Ohraničenosť postupnosti

Mgr. Jana Králiková

U: Vieme, že postupnosť je špeciálny prípad ***funkcie***. Aké vlastnosti funkcií poznáš?

Ž: *Je toho dosť:* **párnosť, nepárnosť**, *či je* **funkcia prostá, periodická, monotónna, ohraničená**, *či má* **maximum a minimum** *...*

U: Výborne. Niektoré vlastnosti sú ale pre postupnosti nezaujímavé, pretože ich definičný obor sú len prirodzené čísla.

Ž: *Tomu celkom aj rozumiem. Žiadna postupnosť nie je párna ani nepárna, pretože vľavo od osi y nie sú na osi x žiadne prirodzené čísla.*

U: Áno, takže ***graf postupnosti*** nie je súmerný podľa osi y ani podľa začiatku súradnicovej sústavy O_{xy}.

Ž: *Ktorými vlastnosťami sa teda budeme zaoberať pri postupnostiach?*

U: V tejto téme sa budeme najprv zaoberať ***ohraničenosťou***. Vedel by si vysvetliť pojem ohraničenosť?

Ž: *Asi áno. Za ohraničené budem považovať niečo, čo sa dá vtesnať do nejakých hraníc tak, aby nič netrčalo von.*

U: A čo je tou hranicou?

Ž: *V skutočnom živote je to nejaký plot, múr. V matematike by to teda mala byť čiara. Asi priamka.*

U: Už si blízko! Najlepšie bude, ak si ohraničenosť postupnosti zadefinujeme:

> ***Postupnosť je ohraničená zdola*** práve vtedy, ak existuje číslo d, ktoré je menšie alebo rovné ako ľubovoľný člen tejto postupnosti. Symbolicky to zapíšeme takto:

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená zdola} \quad \Leftrightarrow \quad \exists d \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geqq d.}$$

> ***Postupnosť je ohraničená zhora*** práve vtedy, ak existuje číslo h, ktoré je väčšie alebo rovné ako ľubovoľný člen tejto postupnosti. Symbolicky to zapíšeme takto:

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená zhora} \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leqq h.}$$

> ***Postupnosť je ohraničená*** práve vtedy, ak je ohraničená zdola aj zhora zároveň. Symbolicky:

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená} \quad \Leftrightarrow \quad \exists d, h \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\colon d \leqq a_n \leqq h.}$$

Ž: *Z toho mi vychádza, že tou hranicou je číslo.*

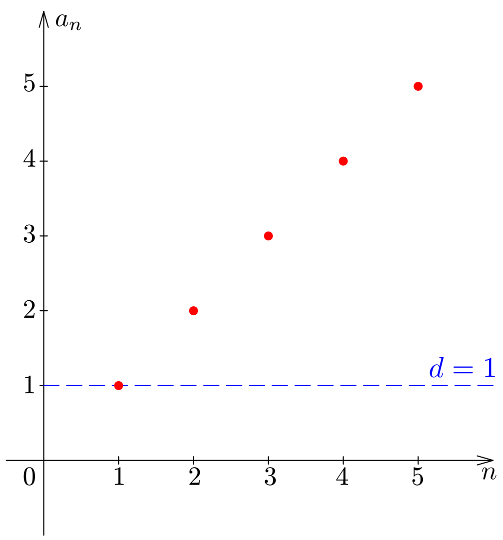
U: Áno, číslo. Veď ohraničuješ členy postupnosti a to sú čísla. Ale v grafickom znázornení si bodom $[0,\ d]$ na osi y môžeš viesť priamku $y = d$, rovnobežnú s osou x. Podobne bodom $[0,\ h]$ na osi y môžeš viesť priamku $y = h$. Na nasledujúcom príklade chcem zistiť, či si správne pochopil jednotlivé definície.

Pomocou grafu popíš ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$***, ak:***

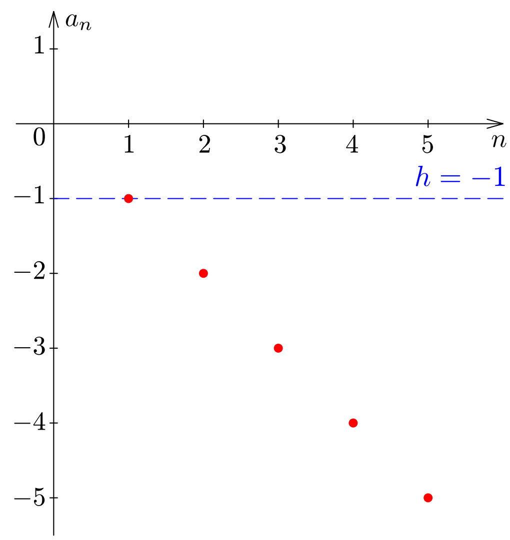
a) $a_n = n$***,*** ***b)*** $a_n = -n$***,***

