Spôsoby určenia postupností

Mgr. Jana Králiková

U: Postupnosť je špeciálny typ ***funkcie***. Vieš ako znie jej presná definícia?

Ž: *Nie som si celkom istý.*

U: Na začiatok ti pomôžem. ***Postupnosť je funkcia, ktorej definičný obor je množina všetkých prirodzených čísel alebo taká jej podmnožina, ktorá obsahuje niekoľko prvých prirodzených čísel.*** Podľa toho rozlišujeme nekonečnú a konečnú postupnosť. A vieš ako môže byť postupnosť daná, teda určená?

Ž: *Zrejme tak, že napíšeme všetky jej členy.*

U: Upresním to:

Postupnosť môže byť určená vymenovaním svojich členov.

- ***Pri konečných postupnostiach vymenujeme buď všetky alebo niekoľko prvých členov a posledný člen.***

- ***Pri nekonečných postupnostiach vymenujeme niekoľko prvých členov.***

Vždy ale platí, že ak nevymenuvávame všetky členy, musí byť jasné pravidlo, podľa ktorého by boli tie ďalšie vytvorené.

Ž: *Dobre, rozumiem.*

U: Tak mi skús uviesť niekoľko postupností – konečných aj nekonečných – vymenovaním ich členov.

Ž: *Napríklad:*

– *nekonečná postupnosť tvorená zlomkami:* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

– *nekonečná postupnosť párnych čísel:* $2, \ 4, \ 6, \ 8, \ 10, \ 12, \ldots$

– *konečná postupnosť mocnín dvojky:* $1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32, \ 64, \ldots, \ 1024.$

– *konečná postupnosť tvorená šiestimi desiatkami:* $10, 10, 10, 10, 10, 10.$

U: Dobre. To bolo pekné. Členy postupnosti vymenovávame vtedy, ak chceme mať predstavu, aké sú, alebo vtedy, ak proste neexistuje pravidlo, podľa ktorého je postupnosť vytvorená. Ak takéto pravidlo existuje, väčšinou sa používa namiesto vymenovávania.

Ž: *Prečo?*

U: Vymenovávanie veľkého počtu členov je zdĺhavé. To je prvý dôvod. A druhý dôvod je ten, že ak vymenuješ len niekoľko prvých členov, tak sa môže stať, že rôzni ľudia si vytvoria rôzne „jasné pravidlá“, podľa ktorých budú tvoriť ďalšie členy postupnosti. To nechceme. Preto, ak existuje pravidlo, používa sa namiesto vymenovávania.

Ž: *Myslím, že viem o čom hovoríte. V rôznych inteligenčných testoch sú úlohy typu: „V postupnosti čísel doplň ďalšie číslo“ – a mne tam občas vychádza iné riešenie, než chce autor úlohy. Pritom si viem zdôvodniť, že správne je to moje číslo.*

U: Presne tak. Preto sa radšej používa pravidlo, vzorec. Vieš ako sa nazýva takýto spôsob určenia postupnosti?

Ž: *Viem, hovoríme tomu, že postupnosť je daná vzorcom.*

U: ***Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen, v tvare $a_n = f(n)$***, napríklad:

$\{4\cdot n\}_{n=1}^{\infty}$, ľubovoľný n-tý člen sa počíta podľa vzorca: $a_n = 4\cdot n$ alebo

$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ľubovoľný n-tý člen sa počíta podľa vzorca: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Ž: *Takže pomocou vzorca by som mal vedieť vypočítať hodnotu n-tého člena postupnosti pre ľubovoľné n tak, že za n dosadím nejaké konkrétne číslo?*

U: Áno, ukážeme si to na príklade.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná vzorcom $a_n = n^3$. Vyjadri:

a) a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{100},

b) a_x, a_{2x}, $2a_x$, a_{x-1}, $a_x - 1$, a_{2x+5}, $2a_x + 5$, ***kde*** $x \in \mathbb{N}$.

Ž: a) *Máme postupnosť tretích mocnín prirodzených čísel. Ak chcem získať hodnotu niektorých členov, tak za n jednoducho dosadím prirodzené číslo. Takto:*

pre $n = 1$ *je* $a_1 = 1^3 = 1$,

pre $n = 2$ *je* $a_2 = 2^3 = 8$,

pre $n = 3$ *je* $a_3 = 3^3 = 27$,

pre $n = 10$ *je* $a_{10} = 10^3 = 1\,000$,

pre $n = 100$ *je* $a_{100} = 100^3 = 1\,000\,000$.

U: Áno, zatiaľ je to dobré. Pokračuj.

Ž: b) *Pre konkrétne prirodzené čísla mi nerobí problém vypočítať hodnotu príslušných členov. Ďalej však nasledujú členy, v ktorých neviem, čo mám dosadiť za n.*

U: Ale veď je to tam presne určené. Keď si počítal hodnotu tretieho člena, tak si za n dosadil trojku. Teraz máš vyjadriť x-tý člen, takže za n dosadíš x. Skús to.

Ž: *Za n dosadím x:*

pre $n = x$ *je* $a_x = x^3$. *To je všetko? Len nahradím premennú n novou premennou?*

U: Áno, novou premennou alebo aj novým výrazom. Uvidíš to pri vyjadrovaní ďalších členov tejto postupnosti.

Ž: *Dobre, ale najprv si vyjadrím tie členy, kde len dosadzujem za n nejaký výraz:*

ak $n = 2x$ *tak* $a_{2x} = (2x)^3 = 8x^3$,

ak $n = x - 1$ *tak* $a_{x-1} = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$,

ak $n = 2x + 5$ *tak* $a_{2x+5} = (2x+5)^3 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$. *Uf.*

U: Potešilo ma, že si si spomenul na vzorce pre tretiu ***mocninu dvojčlena*** $(A \pm B)^3$. Ostalo nám ešte niečo?

Ž: *Potrebujem ešte vyjadriť:* $2a_x$, $a_x - 1$, $2a_x + 5$. *Využijem to, že* $a_x = x^3$*:*

$2a_x = 2x^3$,

$a_x - 1 = x^3 - 1$,

$2a_x + 5 = 2x^3 + 5$.

Nakoniec sa to ukázalo celkom ľahké.

U: A ako by si vyjadril výraz $a_{2x} + 5$?

Ž: *Tak aby sa mi to nepoplietlo. Potrebujem* a_{2x} *zväčšiť o* 5*:*

$$a_{2x} = (2x)^3 = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad a_{2x} + 5 = 8x^3 + 5. \quad \textit{Hotovo.}$$

U: Výborne, zvládol si to.

U: Zatiaľ sme si povedali, že ***postupnosť môže byť daná vymenovaním svojich členov*** alebo ***vzorcom pre n-tý člen***. Ale sú aj iné spôsoby, ako ju určiť.
Postupnosť môže byť daná rekurentne, rekurentným vzťahom.

Ž: *Doteraz to bolo ľahké, ale už sa to zamotáva.*

U: Ani nie. Niekedy totiž poznáme prvý člen alebo niekoľko prvých členov postupnosti a ešte aj predpis ako určiť nasledujúci člen. Nie hneď ľubovoľný člen, ale nasledujúci. Ukážeme si to na príklade.

Ž: *To by bolo dobré, lebo zatiaľ v tom nemám jasno.*

U: ***Vymenuj prvých 5 členov postupnosti, ktorá je daná rekurentným vzťahom:***

$$a_1 = 5, \ a_{n+1} = 3a_n - 8, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ž: *Mám prvý člen:* $a_1 = 5$. *Potrebujem* a_2. *Ako by som tento člen mohol získať?*

U: Za číslom 1 nasleduje číslo 2. Za premennou n nasleduje $n + 1$. Ak $n = 1$, tak $n + 1 = 2$.

Ž: *Myslíte, že by som mal namiesto* a_n *napísať* a_1 *a namiesto* a_{n+1} *napísať* a_2*?*

U: Áno. Do predpisu pre člen a_{n+1} postupne dosadzuj hodnoty $n = 1, 2, 3$ a 4.

Ž: *Dobre. Predpis, do ktorého budem dosadzovať, je:* $a_{n+1} = 3a_n - 8$*. Idem na vec:*

ak $n = 1$ *tak* $a_n = a_1$ *a* $a_{n+1} = a_2$*. Takže:* $a_2 = 3a_1 - 8 = 3 \cdot 5 - 8 = 7,$

ak $n = 2$ *tak* $a_n = a_2$ *a* $a_{n+1} = a_3$*. Takže:* $a_3 = 3a_2 - 8 = 3 \cdot 7 - 8 = 13,$

ak $n = 3$ *tak* $a_n = a_3$ *a* $a_{n+1} = a_4$*. Takže:* $a_4 = 3a_3 - 8 = 3 \cdot 13 - 8 = 31,$

ak $n = 4$ *tak* $a_n = a_4$ *a* $a_{n+1} = a_5$*. Takže:* $a_5 = 3a_4 - 8 = 3 \cdot 31 - 8 = 85.$

Veď ja tomu už rozumiem! Proste vo výpočte hodnoty niektorého člena len použijem hodnotu predchádzajúceho člena.

Prvých 5 členov našej postupnosti je teda: 5, 7, 13, 31 a 85.

U: Výborne. Vymenovať niekoľko prvých členov postupnosti by ti nemalo robiť problém.

Ž: *Ak je postupnosť daná vzorcom pre n-tý člen alebo rekurentným vzťahom, tak vymenovať jej členy viem. A ak mám postupnosť danú vymenovaním členov, tak niekedy, keď sú tie členy rozumné, viem vytvoriť vzorec pre n-tý člen. Vedel by som pomocou vymenovaných členov vytvoriť aj rekurentný vzťah?*

U: To je zaujímavá otázka. Ale dôležitejšie, než vymenovanie členov, je mať rovno vzorec pre n-tý člen. Ak ho máš, potom odpoveď na tvoju otázku je: áno, vždy. Dokonca sa rekurentný vzťah dá zo vzorca pre n-tý člen vytvoriť mnohými spôsobmi.

Ž: *Poviete mi ako?*

U: Obyčajne postupujeme tak, že použitím vzorca pre a_n vyjadríme a_{n+1}. A potom určíme ***rozdiel*** alebo ***podiel členov*** a_{n+1} ***a*** a_n. Z takéhoto vzťahu už len vyjadríme a_{n+1}. Sú však aj iné postupy.

Ž: *Podľa čoho sa mám rozhodnúť či použiť rozdiel alebo podiel? Je nejaké pravidlo, čo je kedy výhodnejšie?*

U: Nie je to pravidlo, ktoré by platilo vždy. Skôr len malá pomôcka: ak sú vo vzorci jednoduchšie operácie (sčítavanie, odčítavanie, násobky, ...), tak je výhodnejšie použiť rozdiel, lebo sa tam možno niečo odpočíta a tým sa to zjednoduší. Pri vyšších operáciách (násobenie, delenie, mocniny, ...), je výhodnejší podiel, lebo sa možno niečo vykráti.

Ž: *Mám v tom poriadny zmätok.*

U: Potom ti odporúčam pozrieť sa do riešenej časti. Tam je dostatok príkladov na vytvorenie rekurentného vzťahu zo vzorca pre n-tý člen.

Ž: *Takže zo vzorca pre n-tý člen sa rekurentný vzťah vyrobiť dá. A čo naopak? Dá sa vytvoriť vzorec pre n-tý člen z rekurentného vzťahu?*

U: Áno. V jednoduchších prípadoch sa vzorec proste odhadne pomocou vypočítaných prvých členov. Ale tento odhad musíme potom overiť matematickou indukciou alebo priamym dôkazom. V riešenej časti nájdeš príklady aj na tento postup.

Ž: *A čo tie zložitejšie prípady?*

U: V zložitejších prípadoch môže byť odhad vzorca veľmi náročný.

Ž: *Tak to sa radšej do toho ani nepúšťajme.*

U: Tentokrát ti vyhoviem. Ešte malý dodatok, týka sa jazykovedy: slovo ***RECCURERE*** je latinské a znamená bežať späť. Ak chcem vypočítať nejaký člen podľa rekurentného vzťahu, potrebujem sa vrátiť späť po predchádzajúci. Pekné, však?

Ž: *No, nie som si istý, či sa to páči aj mne. Znie mi to ako kurare, čo je jed, smrteľná otrava.*

U: Budem sa tváriť, že som to nepočul.

U: Pokračujeme ďalej. Ostáva nám ešte jeden spôsob určenia postupnosti:
Postupnosť, prípadne jej časť, môže byť určená aj graficky, grafom.

Ž: *To by nemal byť problém.* **Grafy funkcií** *ako tak zvládam.*

U: Hneď si to preverím.

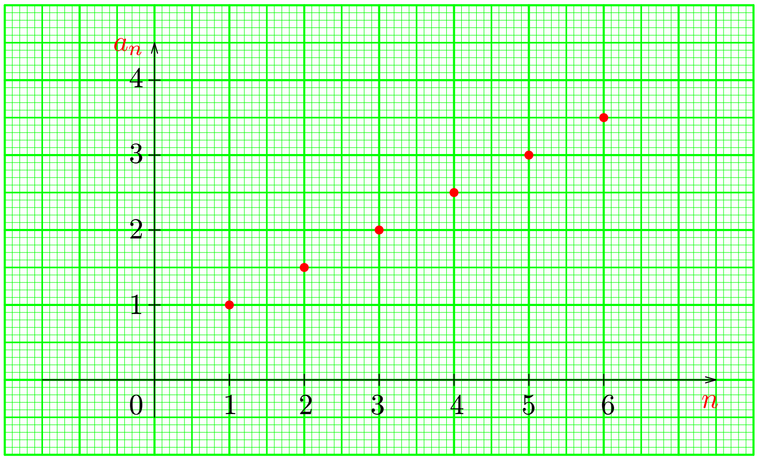
Graficky znázorni postupnosť $\left\{\dfrac{n+1}{2}\right\}_{n=1}^{6}$.

Ž: *Potrebujem súradnicový systém v rovine. Pri funkciách sa* **na vodorovnú x-ovú os** *nanášajú* **prvky definičného oboru***. Teraz to budú len prirodzené čísla, a keďže postupnosť je konečná, tak tam budú znázornené len čísla* 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Na zvislú y-ovú os *sa nanášajú* **funkčné hodnoty***. Tie si najprv vypočítam a potom zapíšem do tabuľky, aby som to mal prehľadnejšie:*

n	1	2	3	4	5	6
$a_n = \dfrac{n+1}{2}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5

A teraz príde vytvorenie grafu:

1. *Narysujem si súradnicový systém v rovine – dve na seba kolmé priamky. Keďže máme len kladné hodnoty, vystačím si s* 1. *kvadrantom.*
2. *Na vodorovnú os x nanesiem čísla* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Jednotka dĺžky môže byť* 1 *cm.*
3. *Na zvislú os y nanesieme hodnoty* 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5. *Jednotka dĺžky na tejto osi môže tiež byť* 1 *cm.*
4. *Vyznačím si všetkých* 6 *bodov so súradnicami $[n, a_n]$, podľa tabuľky.*



Mám tie bodky pospájať?

U: Porozmýšľaj. Ak ich pospájaš, tak by to znamenalo, že vieš priradiť funkčnú hodnotu aj číslu 2,7 alebo číslu 5,1. Máš tieto čísla vo svojom definičnom obore?

Ž: *To nie. Veď definičný obor mi tvorí len prvých* 6 *prirodzených čísel. Aha, takže to nesmiem pospájať. To celý graf bude len týchto* 6 *bodiek?*

U: Áno, celý graf bude len týchto 6 bodov.

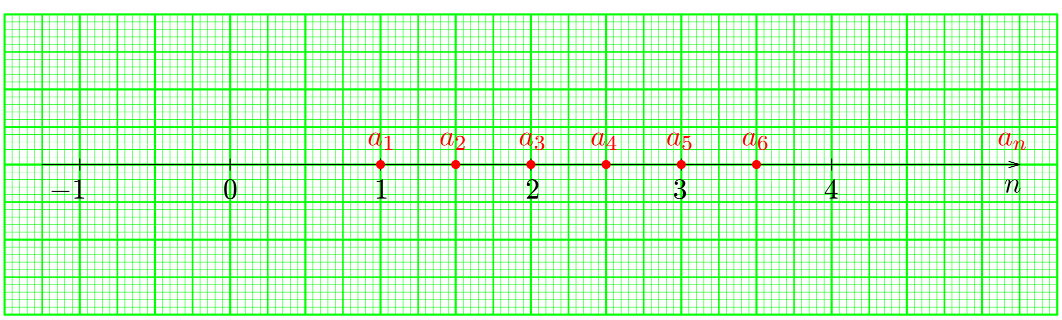
Graf postupnosti je množina izolovaných bodov A_1***,*** A_2***,*** A_3***, . . . , pričom ľubovoľný bod*** A_n ***má súradnice*** $[n, a_n]$***.***

Ž: *Takže graf postupnosti tvoria len samostatné body.*

U: Keďže definičný obor postupnosti tvoria len prirodzené čísla, ***niekedy sa graf neznázorňuje v rovinnom súradnicovom systéme s dvoma osami, ale len na jednej číselnej osi***. Ešte si pamätáš, čo je číselná os?

Ž: *Jasné. Má to v názve* **os***, takže ide o priamku, a keďže je tam aj slovo* **číselná***, tak na tej priamke sú umiestnené čísla.*

U: V podstate máš pravdu. Ale v matematike by sme povedali, že číselná os je priamka s vyznačenou nulou a jednotkou dĺžky. V tom našom príklade by som zväčšil jednotku dĺžky na 2 cm, aby sme to nemali také nahustené. Vyzeralo by to takto:



Ž: *Viac sa mi páči, keď to vidím v rovine, ako na priamke.*

U: To je v poriadku, ak to úloha nebude vyžadovať inak, môžeš robiť grafy, na aké si zvyknutý. Myslím, že na záver by si mi mohol zhrnúť, akými spôsobmi môže byť postupnosť daná, teda určená.

Ž: *Dobre. Postupnosť môže byť určená:*

- **vymenovaním svojich prvkov**
- **vzorcom pre n-tý člen**
- **rekurentným vzťahom**
- **grafom.**

U: Áno. Vidím, že si si to zapamätal. Myslím, že toľko k teórii stačí.

Príklad 1: *Nasledujúce postupnosti sú dané vymenovaním svojich členov. Určte ich definičný obor aj obor hodnôt a narysujte ich grafy:*

a) $5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots,\ 2175.$

b) $-1,\ -4,\ -9,\ -16,\ -25,\ -36,\ \ldots$

c) $5,\ 10,\ 15,\ 5,\ 10,\ 15,\ 5,\ 10,\ 15.$

d) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

Ž: **a)** *V prvom príklade mám dané hodnoty* $\mathbf{5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots,\ 2175}$. *Ide o konečnú postupnosť nepárnych čísel. Je ich …koľko vlastne? Kým nebudem vedieť koľko ich je, tak nebudem vedieť určiť definičný obor.*

U: Presne tak. V tomto príklade som ti naschvál zadal veľa členov, aby si ich počet zistil výpočtom a nie postupným vymenovávaním.

Ž: *Aha, tak dobre. Prvý člen je* 5*, posledný je* 2175*. Keby to boli všetky prirodzené čísla idúce za sebou, tak by ich bolo* $2175 - 5 = 2170$*. Ale keďže sú to len nepárne čísla, teda každé druhé, tak ich je len polovica.* $2170 : 2 = 1085$.

U: Trošku zastav. Koľko je nepárnych čísel od 1 do 9?

Ž: *No predsa* 5 *a to:* $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$.

U: Áno, ale podľa tvojho výpočtu by mali byť len 4. Počítal by si: $9 - 1 = 8$ a $8 : 2 = 4$.

Ž: *Ako je to možné? Kde som urobil chybu?*

U: Pri odpočítaní si totiž odpočítal aj tú ľavú hranicu, číslo, ktorým postupnosť začína. Tento postup je správny, len musíš to počiatočné číslo znovu vrátiť do hry.

Ž: *Dobre, takže čísel bude* $1085 + 1 = 1086$*. Tento počet mi pomôže určiť definičný obor:*
$\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4,\ \ldots, 1086\}$,
$\mathcal{H} = \{5, 7, 9, 11,\ \ldots, 2175\}$.
Môžem prejsť na graf?

U: Áno, ale najprv si zapíš dvojice vzor-obraz do tabuľky, aby si to mal prehľadnejšie.

Ž:

$n \in \mathcal{D}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	1086
$a_n \in \mathcal{H}$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	…	2075

Teraz príde vytvorenie grafu. Na vodorovnú os budem nanášať prirodzené čísla, jednotka dĺžky môže byť 1 *cm. Na zvislú os budem nanášať hodnoty* a_n*. Tu mi to stúpa trošku rýchlejšie, asi by som mal zvoliť inú jednotku dĺžky, len neviem akú.*

U: Zvoľ si napríklad 1 mm. To znamená, že na dĺžke 1 cm budeš mať 10 čísel. Inú jednotku si volíme preto, aby bol graf prehľadnejší a nezabral ani málo ani príliš veľa miesta.

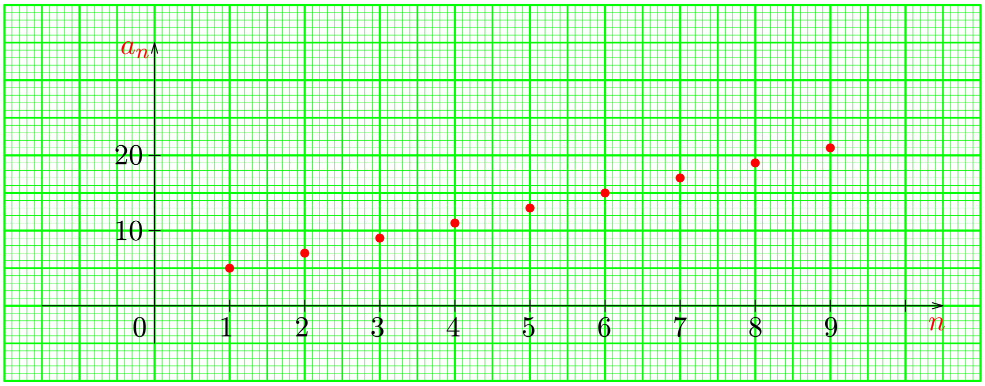
Ž: *To je dôležité?*

U: Pravdaže. Ak je definičný obor príliš veľký, nenarysuješ celý graf – to by nebolo možné. Vyrobíš len grafickú informáciu o tom, ako vyzerá jeho časť a uvedené obory $\mathcal{D}$ a $\mathcal{H}$ dopovedia, kam až graf pokračuje. Z toho pomerne malého znázorneného úseku by si mal vedieť získať predstavu o tom, ako vyzerá celý graf, tak nech je ten úsek prehľadný.

Ž: *Aha, veď vlastne aj pri funkciách s nekonečne veľkým definičným oborom rysujem len časť.*

U: Presne. Tak už ten graf narysuj.

Ž: *Dobre, tu je:*



U: Pekné, môžeš prejsť na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť daná členmi:* $-1, -4, -9, -16, -25, -36, \ldots$ *je nekonečná. Definičný obor bude celá množina prirodzených čísel a obor hodnôt bude tvorený číslami, ktoré predstavujú druhé mocniny prirodzených čísel, len so záporným znamienkom:*

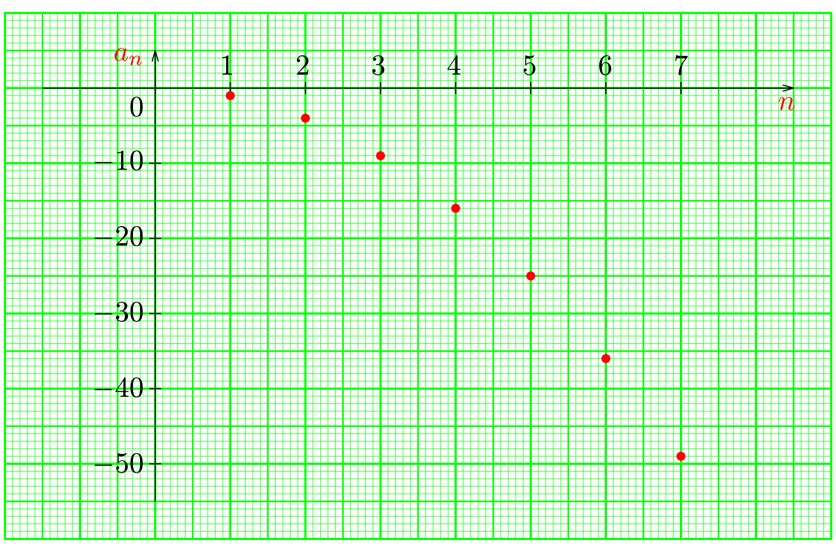
$\mathcal{D} = \mathbb{N}$,

$\mathcal{H} = \{-1, -4, -9, -16, -25, \ \ldots\}$.

Vytvorím tabuľku:

$n \in \mathcal{D}$	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n \in \mathcal{H}$	-1	-4	-9	-16	-25	-36	-49	...

Teraz graf. Na vodorovnej osi si vystačím s jednotkou dĺžky 1 cm, na zvislej osi budem potrebovať hlavne jej zápornú časť, to zhustím na 1 mm.

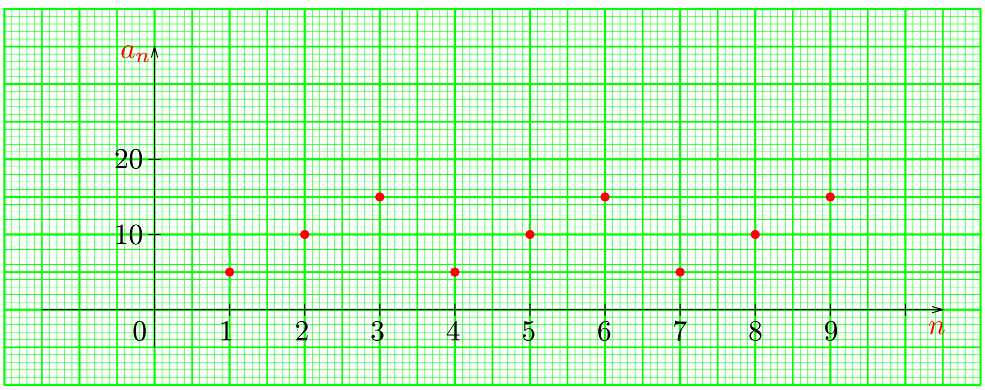


U: Dobre, to si zvládol.

Ž: **c)** *Vyzerá to byť ľahké. Postupnosť je daná členmi:* 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, 10, 15. *Ide o konečnú, 9-člennú postupnosť, jej obor hodnôt má len 3 hodnoty:*
$\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{H} = \{5, 10, 15\}$.
Tabuľka vyzerá takto:

$n \in \mathcal{D}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_n \in \mathcal{H}$	5	10	15	5	10	15	5	10	15

Jednotky dĺžky na osiach zvolím ako v predchádzajúcich prípadoch: 1 *cm a* 1 *mm.*
Graf bude vyzerať takto:



U: Áno, asi to naozaj bolo ľahké. Nemal by si mať problémy ani s poslednou časťou.

Ž: **d)** *Postupnosť je daná členmi:* 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... *Je to nekonečná postupnosť, obory sú dané takto:*
$\mathcal{D} = \mathbb{N}$,
$\mathcal{H} = \{-1, +1\}$
Teraz tabuľka:

$n \in \mathcal{D}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$a_n \in \mathcal{H}$	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	...

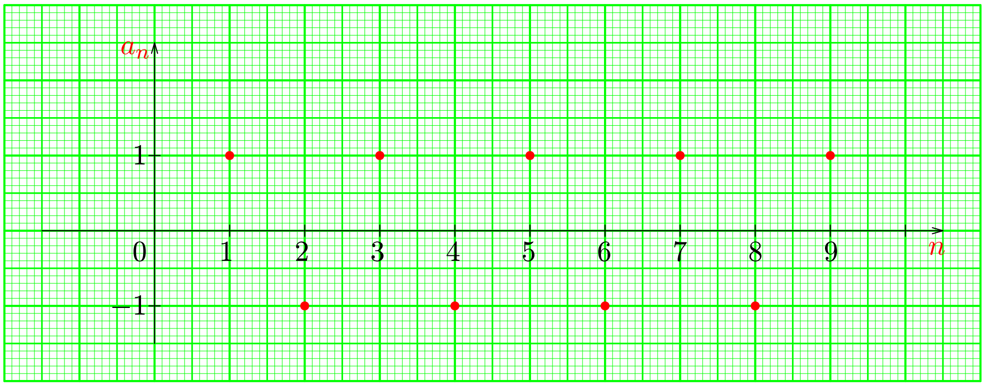
Jednotky dĺžky pre vodorovnú a zvislú os môžu byť 1 *cm.*

U: Áno. Hovoril som ti, že graf má byť prehľadný, to znamená, že si môžeš – máš zvoliť také jednotky dĺžky, aby obrázok nebol príliš roztiahnutý alebo naopak, príliš vtesnaný do malej plochy. V tomto prípade si môžeš voliť jednotku dĺžky na zvislej osi 1 cm, ale môže to byť aj viac. Aby tvoje body neboli príliš blízko vodorovnej osi.

Ž: *Nechám si* 1 *cm.*

U: Vporiadku.

Ž: *Takže tu je graf:*



U: Pekne si to zvládol.

Úloha :

Nasledujúce postupnosti sú dané vymenovaním svojich členov. Určte ich definičný obor, obor hodnôt, vzorec pre n-tý člen a načrtnite ich grafy:

a) $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ 7,\ \dots$

b) $3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

c) $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2.$

d) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \dots$

Výsledok:

a) $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{H} = \{1, 3, 5, 7,\ \dots\} \cup \{-2, -4, -6, -8,\ \dots\}$, $a_n = n.(-1)^{n+1}$.

b) $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathcal{H} = \{0, 1, 2, 3\}$, $a_n = |4 - n|$.

c) $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{H} = \{2\}$, $a_n = 2$.

d) $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{H} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}, \frac{1}{64},\ \dots\right\}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Príklad 2: *Vypočítajte súčet prvých šiestich členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je daná vzorcom pre n-tý člen:*

a) $a_n = \sin \dfrac{n \cdot \pi}{2}$,

b) $a_n = n^2 - 2^n$.

Ž: **a)** *Vypíšem si prvých 6 členov postupnosti danej vzorcom:* $a_n = \sin \dfrac{n \cdot \pi}{2}$.

Dostal by som hodnoty: $\sin \dfrac{1 \cdot \pi}{2}$, $\sin \dfrac{2 \cdot \pi}{2}$, $\sin \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$, $\sin \dfrac{4 \cdot \pi}{2}$, $\sin \dfrac{5 \cdot \pi}{2}$, $\sin \dfrac{6 \cdot \pi}{2}$.

Ajaj, a teraz si musím spomenúť na goniometriu a nejak to vyčísliť.

U: Spomeň si na graf funkcie sínus – ***sínusoidu***. Možno ti to pomôže.

Ž: *V každom celom násobku čísla π pretína sínusoida os x. A medzi týmito priesečníkmi nadobúda svoje najväčšie a najmenšie hodnoty $+1$ a -1.*

U: Áno, pre nepárne násobky čísla $\dfrac{\pi}{2}$. Tak už to skús vyčísliť.

Ž: *Pre* $n = 1 \;\ldots\; a_1 = \sin \dfrac{1 \cdot \pi}{2} = +1$,

pre $n = 2 \;\ldots\; a_2 = \sin \dfrac{2 \cdot \pi}{2} = \sin \pi = 0$,

pre $n = 3 \;\ldots\; a_3 = \sin \dfrac{3 \cdot \pi}{2} = -1$,

pre $n = 4 \;\ldots\; a_4 = \sin \dfrac{4 \cdot \pi}{2} = \sin 2\pi = 0$,

pre $n = 5 \;\ldots\; a_5 = \sin \dfrac{5 \cdot \pi}{2} = \sin \dfrac{\pi}{2} = +1$,

pre $n = 6 \;\ldots\; a_6 = \sin \dfrac{6 \cdot \pi}{2} = \sin 3\pi = 0$.

U: Správne. A ešte ten súčet.

Ž: *Takže vypočítam:* $+1 + 0 + (-1) + 0 + 1 + 0 = 1$.
A je to.

U: Dobre, prejdi na druhú časť príkladu.

Ž: **b)** *V tomto príklade mám postupnosť danú vzorcom:* $a_n = n^2 - 2^n$. *Budem najprv dosadzovať a výpočtom získavať hodnoty prvých šiestich členov postupnosti.*

Pre $n = 1 \;\ldots\; a_1 = 1^2 - 2^1 = 1 - 2 = -1$,
pre $n = 2 \;\ldots\; a_2 = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$,
pre $n = 3 \;\ldots\; a_3 = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = +1$,
pre $n = 4 \;\ldots\; a_4 = 4^2 - 2^4 = 16 - 16 = 0$,
pre $n = 5 \;\ldots\; a_5 = 5^2 - 2^5 = 25 - 32 = -7$,
pre $n = 6 \;\ldots\; a_6 = 6^2 - 2^6 = 36 - 64 = -28$.

Toto počítanie sa mi páčilo. Urobím ešte súčet:
$(-1) + 0 + 1 + 0 + (-7) + (-28) = -35$.

U: Toto počítanie sa páčilo aj mne. Vyriešil si príklad bez jedinkého zaváhania.

Úloha 1:

Vypočítajte súčet prvých štyroch členov postupnosti $\left\{\dfrac{n^2-3\cdot n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok:

$-\dfrac{13}{15}$.

Úloha 2:

Vypočítajte súčin prvých piatich členov postupnosti $\left\{\dfrac{3+(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok:

$\dfrac{16}{15}$.

Príklad 3: *Členmi postupnosti* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú prirodzené čísla, ktoré pri delení číslom* 5 *dávajú zvyšok* 2.

a) Vypíšte aspoň 10 *prvých členov tejto postupnosti.*

b) Nájdite a zapíšte vzorec – predpis pre n*-tý člen postupnosti.*

c) Určte pomocou vzorca hodnotu šesťdesiateho druhého člena postupnosti.

d) Ktorý člen postupnosti má hodnotu 62*?*

Ž: **a)** *To by som mal zvládnuť. Budem zväčšovať násobky čísla* 5 *o* 2 *a dostanem členy postupnosti:*

$1 \cdot 5 + 2 = 5 + 2 = \mathbf{7}$,
$2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = \mathbf{12}$,
$3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = \mathbf{17}$,
$4 \cdot 5 + 2 = 20 + 2 = \mathbf{22}$,
$5 \cdot 5 + 2 = 25 + 2 = \mathbf{27} \dots$

Všetky členy sa budú končiť na sedmičku alebo na dvojku, pretože všetky násobky čísla 5 *končia na nulu alebo päťku.*

U: Zabudol si na číslo 2. Aj to dáva pri delení päťkou zvyšok 2.

Ž: *Aha, naozaj.*
$0 \cdot 5 + 2 = \mathbf{2}$,
Postupnosť môžem pomocou jej členov určiť takto:
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57\ \dots\}$

U: Dobre. Teraz skús vytvoriť vzorec pre n-tý člen.

Ž: **b)** *Ten vzorec som už vlastne používal pri vypočítavaní hodnôt členov postupnosti. Potrebujem do vzorca zapísať, že najprv násobím päťkou a potom tento násobok zväčšujem o* 2. *Skúsim takto:*
$b_n = n \cdot 5 + 2$. *Bude to stačiť?*

U: Nie, opäť si pozabudol, že aj číslo 2 tam patrí. A to z tvojho vzorca nedostanem. Pre $n = 1$, teda pre najmenšie prirodzené číslo, dostaneš ako prvú hodnotu – číslo 7. Musíš ten vzorec upraviť tak, aby si ako prvý nevytvoril „jednonásobok“, ale „nulanásobok“.

Ž: *Čiže nechcem hneď* $1{\cdot}5$, *ale najprv* $0{\cdot}5$. *Dobre. Vo vzorci nepoužijem súčin* $n{\cdot}5$, *ale znížim hodnotu poradového čísla* n *o* 1. *Vytvorím súčin* $(n-1) \cdot 5$. *Vzorec bude potom vyzerať takto:*
$b_n = (n-1) \cdot 5 + 2$. *Alebo presnejšie:* **pre** $\forall n \in \mathbb{N}$**:** $b_n = 5{\cdot}(n-1) + 2$.

U: Áno, teraz je to správne.

Ž: **c)** *Mám určiť hodnotu šesťdesiateho druhého člena. Teda ak* $n = 62$, *koľko je* b_n*? Dosadím si do vzorca pre* n*-tý člen za poradové číslo* n *hodnotu* 62*:*
$b_{62} = (62-1) \cdot 5 + 2 = 61 \cdot 5 + 2 = 305 + 2 = \mathbf{307}$.

U: To nebolo ťažké,však? Ostala ti už len posledná časť príkladu.

Ž: **d)** *Ktorý člen má hodnotu* 62*? Teraz som trošku zapochyboval, či to predchádzajúce riešenie je dobré. Hodnota* 62 *a* 62*. člen asi nie je to isté.*

U: To máš pravdu. Hodnotu šesťdesiateho druhého člena si už vypočítal. A správne. Teraz máš zistiť, ktorý člen má hodnotu 62.

Ž: *Takže teraz musím zvoliť opačný postup. Číslo* 62 *nie je poradové číslo, ale hodnota* b_n*, pre nejaké, ešte neviem aké,* n*.*
Dosadím si do vzorca za b_n *a vyriešim rovnicu:*

$$\boxed{\begin{array}{l} b_n = 5 \cdot (n-1) + 2 \\ 62 = 5 \cdot (n-1) + 2 \;/\; -2 \\ 60 = 5 \cdot (n-1) \;/\; :5 \\ 12 = n - 1 \;/\; +1 \\ \;n = 13 \end{array}}$$

Hotovo. Hodnotu 62 *má* **trinásty člen** *tejto postupnosti.*

U: Bolo to pekné. Zaslúžiš si pochvalu.

Úloha :

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná vzorcom pre n-tý člen:*

$$a_n = \frac{n^2+9}{n}.$$

a) Zistite, ktorý jej člen má hodnotu 10.
b) Určte hodnotu desiateho člena tejto postupnosti.

Výsledok*:*

a) a_1, a_9.
b) $a_{10} = \dfrac{109}{10} = 10{,}9$.

Príklad 4: *Postupnosť* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná rekurentným vzťahom. Určte jej prvých 5 členov a znázornite ich na číselnej osi:*

a) $c_1 = 5, \quad c_{n+1} = c_n - 4, \quad n \in \mathbb{N}$,

b) $c_1 = -1, \quad c_2 = 3, \quad c_{n+2} = \dfrac{c_n + c_{n+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$.

U: Najprv mi povedz, čo je to ***rekurentný vzťah***.

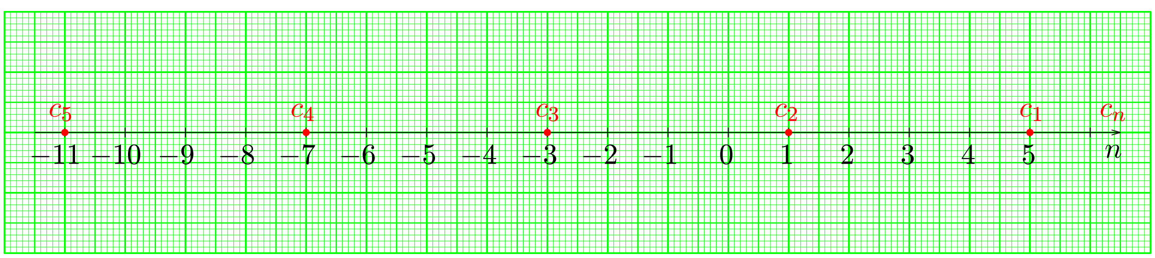
Ž: *To je predpis, ktorým viem vypočítať nejaký člen postupnosti pomocou hodnoty jedného predchádzajúceho člena alebo viacerých predchádzajúcich členov.*

U: Dobre. Ako budeš postupovať v tomto príklade?

Ž: **a)** *Postupnosť je daná rekurentne:* $c_1 = 5$, $c_{n+1} = c_n - 4$. *Takže:*
$c_2 = c_1 - 4 = 5 - 4 = 1$,
$c_3 = c_2 - 4 = 1 - 4 = -3$,
$c_4 = c_3 - 4 = -3 - 4 = -7$,
$c_5 = c_4 - 4 = -7 - 4 = -11$.
Prvých 5 *členov rekurentne danej postupnosti* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je teda:* $5, \ 1, \ -3, \ -7, \ -11$.

U: Dobre, teraz znázorni tieto hodnoty na číselnej osi.

Ž: *Narysujem si priamku. Keďže moje hodnoty sú od* -11 *do* $+5$, *tak ako jednotka dĺžky bude stačiť* 1 *cm. Priamku podielikujem, očíslujem a zvýrazním umiestnenie členov postupnosti:*



U: Dobre, poď na príklad b).

Ž: *b) V tomto príklade sú v rekurentnom vzťahu dané až dva konkrétne členy:* $c_1 = -1$, $c_2 = 3$ *a predpis pre každý ďalší člen je* $c_{n+2} = \dfrac{c_n + c_{n+1}}{2}$. *Takže pre výpočet hodnoty ľubovoľného člena potrebujem predchádzajúce dva členy postupnosti. Už viem ako na to:*

$$c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_3}{2} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_4}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

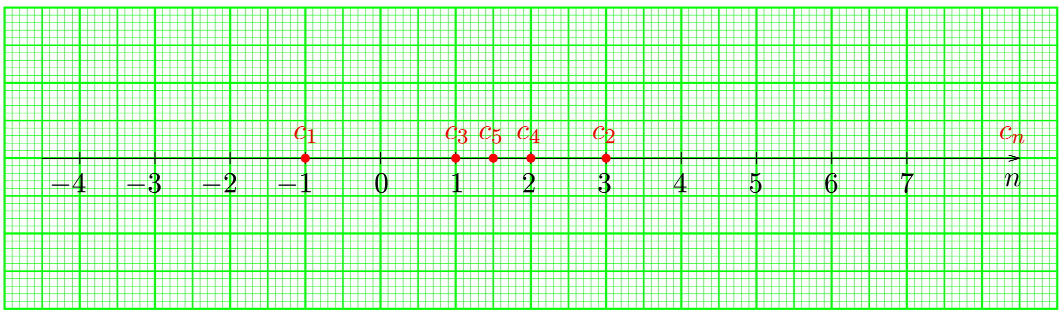
Myslím, že som neurobil numerickú chybu, takže prvých 5 *členov postupnosti je:*
$-1; \ 3; \ 1; \ 2; \ 1{,}5$.

U: Hodnoty si vypočítal správne. Všimol si si, čo vlastne počítaš? Pripomína ti niečo vzorček pre nasledujúci člen?

Ž: *V tom vzorci spočítam dve predchádzajúce hodnoty a vydelím dvoma. Súčet dvoch čísel rozdelím na polovicu. Aha, veď je to* **aritmetický priemer** *dvoch hodnôt.*

U: Správne. A aritmetický priemer dvoch čísel leží v strede medzi nimi. Uvidíš to pekne v grafe – na číselnej osi. Každá ďalšia hodnota bude ležať presne v prostriedku medzi predchádzajúcimi dvoma hodnotami.

Ž: *Vykonám:*



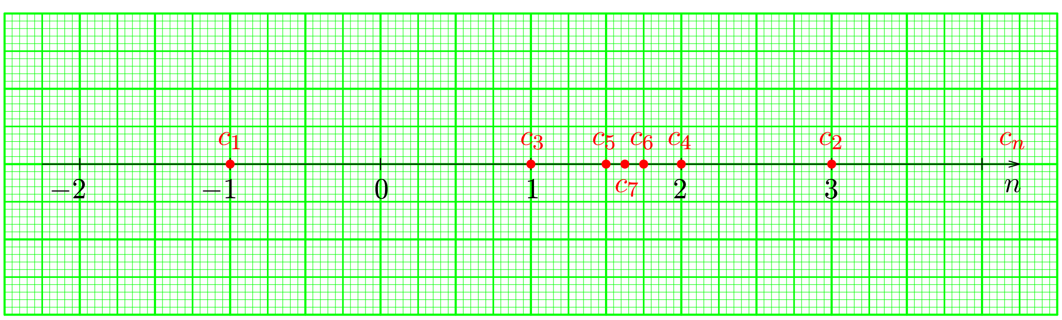
Je to akoby som ostreľoval terč vždy s väčšou presnosťou. Dobre že som mal vypočítať len prvých 5 členov, s ďalšími by som to už mal riadne nahusto. Musel by som natiahnuť číselnú os.

U: Áno. Musel by si si zvoliť inú jednotku dĺžky, napríklad 2 alebo 3 cm. Urob to a vypočítaj ešte ďalšie dva členy. Na ten nový obrázok ti vojdú.

Ž: $c_6 = \dfrac{c_4 + c_5}{2} = \dfrac{2 + 1,5}{2} = \dfrac{3,5}{2} = 1,75,$

$c_7 = \dfrac{c_5 + c_6}{2} = \dfrac{1,5 + 1,75}{2} = \dfrac{3,25}{2} = 1,625.$

U: Dobre. Vytvor teraz novú číselnú os.



U: Myslím, že tento príklad si zvládol celkom slušne.

Úloha 1:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná rekurentným vzťahom:*

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2{\cdot}a_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aký je súčet prvých piatich členov tejto postupnosti?

Výsledok:

57.

Úloha 2:

Napíšte prvých šesť členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *danej rekurentným vzťahom:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}{\cdot}a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

pričom hodnotu člena a_1 *udáva koreň rovnice:*

$$\frac{x^4 + x^3}{(x+2)\cdot(x-1)} = x^2 + 2$$

Výsledok:

$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}.$

Príklad 5: *Vyjadrite rekurentne postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je daná vzorcom pre n-tý člen:*

a) $d_n = 2\cdot n$,

b) $d_n = 5^{3-n}$,

c) $d_n = \dfrac{n+1}{n}$ *(náročnejší príklad).*

U: Najprv mi zopakuj, čo je to vlastne ten ***rekurentný vzťah***.

Ž: *Je to predpis, vďaka ktorému viem vypočítať nejaký člen postupnosti pomocou hodnoty predchádzajúceho člena.*

U: Áno. Budeš teda pracovať s dvojicou členov, ktoré za sebou nasledujú. S členom d_n a s členom d_{n+1}.

Ž: **a)** *Vzorec pre n-tý člen je daný:* $d_n = 2\cdot n$. *Vzorec pre člen d_{n+1} dostanem zo vzorca pre d_n tak, že v ňom nahradím premennú n výrazom $n+1$ a poprípade upravím vzniknutý výraz.*
$d_n = 2\cdot n,$
$d_{n+1} = 2\cdot(n+1) = 2\cdot n + 2.$

U: Ak tieto dva predpisy máš, musíš ich spojiť niektorou matematickou operáciou.

Ž: *Použijem rozdiel:*

$$d_{n+1} - d_n = 2\cdot n + 2 - 2\cdot n = 2.$$

Odtiaľ dostanem, že $d_{n+1} = 2 + d_n$. *Prvý člen tejto postupnosti má hodnotu:* $d_1 = 2\cdot 1 = 2$. *Rekurentný vzťah je teda daný takto:*

$$d_1 = 2,\ \ d_{n+1} = 2 + d_n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

U: Vieš o akú postupnosť išlo? Vymenuj mi zopár jej členov pomocou vzorca pre n-tý člen.

Ž: *Vyrábam dvojnásobok poradového čísla:* 2, 4, 6, 8, 10, $\ldots$ *samé párne čísla.*

U: Áno, dostaneš ich aj pomocou tvojho rekurentného vzťahu?

Ž: *Jasné, veď susedné párne čísla sa od seba líšia o hodnotu 2. Pekne mi to vyšlo.*

U: Tak nech ti to tak vyjde aj pri ďalšom príklade.

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen* $d_n = 5^{3-n}$. *Jej členy sú mocniny päťky:*
$25,\ 5,\ 1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{125}\ \ \ldots$

U: Ako dostaneš ďalšiu hodnotu v poradí?

Ž: *Päťkrát zväčším menovateľa, takže vlastne predchádzajúci zlomok vydelím päťkou.*

U: Správne. To by sa ti malo ukázať aj v rekurentnom vzťahu.

Ž: *Pripravím si teda vzorce pre d_n a pre d_{n+1}:*
$d_n = 5^{3-n},$
$d_{n+1} = 5^{3-(n+1)} = 5^{3-n-1} = 5^{2-n}.$

Teraz skúsim podiel:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{5^{2-n}}{5^{3-n}} = 5^{(2-n)-(3-n)} = 5^{2-n-3+n} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

Pre člen d_{n+1} platí: $d_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot d_n$. Prvý člen je $d_1 = 25$, takže rekurentný vzťah pre túto postupnosť bude:

$$d_1 = 25,\ d_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot d_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

U: Výborne. Ostala nám tretia časť príkladu. Bude to trošku náročnejšie, tak sa poriadne sústreď.

Ž: *Ale veď ja sa stále poriadne sústredím, len nie vždy na matematiku...*

Ž: **c)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen $d_n = \frac{n+1}{n}$. Jej členy sú zlomky:*

$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \ldots$ *Vidím, že stále zväčšujem čitateľa aj menovateľa o 1, ale ako to zapíšem nejakým vzorcom, to v tejto chvíli netuším.*

U: Priamo odhadnúť vzťah medzi susednými členmi sa nám asi nepodarí. Aspoň vidíš, že matematické odvodenie je nutné.

Ž: *Vytvorím si teda vzorec pre d_{n+1}:*

$$d_n = \frac{n+1}{n},$$
$$d_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Mám v takýchto príkladoch problém rozhodnúť sa, či použiť rozdiel alebo podiel týchto dvoch členov. Je nejaké pravidlo, kedy je čo výhodnejšie?

U: Nie je to pravidlo, ktoré by platilo vždy. Skôr len malá pomôcka - ak sa v tvojich členoch sčítava, odčítava, robia sa násobky, ..., tak je asi výhodnejšie použiť rozdiel, lebo sa tam možno niečo odpočíta a tým sa to zjednoduší. A ak sa v členoch vyskytujú aj vyššie operácie – násobenie, delenie, mocniny, ..., tak je asi vhodnejší podiel, lebo sa ti možno niečo vykráti.

Ž: *Dobre, tak skúsim urobiť podiel:*

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{(n+2) \cdot n}{(n+1) \cdot (n+1)} = \frac{(n+2) \cdot n}{(n+1)^2}.$$

Pre člen d_{n+1} bude teda platiť: $d_{n+1} = \frac{(n+2) \cdot n}{(n+1)^2} \cdot d_n$. Toto má byť výsledný vzťah?

U: Toto je príklad, v ktorom sa potvrdilo, že nemôžeš jednoznačne vymedziť použitie rozdielu alebo podielu.

Ž: *Mám to skúsiť s rozdielom?*

U: Môžeš, dostaneš trošku jednoduchší vzťah, ale tým príklad ešte neskončí. Urob ten rozdiel, potom ti vysvetlím o čom hovorím.

Ž: *Takže budem odpočítavať:*

$$d_{n+1} - d_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)\cdot n - (n+1)^2}{n\cdot(n+1)} = \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n\cdot(n+1)} = -\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Odtiaľ dostanem, že $d_{n+1} = d_n - \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$. *To sa mi páči viac než vzťah, ktorý som dostal z podielu.*

U: Najprv ti musím povedať, že rôznymi úpravami sa dá aj ten prvý výsledný vzťah upraviť na takýto tvar. Ale to, čo mi prekáža, je, že v obidvoch odvodených vzorcoch sa na pravej strane okrem člena d_n vyskytuje aj index n.

Ž: *A čo s tým teraz? Dá sa to nejak prerobiť, aby tam tá premenná* n *nebola?*

U: Dá. Ukážeme si to. Zo vzorca pre n-tý člen postupnosti si najprv vyjadríme premennú n. Takto:

$$d_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Odtiaľ

$$\frac{1}{n} = d_n - 1 \quad \textit{a teda} \quad n = \frac{1}{d_n - 1}.$$

Tento vzťah budeme potrebovať.

Ž: *Môžem vas prerušiť? Aby ste osamostatnili premennú* n, *delili ste výrazom* $d_n - 1$, *aby ste ho dostali do menovateľa zlomku. Môže sa to? Učili sme sa predsa, že* **deliť môžme len nenulovým výrazom**. *A čo ak tento výraz bude mať niekedy hodnotu* 0 *?*

U: Som rád, že sa na to pýtaš. Rozoberieme si to. Kedy by bol výraz $d_n - 1$ rovný nule?

Ž: *No, predsa, ak bude* $d_n = 1$.

U: Dobre. A kedy bude d_n rovné 1?

Ž: *Pozriem sa na vzorec pre* d_n. *Aha, mám ho,* $d_n = \dfrac{n+1}{n}$, *takže* d_n *sa bude rovnať* 1, *ak zlomok* $\dfrac{n+1}{n}$ *sa bude rovnať* 1.

U: A kedy bude zlomok $\dfrac{n+1}{n}$ rovný 1?

Ž: *Ak sa jeho čitateľ bude rovnať menovateľu. A teraz vidím, že to nenastane nikdy, lebo čitateľ bude vždy o* 1 *väčší než menovateľ. Nikdy nebudú mať rovnakú číselnú hodnotu, takže môžme deliť bez obáv.*

U: Pokračujem. Vyjadrenie premennej n si dosadíme do vzorca pre d_{n+1}:

$$d_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{\dfrac{1}{d_n-1}+2}{\dfrac{1}{d_n-1}+1} = \frac{\dfrac{1+2\cdot(d_n-1)}{d_n-1}}{\dfrac{1+1\cdot(d_n-1)}{d_n-1}} = \frac{\dfrac{2\cdot d_n-1}{d_n-1}}{\dfrac{d_n}{d_n-1}} = \frac{2\cdot d_n-1}{d_n}.$$

Tento vzťah si môžeme (ale nemusíme) upraviť na tvar:

$$d_{n+1} = 2 - \frac{1}{d_n}.$$

Ž: *Tak toto bola poriadna fuška, ešte šťastie, že som to nemusel robiť sám.*

U: Áno, tento príklad bol náročnejší. Ukonč ho.

Ž: *Po mnohých úpravách sme teda dostali rekurentný vzťah, ktorý neobsahuje premennú n, iba predchádzajúci člen d_n. Postupnosť bude daná takýmto rekurentným vzťahom:*

$$d_1 = 2,\ \ d_{n+1} = 2 - \frac{1}{d_n},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Úloha :

Vyjadrite rekurentným vzťahom postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\log(n!)\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok:

$a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + \log(n+1),\ n \in \mathbb{N}$.

(návod: použite rozdiel členov a_{n+1} a a_n a využite vlastnosť logaritmu podielu)

Príklad 6: *Vyjadrite rekurentne postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ktorá je daná vzorcom pre* n*-tý člen:*

a) $a_n = 10n + 30$,

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$.

U: Najprv mi povedz, čo je to vlastne ten ***rekurentný vzťah***.

Ž: *Je to predpis, pomocou ktorého viem vypočítať nejaký člen postupnosti pomocou hodnoty predchádzajúceho člena.*

U: Áno. Budeš teda pracovať s dvojicou členov, ktoré za sebou nasledujú. S členom a_n a s členom a_{n+1}.

Ž: **a)** *Vraveli ste, že si mám najprv vyjadriť člen* a_{n+1}*. To znamená, že do vzorca pre* a_n *dosadím namiesto premennej* n *výraz* $n+1$ *a upravím čo mi vznikne:*

$a_n = 10n + 30,$

$a_{n+1} = 10\cdot(n + 1) + 30 = 10n + 40.$ *To by bolo. Čo teraz?*

U: Teraz sa musíš rozhodnúť, či chceš použiť rozdiel alebo podiel týchto dvoch členov.

Ž: *Podľa čoho sa mám rozhodnúť? Je nejaké pravidlo, čo je kedy výhodnejšie?*

U: Nie je to pravidlo, ktoré by platilo vždy. Skôr len malá pomôcka: ak sú vo vzorci jednoduchšie operácie (sčítavanie, odčítavanie, násobky, ...), tak je výhodnejšie použiť rozdiel, lebo sa tam možno niečo odpočíta a tým sa to zjednoduší. Pri vyšších operáciách (násobenie, delenie, mocniny, ...), je výhodnejší podiel, lebo sa možno niečo vykráti.

Ž: *Tak ja by som teraz využil rozdiel. Zdá sa mi to jednoduchšie:*

$$a_{n+1} - a_n = (10n + 40) - (10n + 30) = 10n + 40 - 10n - 30 = 10.$$

A teraz už len z tohto vzťahu vyjadrím člen a_{n+1}*:* $a_{n+1} = a_n + 10$.
To už je hotový rekurentný vzťah?

U: To teda nie. Ak by si totiž pre postupnosť mal len vzťah: $a_{n+1} = a_n + 10$, vedel by si vymenovať zopár jej členov?

Ž: *Hops. Nevedel, lebo nemám začiatok. Aspoň jeden člen, od ktorého by som sa mohol odpichnúť k nasledujúcim.*

U: Áno. A najlepšie bude, keď ten jeden konkrétny člen bude prvý člen. Rozumieš?

Ž: *Jasné, potrebujem začiatok nite. Takže podľa vzorca pre člen* a_n *dopočítam ešte aj* a_1*:*

$a_1 = 10 \cdot 1 + 30 = 40.$ *Toto by už malo postačovať.*

U: Aj postačuje. Naša postupnosť je daná rekurentne takto:

$$a_1 = 40, \quad a_{n+1} = a_n + 10, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ešte sa pri tomto príklade trošku zdržíme. Vypočítaj hodnoty aspoň prvých piatich členov tejto postupnosti pomocou vzorca pre n-tý člen.

Ž: *Vzorec pre n-tý člen je:* $a_n = 10 \cdot n + 30$. *Ak budem postupne dosadzovať za n prirodzené čísla, dostanem takéto hodnoty:* $40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, \ldots$ *Stačí?*

U: Áno. Tie isté čísla dostaneme aj použitím rekurentného vzťahu. Je dobré mať predstavu, aké čísla tvoria postupnosť a overiť si aspoň na niekoľkých prvých členoch platnosť rekurentného vzťahu.

Ž: *A nemohol som to takto urobiť hneď? Nezdržiavať sa odvodzovaním vzťahu, ale napísať si niekoľko členov a z nich vyrobiť rekurentný vzťah?*

U: To nie. Niekedy sa rekurentný vzťah nedá určiť len nejakým pozeraním na konkrétne čísla. A keby aj, bola by to len hypotéza. Platnosť vzorca pre všetky členy ti zaručí len matematické odvodzovanie alebo dokazovanie.

Ž: *Ak sa v ňom nepomýlim.*

U: Samozrejme. Prejdime na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$. *Vzorec pre člen* a_{n+1} *dostanem tak, že vo vzorci pre* a_n *namiesto premennej* n *proste dosadím výraz* $n+1$*:*

$a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^{n+1}$. *To by bolo.*

U: Dobre, teraz sa rozhodni, či použiješ podiel alebo rozdiel členov a_{n+1} a a_n.

Ž: *Hm. Mám zložitejšie operácie. Skúsim použiť podiel:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^{n+1}}{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^{n}} = \sqrt{2} - 1.$$

Pekne sa to všetko vykrátilo. Teraz si vyjadrím člen a_{n+1}*:* $a_{n+1} = a_n \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$.
Rekurentný predpis pre danú postupnosť je teda:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right), \quad a_{n+1} = a_n \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

U: Postupoval si pekne a samostatne.

Úloha :

Vyjadrite rekurentným vzťahom postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{10^{2n-3}\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok*:*

$a_1 = \dfrac{1}{10}$, $a_{n+1} = 100 \cdot a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
(návod: použite podiel členov a_{n+1} *a* a_n*)*

Príklad 7: *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná rekurentným vzorcom*

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Určte vzorec pre jej n*-tý člen a dokážte jeho platnosť.*

Ž: *Tak čo to tu máme? Je daný* **rekurentný vzťah** *a z neho potrebujem dostať vzorec pre* n*-tý člen.*

U: Pamätáš sa, ako máš postupovať?

U: Myslím, že by som si mal najprv napísať zopár členov postupnosti a pomocou nich nejakým záhadným spôsobom prísť na vzorec.

U: A to ešte nie je všetko. Musíš aj dokázať, že ten vzorec je správny.

Ž: *Dobre. Prvý člen mám daný,* $a_1 = \frac{1}{2}$. *Ďalšie členy získam postupným dosadzovaním:*

$$\text{pre } n = 1 \text{ bude } a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{1+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6},$$

$$\text{pre } n = 2 \text{ bude } a_3 = a_2 \cdot \frac{2}{2+2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{pre } n = 3 \text{ bude } a_4 = a_3 \cdot \frac{3}{3+2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20},$$

$$\text{pre } n = 4 \text{ bude } a_5 = a_4 \cdot \frac{4}{4+2} = \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{30}.$$

U: Všimni si ako si získaval výsledné zlomky.

Ž: *Uhm, keď som krátil čitatele s menovateľmi, tak mi v menovateli vždy ostal taký pekný súčin:* $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, ... *Vzorec pre ľubovoľný* n*-tý člen bude:*

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

U: Ale ešte to musíš aj dokázať.

Ž: *Ach jaj.* **Matematická indukcia.** *Tak poďme na to:*

1. krok:

Ukážeme, že vzorec $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ *platí pre prirodzené číslo* $n = 1$:

$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ ... *a to je pravda, lebo takto bol prvý člen daný.*

U: Dobre. Prejdi na 2. krok.

Ž: **2. krok:**

Vyjadrím si tvar vzorca pre člen a_{n+1} *aby som vedel, k čomu mám dôjsť:*

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)},$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}.$$

Teraz potrebujem dokázať, že z platnosti vzťahu pre a_n vyplynie platnosť vzťahu pre a_{n+1}:

$$\text{pre } \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}.$$

A teraz čo?

U: Teraz sa pokús upraviť rekurentný vzťah pre a_{n+1} pomocou vzťahu pre a_n.

Ž: *Skúsim:*

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}.$$

U: Práve si dokázal, že sa vieš dostať z člena a_n na nasledujúci člen a_{n+1}, teda z hociktorého člena na nasledujúci. To je tá implikácia. Zo vzorca pre a_n vyplýva vzorec pre a_{n+1}.

Ž: *Nebolo to ťažké.*

Úloha :

Určte vzorec pre n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ danej rekurentne a dokážte jeho platnosť:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N},$

b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 6 \cdot n + 3,\ n \in \mathbb{N}.$

Výsledok:

a) $a_n = \frac{1}{n^2},$

b) $a_n = 3 \cdot n^2.$

Príklad 8: *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná rekurentným vzorcom*

$$a_1 = 2,\ a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Určte vzorec pre jej n*-tý člen a dokážte jeho platnosť.*

Ž: *Tak čo to tu máme? Je daný* **rekurentný vzťah** *a z neho potrebujem dostať vzorec pre* n*-tý člen.*

U: Pamätáš sa, ako máš postupovať?

U: Myslím, že by som si mal najprv napísať zopár členov postupnosti a pomocou nich nejakým záhadným spôsobom prísť na vzorec.

U: A to ešte nie je všetko. Musíš aj dokázať, že ten vzorec je správny.

Ž: *Uhm. Rekurentný vzťah je:* $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \dfrac{3a_{n+1} - a_n}{2}$. *Ďalšie členy budú:*

$$a_3 = \frac{3a_2 - a_1}{2} = \frac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$a_4 = \frac{3a_3 - a_2}{2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - 1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$a_5 = \frac{3a_4 - a_3}{2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8},$$

$$a_6 = \frac{3a_5 - a_4}{2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{16}.$$

Zdá sa, že v menovateli zlomkov mám mocniny dvojky.

U: Správne. Napíš si všetky tieto hodnoty ako mocniny so základom 2.

Ž: *Aby to bolo prehľadnejšie napíšem ich do tabuľky:*

n	1	2	3	4	5	6	...
a_n	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	...

U: Áno. Teraz už možno vidíš vzorec pre n-tý člen, ktorý závisí len od indexu n.

Ž: *Mohol by to byť vzťah:*

$$a_n = 2^{2-n}.$$

U: Mohol by byť. Dokáž jeho platnosť a budeš o tom úplne presvedčený.

Ž: *Ach jaj.* **Matematická indukcia.**
Idem dokázať, že v tejto postupnosti pre všetky prirodzené n *platí vzorec:* $a_n = 2^{2-n}$.
1. krok:
Dokážeme, že pre $n = 1$ *a pre* $n = 2$ *vzorec platí:*
$a_1 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$. *To je pravda, lebo takto bol prvý člen daný.*
$a_2 = 2^{2-2} = 2^0 = 1$. *Aj to sedí, takto bol daný druhý člen.*

U: Súhlasím. Ako budeš postupovať ďalej?

Ž: **2. krok:**

Pokúsim sa dokázať, že ak platia vzorce pre a_n a a_{n+1}, tak bude platiť aj vzorec pre a_{n+2}. Najprv si pripravím vyjadrenia pre členy a_n, a_{n+1}, a_{n+2}:

$a_n = 2^{2-n}$,
$a_{n+1} = 2^{1-n}$,
$a_{n+2} = 2^{-n}$.

U: Dobre. Podľa rekurentného vzťahu platí $a_{n+2} = \dfrac{3a_{n+1} - a_n}{2}$. Dosaď si do tohto vzťahu vyjadrené predpisy pre a_n a a_{n+1}.

Ž: *Takže:*

$$a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2} = \frac{3 \cdot 2^{1-n} - 2^{2-n}}{2} = \frac{2^{-n} \cdot (3 \cdot 2^1 - 2^2)}{2} = \frac{2^{-n} \cdot 2}{2} = 2^{-n}.$$

Hotovo. Tým som dokázal platnosť môjho odhadnutého vzorca: $a_n = 2^{2-n}$.

U: Výborne, zvládol si to.

Úloha :

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná rekurentným vzorcom*

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Určte vzorec pre jej n-tý člen a dokážte jeho platnosť.

Výsledok*:*

$a_n = n + 1.$