$

Ž: *Čiže napríklad a_3 bude dráha, po ktorej teleso padá počas plynutia tretej sekundy?*

U: Áno. Pozri si náčrtok:



Ž: *Aha. Z náčrtku vidím, že:*

– *úsek* a_1 *je ten istý ako dráha* s_1,

– *úsek* a_2 *dostanem tak, že od dráhy* s_2 *odpočítam dráhu* s_1,

– *úsek* a_3 *dostanem tak, že od dráhy* s_3 *odpočítam dráhu* s_2,

$\vdots$

– *úsek* a_n *dostanem tak, že od dráhy* s_n *odpočítam dráhu* s_{n-1}.

U: Výborne. Úsek a_n označuje tú časť celkovej dráhy, ktorú padajúce teleso prešlo, alebo lepšie povedané – spadlo, počas plynutia času $t = n$. Teraz to už len vyjadri.

Ž: *Dobre. Pomôžem si dráhami* s_1, s_2, s_3, s_4, $\ldots$, *ktoré už mám vyjadrené:*

pre $t = 1 \quad \ldots \quad a_1 = s_1 = \dfrac{g}{2}$,

pre $t = 2 \quad \ldots \quad a_2 = s_2 - s_1 = \dfrac{g}{2} \cdot 4 - \dfrac{g}{2} = \dfrac{g}{2} \cdot 3$,

pre $t = 3 \quad \ldots \quad a_3 = s_3 - s_2 = \dfrac{g}{2} \cdot 9 - \dfrac{g}{2} \cdot 4 = \dfrac{g}{2} \cdot 5$,

pre $t = 4 \quad \ldots \quad a_4 = s_4 - s_3 = \dfrac{g}{2} \cdot 16 - \dfrac{g}{2} \cdot 9 = \dfrac{g}{2} \cdot 7$,

pre $t = 5 \quad \ldots \quad a_5 = s_5 - s_4 = \dfrac{g}{2} \cdot 25 - \dfrac{g}{2} \cdot 16 = \dfrac{g}{2} \cdot 9$,

$\vdots$

pre $t = n \quad \ldots \quad a_n = s_n - s_{n-1} = \dfrac{g}{2} \cdot n^2 - \dfrac{g}{2} \cdot (n-1)^2 = \dfrac{g}{2} \cdot (n^2 - n^2 + 2n - 1) = \dfrac{g}{2} \cdot (2n - 1)$.

To by bolo.

U: Ešte nie. Máš ukázať, že hodnoty $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ a_n$, naozaj predstavujú členy aritmetickej postupnosti.

Ž: *Pripravím si predpisy pre členy* a_n *a* a_{n+1} *a zistím, či je rozdiel* $a_{n+1} - a_n$ *konštantný::*

$$a_n = \frac{g}{2} \cdot (2n - 1)\ ,$$

$$a_{n+1} = \frac{g}{2} \cdot [2 \cdot (n+1) - 1] = \frac{g}{2} \cdot (2n + 1).$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{g}{2} \cdot (2n + 1) - \frac{g}{2} \cdot (2n - 1) = \frac{g}{2} \cdot (2n + 1 - 2n + 1) = \frac{g}{2} \cdot 2 = g.$$

U: Rozdiel ľubovoľných za sebou idúcich členov je konštantný, teda postupnosť je aritmetická. Aký je jej prvý člen a diferencia?

Ž: **Postupnosť veľkostí dráh padajúceho telesa v jednotlivých časových úsekoch je naozaj aritmetickou, s prvým členom** $a_1 = \dfrac{g}{2}$ **a diferenciou** $d = g$**.**

Úloha :

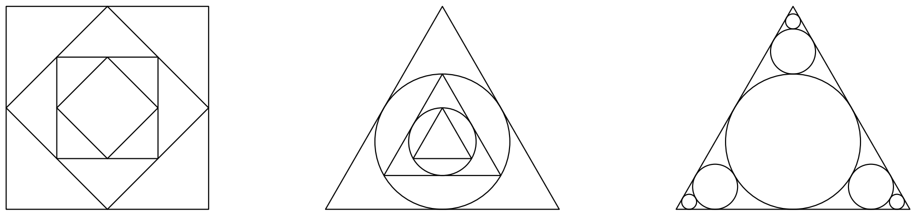
Teleso, ktoré sa pohybuje rovnomerne spomalene, prejde v prvej sekunde dráhu $c - \dfrac{a}{2}$ *a v každej ďalšej sekunde dráhu o* a *kratšiu než v predchádzajúcej sekunde. Akú dráhu prejde za* t *sekúnd, ak* a, c, t *sú reálne parametre?*

Výsledok:

Prejde dráhu $c \cdot t - \dfrac{a \cdot t^2}{2}$.

Príklad 9: *Daný je štvorec, ktorého strana má dĺžku a. Ak spojíte stredy jeho susedných strán, dostanete nový štvorec. Ak spojíte stredy susedných strán nového štvorca, dostanete opäť štvorec, atď. Aký veľký je obvod a obsah štvorca, ktorý vznikne desiatym delením?*

U: V geometrii sa môžeš stretnúť s postupnosťami geometrických útvarov, ktoré sú si navzájom podobné a vytvárajú rôzne ornamenty. Zopár ich môžeš vidieť aj na obrázku:



Obyčajne sú dané rozmery prvého útvaru a postup, ako získame ďalší útvar. Pomocou vzťahov z planimetrie a stereometrie máš vypočítať, ako závisia rozmery nových útvarov od rozmerov pôvodného útvaru a máš odhaliť akú postupnosť tieto rozmery predstavujú.

Ž: *Keďže sú to geometrické útvary, tak asi pôjde o geometrickú postupnosť.*

U: V mnohých príkladoch naozaj pôjde o geometrickú postupnosť, ale nie preto, že pracujeme s geometrickými útvarmi.

Ž: *Tie vpísané útvary sú zmenšeninou nejakého pôvodného útvaru. Sú napríklad dvakrát menšie, tak asi preto ide o geometrickú postupnsť.*

U: Áno. Keď poznáš rozmery prvého útvaru a poznáš vzťah, ktorým získame rozmery ďalšieho útvaru, môžeš vypočítať, aké rozmery bude mať útvar, ktorý je desiaty, dvadsiaty alebo stý v poradí. A pomocou rozmerov môžeš vypočítať obvody a obsahy alebo povrchy a objemy. Jednoducho rôzne charakteristiky.

Ž: *Ten prvý ornament na obrázku – to je vlastne náš príklad. Super, nemusím už kresliť náčrtok.*

U: Takže tvojou úlohou je pomocou veľkosti strany a odvodiť veľkosť strany menšieho štvorca. Označ si ju a_1.

Ž: *Strana menšieho štvorca je prepona pravouhlého trojuholníka – v rohu pôvodného štvorca – s odvesnami, ktoré majú veľkosť polovicu strany a.*

U: Aký vzťah použiješ na výpočet dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka, ak poznáš jeho odvesny?

Ž: *Použijem* **Pytagorovu vetu**:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

kde a, b sú odvesny a c je prepona pravouhlého trojuholníka.

U: A ako to vyzerá v tvojom trojuholníku?

Ž:

$$a_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

U: Dobre. Pre prvý vpísaný štvorec si práve vyjadril veľkosť jeho strany. Teraz prejdeme na druhý vpísaný štvorec.

Ž: *Jeho stranu si označím a_2. Strana a_2 je preponou pravouhlého trojuholníka s odvesnami, ktoré majú polovicu dĺžky strany a_1. Ak znova použijem Pytagorovu vetu, tak rovnakým postupom ako pred chvíľou dostanem, že*

$$a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}.$$

U: Áno. Ešte si stranu a_2 vyjadri pomocou strany a.

Ž:

$$a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{a}{2}.$$

U: Výborne. A teraz ďalšiu stranu – ešte menšieho štvorca.

Ž: *Stranu tretieho vpísaného štvorca si označím a_3. Rovnako ako pri predchádzajúcich štvorcoch dostanem použitím Pytagorovej vety, že*

$$a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}.$$

Ak si túto stranu vyjadrím pomocou strany a dostanem

$$a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{2}}.$$

U: Možno už v tejto chvíli vidíš akú postupnosť vytvárajú veľkosti strán vpísaných štvorcov.

Ž: *Ešte mi to stále nie je jasné. Mám vyjadriť aj strany a_4 a a_5?*

U: Nie. Vyjadri rovno predpis pre stranu a_n pomocou predchádzjúcej strany a_{n-1}.