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$***,*** ***d)*** $a_n = (-1)^n$***.***

a)



b)



Ž: a) *Prvá postupnosť je* **rastúca**. *Zdola je ohraničená hodnotou svojho prvého člena, teda* $d = 1$. *Zhora ohraničená nie je, lebo jej hodnoty rastú až do nekonečna.*

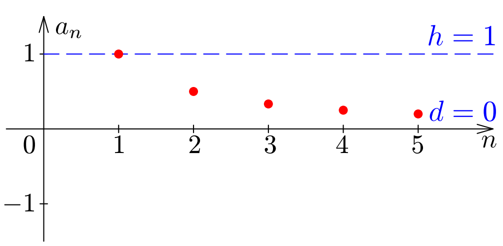
b) *Tu je to podobné. Postupnosť je* **klesajúca** *a je ohraničená len z jednej strany, zhora, hodnotou svojho prvého člena, teda* $h = -1$. *Zdola ohraničená nie je.*

U: Dobre.

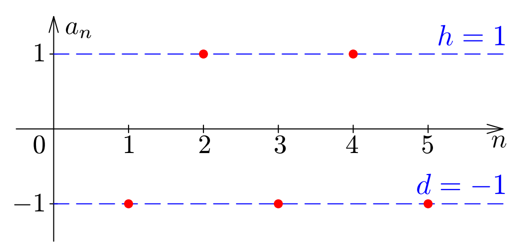
Ž: *Zdá sa mi, že rastúce a klesajúce postupnosti sú ohraničené len z jednej strany, svojim prvým členom.*

U: Nemusí to tak byť. Pozri sa na graf tretej postupnosti:

c)



d)



Ž: c) *Aha. Postupnosť je klesajúca a pritom je ohraničená z oboch strán. Zhora hodnotou svojho prvého člena, takže* $h = 1$ *a zdola nulou, takže* $d = 0$. *Budem sa musieť opraviť. Monotónne postupnosti sú ohraničené určite aspoň z jednej strany. Rastúce – zdola a klesajúce – zhora.*

U: Správne, naozaj to tak je. Ostal ti posledný graf.

Ž: d) *Postupnosť je kmitajúca a je ohraničená aj zhora aj zdola.*

U: Dobre, myslím, že pojem ohraničenosť postupnosti si pochopil. Mám ešte jednu malú poznámku k definícii ohraničenosti: číslo d sa nazýva ***dolné ohraničenie postupnosti*** a číslo h sa nazýva ***horné ohraničenie postupnosti***.

Ž: *Rozumiem. Postupnosť je ohraničená práve vtedy, ak existuje jej dolné aj horné ohraničenie.*

U: Áno a ešte pripomeniem, že ak má postupnosť dolné ohraničenie d, tak každé číslo menšie ako d je tiež jej dolným ohraničením.

Ž: *Jasné. A ak má postupnosť horné ohraničenie h, tak každé číslo, ktoré je väčšie ako to h je tiež jej horným ohraničením.*

U: Výborne. Ohraničenosť postupnosti môžeme definovať aj takto:

> ***Postupnosť je ohraničená*** práve vtedy, ak existuje číslo k, ktoré je väčšie alebo rovné ako absolútna hodnota ľubovoľného člena postupnosti. Symbolicky to zapíšeme takto:

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je ohraničená} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leqq k.}$$

Ž: *Keď som konečne pochopil ako funguje d a h, tak vy tam zavediete nejaké k. Čo to je?*

U: Vysvetlím ti to na nasledujúcom príklade. Majme postupnosť, ktorá je zhora ohraničená číslom 1 a zdola číslom -5. Pre každý člen tejto postupnosti teda platí:

$$-5 \leqq a_n \leqq 1.$$

Ž: *Zatiaľ je mi to jasné. Je to zápis, ktorý ste uviedli v prvej definícii ohraničenosti. Ale ešte nevidím, kde sa tam naberie to k.*

U: Hneď to bude. Ak je postupnosť ohraničená zhora číslom 1, tak je zhora ohraničená aj každým väčším číslom než je 1. Napríklad aj číslom $+5$. Môžem to zapísať takto:

$$-5 \leqq a_n \leqq 1 \leqq +5.$$

Ž: *Dobre. Prečo ste si vzali práve číslo $+5$ a nie napríklad $+100$?*

U: Lebo číslo $+5$ má rovnakú absolútnu hodnotu ako dolné ohraničenie, teda číslo -5. Teraz zabudnem na ohraničenie 1 a budem pracovať len s ohraničením $+5$. Dostanem zápis:

$$-5 \leqq a_n \leqq +5, \quad \text{čiže} \quad |a_n| \leqq 5.$$

Ž: *Aha, už to vidím. