Úvod do postupnosti

Mgr. Jana Králiková

U: Skôr, než sa začneme venovať postupnostiam, mali by sme si pripomenúť, že ***postupnosť je vlastne špeciálny typ funkcie***, takže si najprv zopakujeme čo-to z funkcií.

Ž: **Funkcia** *je predpis (vzorec, priradenie), pomocou ktorého sa číslam z nejakej množiny priraďujú čísla z inej množiny.*

U: Začneme trošku všeobecnejšie. Funkcia je predpis, ktorý každému prvku z nejakej množiny priraďuje prvok z inej množiny. Ale pri tom priraďovaní nesmieme zabudnúť na niečo dôležité.

Ž: *Už viem.* **Funkcia je predpis, ktorý každému prvku z nejakej množiny priradí** *práve jeden* **prvok z inej množiny.**

U: Teraz je to presné. Uveď mi nejaký príklad funkčného priraďovania.

Ž: *Každému štvoruholníku vieme priradiť napríklad jeho obvod. Alebo každej kružnici vieme jednoznačne priradiť jej stred. A každému reálnemu číslu vieme priradiť napríklad jeho dvojnásobok, pričom každé číslo má práve jeden dvojnásobok. Takže tiež pôjde o jednoznačné priradenie.*

U: To boli pekné príklady. Matematika patrí medzi prírodovedné disciplíny a aj v prírode je veľa funkčného priraďovania: v danej výške od povrchu zeme na určitom mieste je práve jedna hodnota teploty alebo hustoty vzduchu, danej vzdialenosti planéty od jej hviezdy prislúcha práve jedna hodnota vzájomnej príťažlivosti... Ale poďme späť. Ako sa nazývajú množiny, ktoré si spomínal?

Ž: *Množina prvkov, ktorým sa priraďuje určitá hodnota, sa nazýva* **definičný obor funkcie***. No a množinu všetkých prvkov, ktoré sú danou funkciou priradené prvkom definičného oboru, nazývame* **obor funkčných hodnôt** *alebo len* **obor hodnôt***.*

U: Určite si spomenieš aj na to, ako označujeme tieto obory.

Ž: *Definičný obor funkcie sa označuje $\mathcal{D}(f)$ alebo $\mathcal{D}(g)$, $\mathcal{D}(h)$... podľa toho, ako je daná funkcia pomenovaná. Alebo len skrátene $\mathcal{D}$. A obor hodnôt označujeme $\mathcal{H}(f)$ alebo len $\mathcal{H}$.*

U: Teraz sa budeme zaoberať len takými funkciami, ktorých definičný obor je ***množina prirodzených čísel*** $\mathbb{N}$ alebo určitá jej podmnožina. Začneme jednoduchými úlohami:

Priraď každému $n \in \mathbb{N}$**:**

a) jeho opačnú hodnotu,

b) jeho druhú mocninu,

c) absolútnu hodnotu jeho trojnásobku zmenšeného o 10.

Ž: *Skúsim to:*

a) *opačnú hodnotu nejakého čísla dostanem tak, že mu zmením jeho znamienko na opačné. Takže číslu* 1 *priradím hodnotu* -1*, číslu* 2 *priradím hodnotu* -2 *atď. Keďže* **definičný obor sú všetky prirodzené čísla***, tak obor hodnôt budú všetky celé záporné čísla:* $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$ *a takto by to pokračovalo ďalej až do mínus nekonečna.*

U: Ak chceš naznačiť, že výpis čísel pokračuje ďalej a je pri tom jasné, aké čísla budú nasledovať, môžeš použiť na konci tri bodky. Takto:
$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, \ldots$

Ž: *Dobre, budem pokračovať:*

b) **druhé mocniny** *viem tiež ľahko urobiť, s tým nemám problém. Číslu* 1 *priradím jeho druhú mocninu, to je tiež* 1*. Číslu* 2 *priradím hodnotu* 2^2*, to je* 4*. Číslu* 3 *priradím hodnotu* 3^2*, to je* 9*. Ak budem takto pokračovať, potom obor hodnôt budú tvoriť čísla:* $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$

c) **absolútna hodnota** *jeho trojnásobku zmenšeného o* 10*? Toto znie poriadne strašidelne. Čo mám vlastne robiť? Absolútnu hodnotu, trojnásobok alebo zmenšovanie o* 10*?*

U: Treba urobiť všetko, ale v správnom poradí. Ak si vezmeš ľubovoľné prirodzené číslo, čo s ním máš urobiť najprv?

Ž: *Žeby jeho trojnásobok?*

U: Áno. A potom? Absolútnu hodnotu alebo odčítanie čísla 10?

Ž: *Zdá sa mi, že je to úplne jedno.*

U: To teda nie je. Rozdiel je v správnom použití slovného vyjadrenia. Počúvaj:

– absolútna ***hodnota*** trojnásobku, ***zmenšená*** o 10;

– absolútna hodnota ***trojnásobku zmenšeného*** o 10.

Počuješ, aký je v tom rozdiel?

Ž: *Aha, takže ak tam budem mať absolútnu hodnotu niečoho, zmenšenú o* 10*, tak budem* 10 *odčítavať od výsledku tej absolútnej hodnoty. A keď budem mať absolútnu hodnotu čohosi zmenšeného o* 10*, tak najprv budem odčítavať* 10 *a potom z tohto výsledku urobím absolútnu hodnotu. A toto mám urobiť.*

U: Správne, tak to urob.

Ž: *Takže: pre číslo* 1 *je jeho trojnásobok číslo* 3*, teraz to zmenším o* 10*, dostanem* -7*, a ešte absolútnu hodnotu z* -7*, a výsledok je* 7*.*
Číslu 1 *sa teda priradí číslo* **7***. Rovnakým spôsobom budem počítať ďalej:*
Pre číslo 2 *vypočítam* $|3\cdot 2-10| = |-4| = \mathbf{4}$*. Číslu* 2 *sa teda priradí číslo* **4***.*
Pre číslo 3 *vypočítam* $|3\cdot 3-10| = |-1| = \mathbf{1}$*. Číslu* 3 *sa teda priradí číslo* **1***.*
Pre číslo 4 *vypočítam* $|3\cdot 4-10| = |+2| = \mathbf{2}$*. Číslu* 4 *sa teda priradí číslo* **2***.*
Pre číslo 5 *vypočítam* $|3\cdot 5-10| = |+5| = \mathbf{5}$*. Číslu* 5 *sa teda priradí číslo* **5***.*

U: Dá sa to ďalej trošku zjednodušiť?

Ž: *No, ďalej vlastne už ani nepotrebujem absolútnu hodnotu, lebo výsledok odčítania od tretieho násobku bude už vždy kladný. Takže pre každé ďalšie číslo len urobím jeho trojnásobok a odpočítam* 10. *Obor hodnôt bude tvorený číslami:*
7, 4, 1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

U: Výborne. Zvládol si to. V týchto príkladoch si mal vždy uvedený predpis priraďovania. Bol síce len ***slovný***, ale ty by si ho mal vedieť aj ***zapísať pomocou matematických symbolov*** – pomocou šípky, ktorá predstavuje priraďovanie alebo pomocou zápisu funkčnej hodnoty. Skús to.

Ž: *Dobre, urobím to.*

a) *Ak mám funkciu, v ktorej každému prirodzenému číslu n priraďujem jeho opačnú hodnotu, tak toto priraďovanie zapíšem takto:* $n \to -n$ *alebo takto:* $f(n) = -n$.

b) *Ak priraďujem druhú mocninu, tak to zapíšem takto:* $n \to n^2$ *alebo* $f(n) = n^2$.

c) *A ak prirodzenému číslu n priraďujem absolútnu hodnotu jeho trojnásobku zmenšeného o* 10, *tak zápis priraďovania vyzerá takto:* $n \to |3 \cdot n - 10|$ *alebo* $f(n) = |3 \cdot n - 10|$.

U: Správne, ale musím ešte povedať, že ***predpis*** priraďovania sa inak nazýva aj ***vzorec*** priraďovania, ***funkčný predpis*** alebo len ***vzťah***. A keby sme neboli na matematike, tak by som mohol použiť aj slovo recept. Je to proste návod ako niečo urobiť. V našom prípade urobiť, znamená priradiť. V ďalšom príklade si precvičíš práve zápis vzorcov:

Zapíš vzorec, podľa ktorého sa prirodzeným číslam priradia hodnoty:
1, 8, 27, 64, 125, ...

Ž: *To je ľahké. Číslam sa priraďujú ich tretie mocniny. Je tam* $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$
Teda: $n \to n^3$ *alebo môžem napísať, že* $f(n) = n^3$.

U: To bolo naozaj ľahké. Teraz nájdi vzorec priraďovania pre tieto hodnoty:
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

Ž: *To sú opačné čísla.*

U: To teda nie sú! Sám si v predchádzajúcej úlohe uviedol, že opačné čísla dostaneme tak, že zmeníme znamienko. Z kladných čísel sa stanú záporné a zo záporných kladné. Tu sa znamienko nezmenilo. Čísla ostali kladné, takže nebudú opačné k prirodzeným. Ale keby si tie zlomky ***„prevrátil hore nohami“***, to znamená vymenil navzájom čitateľa a menovateľa, vtedy by si dostal pôvodné prirodzené čísla.

Ž: *Prevrátiť zlomky? Aha, tak to budú prevrátené čísla. Stále si to pletiem.*
Zápis priradenia bude: $n \to \frac{1}{n}$ *alebo* $f(n) = \frac{1}{n}$.

U: Dobre, aký vzorec pre priraďovanie by si našiel pre nasledujúce hodnoty?
5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

Ž: *Aj to zvládam. Ide o násobky čísla 5.*
Teda: $n \to 5 \cdot n$ *alebo* $f(n) = 5 \cdot n$.

U: Asi by som mal pritvrdiť. Skús toto:
$5, 10, 9, 10, 13, 10, 17, 10, 21, 10, 25, 10, 29, 10, \dots$

Ž: *Ajaj. Čo teraz? Začína to ako násobky čísla* 5*, ale len na začiatku. Potom sa to pokazí.*

U: Čím je tá skupina čísel pekná? Je na nej niečo zaujímavé?

Ž: *Pekná nie je ničím, ale zaujímavé je tam to, že na každom druhom mieste je číslo* 10*. Každé párne miesto by som teda vedel obsadiť desiatkou.*

U: A čo čísla medzi desiatkami? 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ... Nepripomínajú ti nič?

Ž: *No, každé číslo je o* 4 *väčšie ako predchádzajúce. Keby to boli čísla* 4, 8, 12, 16, 20, ... *boli by to násobky čísla* 4*, ale toto sú vždy čísla o* 1 *väčšie ako násobok štvorky.*

U: Výborne, veď je to presne to, k čomu si mal dôjsť. Na párnych miestach máš desiatky a na nepárnych miestach násobky štvorky zväčšené o 1. Teraz to už len zapísať.

Ž: *To nezvládnem zapísať jedným vzorcom!*

U: To po tebe ani nechcem. Dá sa to zapísať aj takto:

ak n je párne (t. j. $n = 2\cdot k, k \in \mathbb{N}$), ***tak*** $n \to 10$ alebo $f(n) = 10$,

ak n je nepárne (t. j. $n = 2\cdot k - 1, k \in \mathbb{N}$), ***tak*** $n \to 4\cdot n + 1$ alebo $f(n) = 4\cdot n + 1$.

Ž: *Môžem mať pre jednu funkciu dva vzorce?*

U: Vidíš, že áno. Aj viac vzorcov. Alebo ani jeden. Ešte o tom budeme hovoriť.

Ž: *Keď vidím takéto príklady, teda za sebou v riadku napísané čísla, tak mi to trochu pripomína hlavolamové úlohy z časopisov alebo z inteligenčných testov:*
„Doplň v postupnosti čísel ďalšiu hodnotu.“
Treba tam odhaliť vzorec, predpis priraďovania a pomocou neho nájsť ďalšie číslo v poradí.

U: Áno, si veľmi blízko. A páči sa mi, že si už použil slovo ***postupnosť čísel***, pretože práve k tomu smerujeme. Funkcia a postupnosť čísel totiž úzko súvisia. Môžeme teda vysloviť definíciu postupnosti:

Postupnosť je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel.

- ***Ak je definičným oborom množina prvých*** k ***prirodzených čísel, pričom*** k ***je ľubovoľné prirodzené číslo, hovoríme o konečnej postupnosti.***
- ***Ak je definičným oborom množina všetkých prirodzených čísel, hovoríme o nekonečnej postupnosti.***

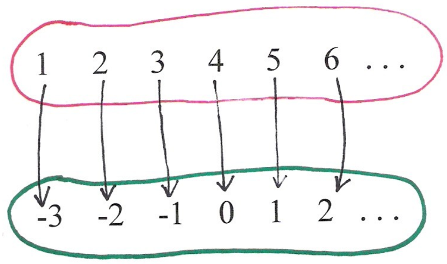
Ž: *Skúsim to zopakovať: Postupnosť je funkcia, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel. Postupnosť môže byť konečná alebo nekonečná, podľa toho, či jej definičný obor tvoria len niektoré prirodzené čísla, alebo všetky.*

U: S tým vyjadrením – niektoré – nesúhlasím, to by nebolo presné.
V definícii sa hovorí o množine prvých k prirodzených čísel. Takže pre konečnú postupnosť je definičný obor množina typu $\{1, 2, 3, 4, \dots, k\}$, pričom $k \in \mathbb{N}$.

Ž: *Vždy, keď sa povie postupnosť, mám si pod tým predstaviť špeciálny typ funkcie?*

U: Áno, a ***všetko čo súvisí s funkciami, súvisí aj s postupnosťami***. Napríklad aj priraďovanie.
Aby som si overil, či si dobre pochopil pojem postupnosť, povedz mi o nasledujúcich schémach, či predstavujú postupnosť alebo nie:

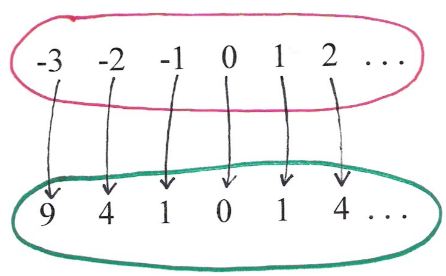
a)



Ž: *Definičný obor sú prirodzené čísla. Obor hodnôt je tvorený tak, že poradové číslo n zmenšujem o 4, $n \to n - 4$. Zdá sa mi to v poriadku, je to nekonečná postupnosť.*

U: Dobre.

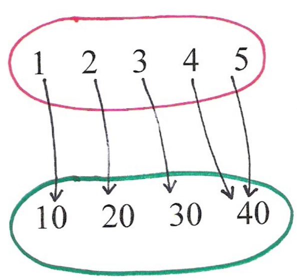
b)



Ž: *Definičný obor tvoria aj čísla záporné, takže nejde o postupnosť. Ale funkcia je to pekná, priraďujú sa druhé mocniny.*

U: Správne.

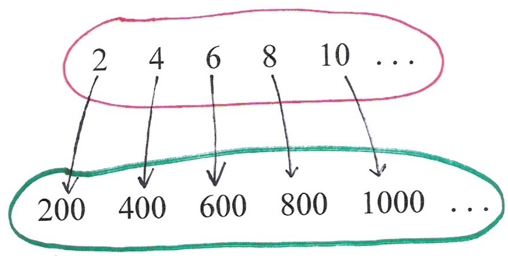
c)



Ž: *Toto je konečná postupnosť. Trošku ma zarazili tie dve šípky smerujúce k tomu istému číslu, ale funkcia to je. Jej definičným oborom sú prirodzené čísla, takže ide o postupnosť. Len sa neviem rozhodnúť, koľko má členov. Štyri alebo päť?*

U: Definičný obor tvorí prvých 5 prirodzených čísel, takže ide o 5-člennú postupnosť, v ktorej majú posledné dva členy rovnakú hodnotu.

d)



Ž: *Tak toto je nekonečná postupnosť a číslu n sa priraďuje jeho* 100*-násobok.*

U: Určite je to tak? Definičný obor vyhovuje definícii postupnosti?

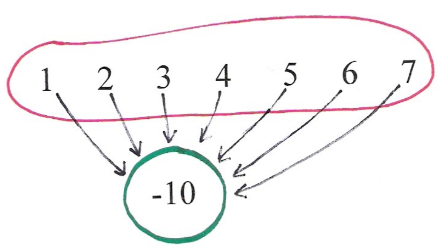
Ž: *Veď sú to prirodzené čísla a je ich nekonečne veľa.*

U: Nekonečne veľa ich síce je, ale nie sú všetky, chýbajú nepárne čísla. Preto v tomto príklade nejde o postupnosť.

Ž: *Uf, zdá sa, že si musím ustrážiť veľa vecí.*

U: Áno, tu je ďalší obrázok:

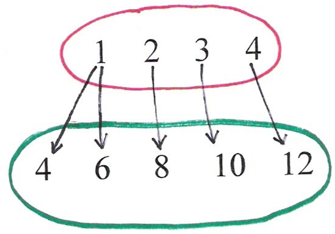
e)



Ž: *Teraz ma už nenachytáte! Definičný obor je sedem prvých prirodzených čísel, obor hodnôt je síce málo pestrý, má len jednu hodnotu, ale to nevadí. Ide o* 7*-člennú konečnú postupnosť.*

U: Výborne, takže na záver:

f)



Ž: *Nedostanete ma. Toto priraďovanie čísel vôbec nepredstavuje funkciu, lebo číslo 1 má dve funkčné hodnoty. A to pri funkciách nemôže nastať. Takže to nebude ani postupnosť.*

U: Správne, len nehovoríme o funkčnej hodnote, ak nejde o funkciu. Stačí povedať, že číslu 1 sa priraďujú dve rôzne hodnoty.

Ž: *Dobre, dám si pozor. Čo sa týka postupností – zatiaľ sa mi zdá všetko jasné.*

U: To som naozaj rád, dúfam, že to tak bude aj ďalej. Zavedieme si teraz označenie, ktoré sa pri postupnostiach používa.

- ***Prvý člen postupnosti označíme a_1. Je to hodnota priradená prirodzenému číslu 1.***
- ***Druhý člen postupnosti označíme a_2. Je to hodnota priradená prirodzenému číslu 2.***
- ***Vo všeobecnosti a_n bude označovať n-tý člen postupnosti, teda hodnotu priradenú prirodzenému číslu n.***

Ž: *Stále je to funkcia, len použijeme iný typ označenia funkčných hodnôt?*
Namiesto $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$ budeme používať a_1, a_2, ..., a_n?

U: Áno, presne tak. Tá zmena označenia je preto, aby bolo jasné, že teraz hovoríme o postupnostiach.

Ž: *A bude to chyba, ak namiesto „áčkového" použijem „f-kový" zápis?*

U: Chyba to nebude, oba zápisy sú správne a môžu sa používať. Ale ak budem ďalej hovoriť o postupnosti, budem využívať len ten „áčkový" zápis.
Členy $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sú ***usporiadané*** podľa rastúceho ***indexu*** n, ktorý určuje zároveň poradie člena postupnosti.
Pre skrátený zápis postupnosti použijeme svorkové zátvorky:

- ***Nekonečná postupnosť:*** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$.
- ***Konečná postupnosť:*** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = \{a_n\}_{n=1}^{k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ž: *A ako mám na konkrétnej postupnosti použiť tie svorkové zátvorky?*

U: Do tých svorkových zátvoriek napíšeš vzorec pre priraďovanie. Ukážeme si to na príklade: Majme postupnosť, ktorá má členy: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 20. Ty už vieš zapísať priraďovanie pomocou šípky, aj pomocou vzorca. Predveď mi to.

Ž: *Ide o samé párne čísla, teda o dvojnásobok poradového čísla n. Priradenie zapíšem takto:*
– *pomocou šípky:* $n \to 2 \cdot n$,
– *f-kový zápis:* $f(n) = 2 \cdot n$,
– *áčkový zápis:* $a_n = 2 \cdot n$.

U: Dobre, každý z týchto zápisov ti hovorí, ako sa číslu n priraďuje nejaká hodnota. Postupnosť vytvorená takýmto priraďovaním bude zapísaná takto:
$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 20\} = \{2 \cdot n\}_{n=1}^{10}$.

Ž: *Už rozumiem. Všetko pekne v jednom balíčku. Je tam aj vzorec aj definičný obor. Hneď vidím, či je postupnosť konečná alebo nekonečná a aj to, ako dostanem obor hodnôt.*

U: Presne tak. A ešte jedno upozornenie. Ak budem hovoriť o postupnosti, budem tým myslieť vždy nekonečnú postupnosť. Ak budem mať na mysli konečnú postupnosť, zdôrazním to. Ak si chceš zopakovať a upevniť všetko, čo sme si povedali, pozri si riešené príklady.

Príklad 1: *Napíšte prvých šesť členov postupnosti, v ktorej sa prirodzenému číslu n priradí:*

a) $n\cdot(3-n)$,

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(-1)^{n+1}$,

c) $\frac{n}{n+1}$.

Ž: *Vo všetkých úlohách budem vlastne* **dosadzovať za n postupne prvých 6 prirodzených čísel** *a dostanem tak členy postupností.*
a) $n\to n\cdot(3-n)$, *alebo inak zapísané* $a_n=n\cdot(3-n)$.

pre $n=1$ *je* $a_1=1\cdot(3-1)=2$,

pre $n=2$ *je* $a_2=2\cdot(3-2)=2$.

Zdá sa, že tam budú samé dvojky.

U: Neponáhľaj sa tak rýchlo s odpoveďou. Vypočítaj si aj ďalšie hodnoty.

Ž: *Tak dobre:*

pre $n=3$ *je* $a_3=3\cdot 0=0$,

pre $n=4$ *je* $a_4=4\cdot(-1)=-4$,

pre $n=5$ *je* $a_5=5\cdot(-2)=-10$,

pre $n=6$ *je* $a_6=6\cdot(-3)=-18$.

Prvých šesť členov danej postupnosti je: $2,\ 2,\ 0,\ -10,\ -4,\ -18$.

U: Pekne. Poďme na časť b).

Ž: *b)* $n\to\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(-1)^{n+1}$, $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(-1)^{n+1}$.
To je zapeklisté. Tá prvá zátvorka mi bude hádzať v menovateli mocniny dvojky, teda čísla $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$ *– to zvládam. A tá druhá zátvorka v zadaní ... hm. Mocniny mínus jednotky. To je akési nadbytočné.*

U: Nadbytočné? A spomínaš si, ako sa správajú mocniny mínus jednotky?

Ž: *No, je to stále mínus jednotka, nie?*

U: Skúsme počítať:
$(-1)^1=-1$,
$(-1)^2=(-1)\cdot(-1)=+1$,
$(-1)^3=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-1$,
$(-1)^4=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=+1$, mám pokračovať?

Ž: *Nie, spomenul som si.* **Párne mocniny mínus jednotky dávajú výsledok $+1$ a nepárne mocniny výsledok -1.**
Ak mám takýmto výrazom násobiť zlomky, tak sa budú na striedačku meniť ich znamienka. Členy postupnosti sú teda:
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}$.

U: Dobre. A máme tu poslednú časť príkladu:

Ž: *c)* $n \to \frac{n}{n+1}$ *alebo tiež* $a_n = \frac{n}{n+1}$.
Aspoň toto zvládnem hádam bez problémov. V menovateli bude vždy číslo o 1 *väčšie ako v čitateli, teda:*
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$.

U: Dobre. To si naozaj zvládol.

Úloha 1:
Napíšte prvých 5 členov postupnosti, v ktorej sa každému prirodzenému číslu n priradí $\frac{2^{n-3}}{2^n-3}$.

Výsledok:
$-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{13}, \frac{4}{29}$.

Úloha 2:
Vypočítajte súčet prvých 101 *členov postupnosti, v ktorej sa každému prirodzenému číslu n priradí* $4\cdot(-1)^n$.

Výsledok:
-4.

Príklad 2: *Napíšte prvých sedem členov postupnosti, v ktorej:*

$$a_n = \begin{cases} -4 & \textit{pre} \quad n = 3{\cdot}k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 2^n & \textit{pre} \quad n = 3{\cdot}k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ \dfrac{1}{n} & \textit{pre} \quad n = 3{\cdot}k+2, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Ž: *To sú tri príklady?*

U: Nie, to je jeden príklad. Len v ňom máš uvedené tri rôzne predpisy, podľa toho, či číslo n je násobkom trojky alebo nie. Ale zaujíma ma, či vieš, čo je $\mathbb{N}_0$.

Ž: *Samozrejme. To je množina všetkých prirodzených čísel obohatená ešte aj o nulu.*

U: Jogurt môže byť obohatený o vitamíny. V matematike by sme to vyjadrili takto: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$. Pokračuj v príklade.

Ž: *Dobre. Čiže mám viac predpisov pre priraďovanie. Ak $n = 1$, odkiaľ mám vedieť, ktorý vzťah z tých troch použiť?*

U: Musíš si uvedomiť, že číslo 1 dáva pri delení trojkou výsledok 0 a zvyšok 1. Ten vyšok je dôležitý. Zapíšeme to takto:

$$1 : 3 = 0 \text{ zv. } 1 \quad \text{alebo} \quad 1 = 3 \cdot 0 + 1, \text{ v tomto prípade je } k = 0.$$

Ž: *Aha, takže pre $n = 1$ použijem druhý vzťah, $a_1 = 2^1 = 2$. Ďalej skúsim sám. Pre $n = 2$ použijem tretí vzťah, lebo číslo 2 dáva pri delení trojkou zvyšok 2, teda:*

$$2 = 3 \cdot 0 + 2, \ k = 0, \ a_2 = \frac{1}{2}.$$

Pre $n = 3$ použijem prvý vzťah, lebo teraz je n násobkom trojky:

$$3 = 3 \cdot 1, \ k = 1, \ a_3 = -4.$$

U: Už je ti to jasnejšie? Vidíš nejakú súvislosť?

Ž: *Budem stále používať tie tri vzorčeky dookola. Snáď to nepopletiem, musím si strážiť zvyšky pri delení trojkou. Ak mám pri delení trojkou zvyšok 0, použijem prvý vzťah, ak mám zvyšok 1, použijem druhý vzťah a pri zvyšku 2 použijem tretí vzťah. Takže ďalej to bude vyzerať takto:*

$a_4 = 2^4 = 16$, $a_5 = \dfrac{1}{5}$, $a_6 = -4$,

$a_7 = 2^7 = 128$, $a_8 = \dfrac{1}{8}$, $a_9 = -4$,

$a_{10} = 2^{10} = 1024, \dots$

U: Stačí, stačí. Mal si nájsť len prvých sedem členov. Vypíš mi ich ešte.

Ž: *Prvých sedem členov danej postupnosti je:* $2, \frac{1}{2}, -4, 16, \frac{1}{5}, -4, 128$.

Úloha 1:

Napíšte prvých 10 členov postupnosti, v ktorej:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & pre \quad n = 2\cdot k, & k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{n} & pre \quad n = 2\cdot k + 1, & k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Výsledok:

$1,\ \dfrac{1}{4},\ \sqrt{3},\ \dfrac{1}{16},\ \ \sqrt{5}\ \ \dfrac{1}{64},\ \ \sqrt{7},\ \dfrac{1}{256},\ \ 3,\ \ \dfrac{1}{1024}.$

Úloha 2:

Vypočítajte súčin prvých desiatich členov postupnosti, v ktorej:

$$a_n = \begin{cases} 1 & pre \quad n = 3\cdot k, & k \in \mathbb{N}, \\ -1 & pre \quad n = 3\cdot k + 1, & k \in \mathbb{N}_0, \\ 10 & pre \quad n = 3\cdot k + 2, & k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Výsledok:

$+1000.$

Príklad 3: *Určte predpis pre n-tý člen postupnosti danej členmi:*

a) $\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{2\cdot 4}, \frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{4\cdot 6}, \dots$

b) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$

c) $0, 3, 8, 15, 24, \dots$

d) $5, -5, 5, -5, \dots$

e) $0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots$

Ž: *Tak poďme na to.*

a) $\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{2\cdot 4}, \frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{4\cdot 6}, \dots$

V čitateli mám stále jednotku. V menovateli je vždy súčin. Násobia sa tam najprv dve nepárne čísla, potom dve párne, potom zas nepárne. Čo s tým? Nepomáhajte mi! Prídem na to sám. V prvom menovateli je jednotka a trojka. V druhom menovateli je dvojka a štvorka. Už to vidím. Vždy je tam poradové číslo n a číslo o 2 väčšie.

U: Platí to aj pre tretí a štvrtý člen?

Ž: *Platí. Vzťah pre n-tý člen postupnosti by teda mohol byť:*

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+2)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

U: To si zvládol naozaj pekne. Poďme ďalej.

Ž: *b)* $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$

Vidím tam samé nepárne čísla. V čitateľoch začínajú od jednotky a v menovateľoch až od trojky. Pre nepárne čísla máme napríklad vyjadrenie $2n+1$ alebo $2n-1$. Len musím rýchlo zistiť, ktoré kam patrí. Čitatele zlomkov sú menšie než menovatele. Teda:

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

U: Výborne.

Ž: *c)* $0, 3, 8, 15, 24, \dots$

Hm, a už som došiel. Zistil som síce, že vždy pripočítavam väčšie nepárne číslo: $+3, +5, +7, +9, \dots$, ale ako zistím, koľko mám pripočítavať, keď dôjdem k nejakému n?

U: Pozri sa na to inak. Nezdajú sa ti tie čísla nejaké povedomé?

Ž: *Vôbec nie. A čím dlhšie sa na nich dívam, tým je to horšie.*

U: A keby si tam namiesto nich mal: $1, 4, 9, 16, 25, \dots$?

Ž: *Fuj, to bol pekný podraz! Už mi je to jasné! Ide o druhé mocniny čísel zmenšené o 1:*

$$a_n = n^2 - 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

U: Tak vidíš. Musíš vedieť využiť všetko.

Ž: *d)* $5,\ -5,\ 5,\ -5,\ \ldots$

Aspoň trošku jasu v tomto bezútešnom počítaní. Mám tam päťky, ktoré striedajú znamienka. Zvládnem vyrobiť päťke striedavé znamienko? Áno, použijem mocninu mínus jednotky: $a_n = 5 \cdot (-1)^n$. Super. Som hviezda.

U: Tak trošku stlm svoj jas, ty hviezda, a prever si to.

Ž: $-5,\ +5,\ -5,\ +5,\ \ldots$ *skoro dobré, nie? Len tie znamienka by som mal mať naopak. Nebojte sa, dám to do poriadku. Prehodím ich vynásobením číslom -1. To ale znamená, že sa mi zvýši stupeň mocniny mínus jednotky, z n-tej bude n plus prvá. Takže:*

$$a_n = 5 \cdot (-1)^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

U: Áno, už je to tak, ako má byť. Tak mi ešte predveď, čo budeš robiť v poslednom príklade.

Ž: *e)* $0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots$

To sú opačné čísla k prirodzeným. Ale navyše je tam tá nulka. Potvora. Pokazila mi ľahký príklad. Ale možno to nie je ani také ťažké. Nestačí, keď tam budem mať opačné čísla, teda záporné, musím ich aj zväčšiť pripočítaním jednotky. Dostanem: $a_n = -n + 1$, alebo:

$$a_n = 1 - n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

U: Naozaj pekne urobené. Dobre.

Úloha 1:

Určte predpis pre n-tý člen postupnosti danej členmi:

a) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots$

b) $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \ldots$

c) $9,\ 99,\ 999,\ 9\,999,\ 99\,999,\ \ldots$

Výsledok:

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N},$

b) $a_n = \sqrt{n+1},\ n \in \mathbb{N},$

c) $a_n = 10^n - 1,\ n \in \mathbb{N}.$

Úloha 2:

Určte predpis pre n-tý člen postupnosti danej členmi: $1,\ 20,\ \frac{1}{3},\ 40,\ \frac{1}{5},\ 60,\ \frac{1}{7},\ 80,\ \frac{1}{9},\ \ldots$

Výsledok:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \textit{pre} \quad n = 2\cdot k - 1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 10\cdot n & \textit{pre} \quad n = 2\cdot k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Príklad 4: *Je daná postupnosť, v ktorej* $a_1 = 13,\ a_2 = 18,\ a_n = n \cdot x + y,\ n \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathbb{R}$. *Určte čísla* x, y.

U: V tomto príklade budeš musieť použiť širší okruh vedomostí.

Ž: *Hm, teda ak za* n *dosadím jednotku, dostanem hodnotu prvého člena, tú poznám:*

$$1 \cdot x + y = 13.$$

Rovnako ak za n *dosadím dvojku, dostanem hodnotu pre* a_2*:*

$$2 \cdot x + y = 18.$$

Už viem, prečo ste povedali, že budem musieť použiť širší okruh vedomostí. Preberáme postupnosti, a ja mám vedieť riešiť sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi.

U: Správne, tak už to v matematike chodí. A tú sústavu máš vedieť nielen riešiť, ale aj vyriešiť. Ako budeš postupovať?

Ž: *Pri riešení sústavy*

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ \underline{2x + y} &\underline{= 18} \end{aligned}$$

použijem odčítaciu metódu, odčítam prvú rovnicu od druhej. Dostanem: $x = 5$. *Po dosadení za* x *do prvej rovnice, dostaneme, že* $y = 8$.
Postupnosť je teda daná vzťahom: $a_n = 5n + 8$ **,** $x = 5$**,** $y = 8$.

U: Dobre, páčilo sa mi ako elegantne si to vyriešil.

Úloha 1:

Je daná postupnosť, v ktorej:
$a_1 = 4,\ a_2 = 8,\ a_n = (4 + n) \cdot x + (4 - n) \cdot y,\ n \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathbb{R}$. *Určte čísla* x, y.

Výsledok:

$[x,\ y,] = [+2,\ -2]$.

Úloha 2:

Je daná postupnosť, v ktorej:
$a_1 = 15,\ a_2 = 26,\ a_3 = 41,\ a_n = n^2 \cdot x + n \cdot y + z,\ n \in \mathbb{N},\ x, y, z \in \mathbb{R}$. *Určte čísla* x, y, z.

Výsledok:

$[x,\ y,\ z] = [2,\ 5,\ 8]$.

Príklad 5: *Rozhodnite, či čísla* 25 *a* 50 *sú členmi postupnosti* $\{n^2 - 2\cdot n + 1\}_{n=1}^{\infty}$.

Ž: *Dosadil by som za* n *číslo* 25 *a vypočítal by som hodnotu toho výrazu. A potom by som urobil to isté pre číslo* 50.

U: A čo by si dostal?

Ž: *No predsa hodnotu dvadsiateho piateho a päťdesiateho člena postupnosti.*

U: Ale, ty nemáš vypočítať hodnoty týchto členov, práve naopak. Máš zistiť, či čísla 25 a 50 sa vyskytujú v obore hodnôt, či sú členmi postupnosti.

Ž: *Teda mám zistiť, či nejaké* n *po dosadení dá výsledok* 25*?*

U: Áno, máš zistiť, či existuje také n, že $a_n = 25$, prípadne 50.

Ž: *Tak teda, či nájdem také* n*, že bude vyhovovať rovnici* $n^2 - 2\cdot n + 1 = 25$. *Mám počítať kvadratickú rovnicu. Môžem pomocou* **diskriminantu***?*

U: Môžeš, ale pozri sa lepšie ako vyzerá ľavá strana rovnice.

Ž: *Je tam rozpísaný vzorec* $(n-1)^2$ *a má sa to rovnať* 25*, čiže* 5^2*. Takže hneď vidím, že* $n-1$ *má byť rovné* 5*. A teda* $n = 6$*. Číslo* 25 *je šiestym členom našej postupnosti. A vlastne pre číslo* 50 *nemusím opakovať tento postup, lebo* 50 *sa nedá napísať ako druhá mocnina prirodzeného čísla, teda* 50 *nebude členom postupnosti.*

U: Dobre, mám len jednu výhradu. Riešením kvadratickej rovnice $(n-1)^2 = 5^2$ je okrem čísla 6 aj číslo -4, to ale našťastie nie je z definičného oboru postupnosti. Je to nevyhovujúci koreň.

Ž: *A mohol som to robiť aj tak, že by som proste dosadzoval do vzorca prirodzené čísla a zisťoval, či tie výsledky majú hodnotu* 25 *alebo* 50*?*

U: Áno, dá sa to robiť aj takto, ale mohlo by to byť časovo veľmi náročné. Veď, čo ak by som ti nezadal šiesty člen, ale šesťdesiaty v poradí? Alebo tisíci? Iste by ťa omrzelo toľko dosadzovať. A navyše, čo ak by tam tá hodnota vôbec nebola? Ako dlho by si ju hľadal?

Úloha 1:

Zistite, či číslo $\dfrac{5}{6}$ *je členom postupnosti, v ktorej* $a_n = \dfrac{10\cdot n + 5}{n^2 + n - 6}$.

Výsledok:

Áno, $a_{12} = \dfrac{5}{6}$.

Úloha 2:

Zistite, či číslo -40 *je členom postupnosti, v ktorej* $a_n = n^2 - 13\cdot n$.

Výsledok:

Áno, $a_5 = a_8 = -40$.

Úloha 3:

Zistite, či číslo -30 *je členom postupnosti, v ktorej* $a_n = n^2 + 13\cdot n$.

Výsledok:

Nie. Žiaden člen postupnosti nemá hodnotu -30*. (Korene kvadratickej rovnice sú záporné, nie sú z definičného oboru postupnosti.)*

Príklad 6: *Aký je súčet tretieho, jedenásteho a dvadsiateho člena postupnosti*

$$\left\{\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}?$$

Ž: *Potrebujem vedieť hodnoty týchto členov a keď ich budem mať, tak ich spočítam.*

U: Dúfam, že si nebudeš postupne vypisovať hodnoty členov - od prvého až po dvadsiaty.

Ž: *To nie. Hodnoty tretieho, jedenásteho a dvadsiateho člena postupnosti vypočítam dosadením.*

Ak $n = 3$, *tak* $a_3 = \dfrac{3\cdot(3+1)}{2} = 6$.

Ak $n = 11$, *tak* $a_{11} = \dfrac{11\cdot(11+1)}{2} = 66$.

Ak $n = 20$, *tak* $a_{20} = \dfrac{20\cdot(20+1)}{2} = 210$.

Ešte ich spočítam: $6 + 66 + 210 = 282$.

Súčet týchto troch členov danej postupnosti je 282. *Hlásim hotovo!*

U: Výborne.

Úloha 1:

V akom pomere je piaty a dvanásty člen postupnosti $\left\{\dfrac{2\cdot n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$*?*

Výsledok:

$a_5 = \dfrac{11}{7}$, $a_{12} = \dfrac{25}{14}$, $\quad a_5 : a_{12} = 22 : 25$.

Úloha 2:

Aký je rozdiel stého a tisíceho člena postupnosti $\left\{(-1)^{2\cdot n-5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *?*

Výsledok:

$a_{100} = -1$, $a_{1000} = -1$, $\quad a_{100} - a_{1000} = 0$.

Úloha 3:

Daná je postupnosť $\{2\cdot n - 15\}_{n=1}^{\infty}$. *Vypočítajte súčet dvojnásobku jej piateho a trojnásobku jej siedmeho člena, zmenšený o štvornásobok jej desiateho člena.*

Výsledok:

$a_5 = -5$, $a_7 = -1$, $a_{10} = +5$, $\quad 2\cdot a_5 + 3\cdot a_7 - 4\cdot a_{10} = -33$.

Príklad 7: *Presvedčte sa, že konečné postupnosti* $\{|3-n|\}_{n=1}^{5}$ *a* $\{3^n - n^3\}_{n=1}^{5}$ *majú prvé tri členy rovnaké. O koľko sa líšia ich štvrté členy? V akom pomere sú ich piate členy?*

Ž: *Obe postupnosti sú päťčlenné. Dosadzovaním čísel* 1 *až* 5 *za* n *zistím ich obor hodnôt:*
Postupnosť $\{|3-n|\}_{n=1}^{5}$ *má tieto členy:*

$$2, 1, 0, -1, -2.$$

U: Naozaj? Ako ti mohli vyjsť záporné hodnoty, keď výraz $3-n$ je v absolútnej hodnote?

Ž: *Zabudol som na tú absolútnu hodnotu. Takže oprava:*
Postupnosť $\{|3-n|\}_{n=1}^{5}$ *má členy:*

$$2, 1, 0, 1, 2.$$

Postupnosť $\{3^n - n^3\}_{n=1}^{5}$ *je zložená z členov:*

$$2, 1, 0, 17, 118.$$

Naozaj majú prvé tri členy rovnaké.

U: Áno, teraz ten rozdiel a pomer.

Ž: *Rozdiel štvrtých členov je* $17 - 1 = 16$.
Pomer piatych členov je $2 : 118 = 1 : 59$.
Štvrtý člen druhej postupnosti je teda o 16 väčší ako štvrtý člen prvej postupnosti a jej piaty člen je dokonca 59-krát väčší ako piaty člen prvej postupnosti.

Úloha :
Presvedčte sa, že prvých 16 *členov postupnosti* $\{n^2 - n + 17\}_{n=1}^{\infty}$ *tvoria prvočísla. Ukážte, že sedemnásty člen postupnosti nie je prvočíslo.*

Výsledok:
Členy postupnosti sú: 17, 19, 23, 29, 37, ...
$a_{17} = 17^2 - 17 + 17 = 17^2$, *čo nie je prvočíslo.*

Príklad 8: *Je daná postupnosť druhých mocnín prirodzených čísel. Členom tejto postupnosti je aj číslo* 10^8*. Ktoré číslo bude nasledovať za ním?*

Ž: *Tak snáď* $10^8 + 1$.

U: To by platilo pre čísla definičného oboru. Každé nasledujúce prirodzené číslo je o 1 väčšie ako predchádzajúce, ale pre obor hodnôt to nemusí platiť. Obor hodnôt tvoria členy postupnosti, v našom prípade sú to druhé mocniny prirodzených čísel. Tie sa nelíšia o 1.

Ž: *Aha, dobre, unáhlil som sa. Takže* 10^8 *je druhá mocnina prirodzeného čísla* 10^4*, lebo* $(10^4)^2 = 10^{4\cdot 2} = 10^8$*. Za prirodzeným číslom* 10^4 *nasleduje v definičnom obore číslo* 10^4+1*. A hodnota tohto desaťtisícprvého člena je* $(10^4+1)^2$.

U: Správne.

Úloha :

Je daná postupnosť $\{\log n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jej členom je aj číslo* 3*. Aké sú jeho susedné členy, medzi ktorými leží?*

Výsledok:

$\log 999$ *a* $\log 1001$.