Ž: *Dobre. Strana a_n bude tiež preponou nejakého rohového pravouhlého trojuholníka s odvesnami, ktorých veľkosť je polovica strany a_{n-1}. Takže:*

$$a_n^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a_{n-1}^2}{4} = \frac{a_{n-1}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

U: Správne. A ja tú poslednú rovnicu zapíšem v tvare

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Teraz by už malo byť jasné, akú postupnosť vytvárajú strany vpísaných štvorcov.

Ž: *Áno. Ide o* **geometrickú postupnosť** *s* **kvocientom** $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *a s prvým členom a – to je vlastne strana pôvodného, toho najväčšieho, štvorca. Označím si ju a_0, lebo a_1 je strana štvorca po prvom zmenšení.*

U: Dobre. Ako bude vyzerať vzorec pre n-tý člen tejto postupnosti?

Ž: *Vzorec pre n-tý člen našej geometrickej postupnosti je:*

$$a_n = a_0 \cdot q^n, \quad \textit{teda} \quad a_n = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

U: A teraz už môžeš vyjadriť veľkosť strany štvorca vzniknutého po desiatom delení.

Ž:

$$a_{10} = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}.$$

U: Áno. A ak už máš stranu, tak obvod a obsah štvorca by nemal byť problém.

Ž: *Obvod si označím O_{10} a obsah S_{10}. Takže:*

$$O_{10} = 4 \cdot a_{10} \qquad \Rightarrow \qquad O_{10} = 4a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10},$$

$$S_{10} = a_{10}^2 \qquad \Rightarrow \qquad S_{10} = a^2 \cdot \frac{1}{2^{10}}.$$

Štvorec, ktorý vznikne desiatym delením bude mať obvod $O_{10} = 4a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ a obsah $S_{10} = a^2 \cdot \frac{1}{2^{10}}$.

U: Výborne. A už len jednu vec na záver. Ak navzájom si odpovedajúce strany nejakých podobných útvarov tvoria geometrickú postupnosť s kvocientom q, tak obvody týchto útvarov budú tiež tvoriť geometrickú postupnosť s tým istým kvocientom.

Ž: *Uhm. A ako je to obsahmi alebo objemami?*

U: Obsahy rovinných útvarov alebo povrchy priestorových telies budú tiež tvoriť geometrickú postupnosť, ale s kvocientom q^2.

Ž: *Rozumiem, veď ak chcem vypočítať obsah, musím násobiť strany medzi sebou.*

U: Nie sú to vždy strany. Ale v podstate správne - násobia sa dva rozmery daného útvaru. A iste už tušíš ako to nakoniec bude s objemami.

Ž: *Ak odpovedajúce si hrany podobných telies sú členmi geometrickej postupnosti s kvocientom q, tak objemy týchto telies budú tvoriť geometrickú postupnosť s kvocientom q^3.*

U: Správne.

Úloha 1: *Daný je rovnostranný trojuholník, ktorého strana má dĺžku a. Ak spojíte stredy jeho strán, dostanete nový trojuholník. Ak spojíte aj jeho stredy strán, dostanete opäť trojuholník, atď. Aký veľký je obvod a obsah trojuholníka, ktorý vznikne po siedmom delení?*

Výsledok: *Obvod trojuholníka po siedmom delení je $\frac{3a}{2^7}$, jeho obsah je $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2^{16}}$.*

Úloha 2: *Veža z kociek detskej stavebnice je postavená tak, že na každú kocku je postavená jedna ďalšia kocka, ktorej hrana má polovičnú dĺžku, než kocka pod ňou. Aká vysoká bude veža postavená z desiatich kociek, ak spodná kocka má hranu veľkosti a? Aký bude mať objem?*

Výsledok: *Výška veže bude $2a \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$, jej objem bude $\frac{8a^3}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{30}}\right)$.*

Príklad 10: *Určte, pred koľkými rokmi vytvorili pravekí ľudia nástenné maľby v jaskyni Lascaux (čítaj: lasko) vo Francúzku, ak bolo zistené, že tam nájdené organické zbytky obsahovali* $0,153$*-krát menšiu koncentráciu rádiouhlíka* C *14 než je jeho koncentrácia v živých organizmoch.*

Ž: *Také zaujímavé zadanie. Škoda, že vôbec netuším, ako sa takéto príklady počítajú.*

U: Preto riešime spolu. Týmto príkladom zabŕdneme trošku do jadrovej fyziky a ukážeme si, ako sa v nej využívajú postupnosti. Na začiatku si musíme povedať, čo je to ***polčas rozpadu*** alebo tiež ***polčas premeny***.

Ž: *Vedel by som, čo je polčas zápasu, ale polčas rozpadu?*

U: Rádioaktívne prvky sa rozpadávajú. Počas tohto rozpadu sa uvoľňuje rádioaktívna energia. ***Polčas rozpadu je doba, počas ktorej sa rozpadne polovičné množstvo jadier rádioaktívneho nuklidu***, teda skupiny atómov nejakého rádioaktívneho prvku.

Ž: *Jasné. A za ďalšiu takú istú dobu sa rozpadne tá druhá polovica.*

U: Nie. Za ďalšiu takú dobu sa rozpadne polovica z tej polovice, ktorá ostala.

Ž: *Aha, takže najprv sa rozpadne polovica pôvodného množstva, potom štvrtina pôvodného množstva, potom osmina, potom šestnástina ...*

U: Áno. Rôzne rádioaktívne prvky majú rôznu dobu rozpadu. Napríklad rádioizotopy jódu I 131 a I 132 majú krátky polčas premeny – rátaný na dni a hodiny – a jeho rádioaktívne žiarenie sa používa k diagnostickým účelom v lekárstve pri vyšetrovaní štítnej žľazy.

Ž: *Ale na výpočet veku archeologických nálezov sa to asi nehodí, však? Jód by sa rozpadol skôr, než by pračlovek tú jaskyňu domaľoval.*

U: Máš pravdu. Na určovanie veku organických materiálov sa v archeológii využíva rádiouhlík C 14. Nazýva sa to ***„uhlíková metóda“***. Je založená na tom, že atmosferický rádiouhlík C 14 prechádza do rastlín asimiláciou vzdušného CO_2 a odtiaľ sa potravou dostáva do všetkých živých organizmov.

Ž: *A ako mi to pomôže?*

U: No, po odumretí živého organizmu – napríklad muchy, rastliny alebo aj človeka – je látková výmena ukončená a počet jadier rádionuklidov C 14 klesá podľa zákona rádioaktívnej premeny s polčasom rozpadu 5730 rokov. Ak archeológovia vykopú nejaký nález, odoberajú aj vzorku pôdy z okolia nálezu, aby pomocou organických zbytkov v pôde mohli určiť vek nálezu.

Ž: *Čiže, aké staré sú organické zbytky ležiace v tesnej blízkosti nálezu, taký starý je aj samotný nález? Veď to nemusí byť presné.*

U: Ak rátaš vek nálezu na stovky až tisícky rokov, tak zopár rokov hore–dole nemá žiadny veľký význam. Uhlíkovou metódou sa dá zistiť vek nálezu až do 35 000 rokov.

Ž: *A ako to využijem pri tých jaskynných maľbách?*

U: Potrebuješ vedieť dve veci. Prvú som ti už povedal:

Polčas rozpadu rádionuklidov uhlíka C 14 je 5 730 rokov.

Tá druhá vec je zákon rádioaktívnej premeny vyjadrený matematickým vzťahom:

$$N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Ž: *Uf. Tak s týmto vzorcom nebudem vedieť vypočítať nič.*

U: Len sa neboj. Vysvetlím ti ho:

$N(0)$ ... je počet nerozpadnutých jadier rádionuklidu na začiatku – v čase $t = 0$,
$N(t)$ ... je počet jadier, ktoré sa ešte nerozpadli v čase t,
T ... je polčas premeny, rozpadu rádionuklidu.

Ž: *No neviem, ešte stále je to dosť nejasné.*

U: Takýto vzťah sa používa vo fyzike. Poviem ti ten istý vzorec, ale inak – pomocou označenia, na ktoré si zvyknutý:

$$a_t = a_0 \cdot q^t.$$

Ž: *Ale to je vzorec pre n-tý člen geometrickej postupnosti s prvým členom a_0 a kvocientom q!*

U: Presne tak. A v tomto vzorci:

a_0 ... je počet jadier na začiatku, pred začatím rozpadávania,
a_t ... je počet jadier, ktoré sa ešte nerozpadli po t rozpadoch,
t ... je počet premien, rozpadov, ktoré prebehli.

Ž: *No, to je už lepšie. Zatiaľ tomu rozumiem takto: na začiatku mám nejakú kopu jadier. Je označená a_0. Prebehne 5 730 rokov a z tej kopy mi ostane len polovica. To bude a_1. Tá druhá polovica sa totiž vyžiarila preč. To bola prvá premena, prvý rozpad. Uplynie druhých 5 730 rokov. Nastane druhý rozpad. Prásk. Z jadier mi ostane už len polovica toho, čo tam bolo, teda štvrtina pôvodných. Z kopy bude kôpka.*

U: Pochopil si to správne. Kvocient tejto geometrickej postupnosti je teda $\frac{1}{2}$.

Ž: *Áno, lebo každá nasledujúca kôpka jadier je o polovicu menšia než predchádzajúca kopa.*

U: Ak vypočítaš počet rozpadov, ktoré uplynuli od začiatku a vynásobíš tento počet polčasom premeny, získaš vek nálezu.

Ž: *Skúsim to. Ale v našom príklade nemám povedané, koľko jadier uhlíka bolo na začiatku, teda v čase, keď pračlovek tvoril graffiti na jaskynné steny. A ani neviem, koľko jadier sa tam našlo pri objavení toho veľdiela.*

U: To máš pravdu, ale vieš, že počet tých zvyšných jadier je $0,153$-krát menší, ako ich tam bolo na začiatku rozpadávania.

Ž: *Čiže poznám pomer, podiel hodnôt a_t a a_0.*

U: Áno. A teraz už dosaď do vzorca pre n-tý člen geometrickej postupnosti to, čo poznáš.

Ž: *Dobre. Najprv musím vydeliť celú rovnicu hodnotou člena a_0, tak dostanem na ľavej strane pomer $\frac{a_t}{a_0}$ a za ten môžem dosadiť hodnotu $0,153$:*

$$a_t = a_0 \cdot q^t$$
$$a_t = a_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \; / : a_0$$
$$\frac{a_t}{a_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$
$$0,153 = 0,5^t$$

U: Vyšla ti jednoduchá ***exponenciálna rovnica***. Ako ju budeš riešiť?

Ž: *Neznámu mám v* **exponente**. *Aby som ju odtiaľ dostal, potrebujem ľavú aj pravú stranu rovnice* **logaritmovať**. *No a potom neznámu t osamostatním :*

$$0,153 = 0,5^t / \log$$
$$\log 0,153 = t \cdot \log 0,5 / : \log 0,5$$
$$t = \frac{\log 0,153}{\log 0,5}$$
$$t \doteq 2,71$$

U: Áno. Toľko rozpadov prebehlo od namaľovania stien jaskyne až po súčasnosť. Každý rozpad trval 5 730 rokov, takže vek maľby bude?

Ž:

$$t \cdot 5\,730 = 2,71 \cdot 5\,730 \doteq 15\,519,11 \textit{ rokov}$$

Jaskynné maľby sú staré približne 15 500 rokov.

U: Tak vidíš, zvládol si to. Už len pripomeniem, že vo vzorci $a_t = a_0 \cdot q^t$ pre geometrickú postupnosť je premenná $t \in \mathbb{N}$, pretože predstavuje počet rozpadov.

Ž: *A mne vyšlo $t \doteq 2,71$. Mám to ešte zaokrúhliť na prirodzené číslo 3?*

U: Nie, nemusíš. Len si uvedom, že ***rozšírením definičného oboru geometrickej postupnosti z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$ sme dostali exponenciálnu funkciu. Keďže postupnosť je špeciálny prípad funkcie, vzťahy platné pre geometrickú postupnosť platia samozrejme aj pre túto funkciu.***

Úloha 1: *V nádobe je 10 gramov radónu. Aké množstvo radónu ostane v nádobe za 36 dní, ak polčas rozpadu radónu je 4 dni?*

Výsledok: $\frac{10}{2^9} \doteq 0,2$ *g radónu.*

Úloha 2 : *Polčas rozpadu rádia je asi 20 minút. Aké množstvo rádia zostane z pôvodného množstva 1 mg za 4 hodiny?*

Výsledok: $\frac{1}{2^{12}} \doteq 0,00\,0244$ *mg rádia.*

Príklad 11: *Vypočítjte, pri akom ročnom úročení dosiahneme v banke rovnaké zhodnotenie vkladu ako pri mesačnom úročení, ktoré je 0,5%.*

Ž: *Ak som dobre pochopil zadanie, tak mám v banke peniaze a úročia sa mi mesačne. Každý mesiac mi teda pripočítajú k* **istine** $0,5$*-percentný* **úrok**. *Takže po roku tam budem mať istinu a 12 úrokov. To nebolo ani také ťažké.*

U: A ako by si odpovedal na otázku v zadaní?

Ž: *Ročné úročenie bude* $12 \cdot 0,5\% = 6\%$.

U: Ale mesačné úročenie znamená, že po 1. mesiaci ti pripíšu úrok a ten spolu s pôvodnou istinou vytvorí novú istinu. Po 2. mesiaci sa bude úročiť už navýšená istina.

Ž: *Aha. Takže nepôjde o jednoduché ale o* **zložené úrokovanie**.

U: Presne tak. Aké teda musí byť ročné úročenie, aby sa ti vklad zhodnotil rovnako ako pri polpercentnom mesačnom úročení?

Ž: *Použijem vzorec pre pravidelný prírastok, aký sa mi vytvorí pri zloženom úrokovaní:*

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

U: Čo znamenajú jednotlivé premenné?

Ž: p *je počet percent, na ktoré sa vklad úročí mesačne, v našom prípade je* $p = 0{,}5\%$,
n *je počet úrokovacích období, počas ktorých sa úročí, teda* $n = 12$ *mesiacov,*
a_0 *je počiatočný vklad,*
a_{12} *je vklad po uplynutí* 12 *mesiacov pri mesačnom úročení.*

U: Dobre.

Ž: *Ale nepoznám počiatočný vklad.*

U: Ten nepotrebujeme vedieť. Budeš pracovať len s parametrom a_0. Pre ľubovoľný vklad dostaneš totiž rovnaké percento ročného úročenia. Samozrejme, že uvažujeme o nenulovom vklade.

Ž: *Dosadím si teda do vzorca:*

$$a_{12} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^{12}$$

$$a_{12} \doteq a_0 \cdot 1,06\,16778$$

U: Správne. Vieš priamo z tohto výsledku určiť, aký musí byť ročný úrok?

Ž: *Nie.*

U: Tak si to teda musíme vypočítať. Opäť sa použije vzorec pre pravidelný prírastok, ale zmením niektoré premenné:
p je ročná úroková sadzba, túto hodnotu mám vypočítať,
n je počet úrokovacích období, v našom prípade je $n = 1$ rok,
a_0 je počiatočný vklad,
a_1 je vklad po uplynutí jedného roku pri ročnom úročení.
Skús si to dosadiť do vzorca.

Ž: *To zvládnem:*

$$a_1 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$$

U: Vklad sa ti má pri tomto ročnom úročení zhodnotiť rovnako ako po roku pri mesačnom úročení.

Ž: *Aha, takže porovnám a_1 s a_{12}:*

$$a_1 = a_{12}$$

$$a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1 = a_0 \cdot 1,06\,16778$$

a z tejto vzniknutej rovnice vydolujem p.

U: ako to urobíš?

Ž: *Najprv rovnicu vydelím hodnotou člena a_0. Tak sa dostanem k zátvorke, v ktorej je p. Potom od oboch strán rovnice odpočítam jednotku a nakoniec odstránim zlomok vynásobením rovnice stovkou. To by malo byť všetko. Celé riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= a_{12} \\ a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1 &= a_0 \cdot 1,06\,16778 \ \ / : a_0 \\ 1 + \frac{p}{100} &= 1,06\,16778 \ \ / -1 \\ \frac{p}{100} &= 0,06\,16778 \ \ / \cdot 100 \\ p &\doteq 6,16\,778 \end{aligned}}$$

U: Výborne. ***Aby sa dosiahlo rovnaké zhodnotenie vkladu, musel by byť ročný úrok približne*** $6,17\%$.

Úloha :

Vypočítajte, pri akom mesačnom úročení dosiahneme rovnaké zhodnotenie vkladu ako pri ročnom úročení, ktoré je 8%.

Výsledok:

Mesačný úrok musí byť približne $0,643\%$.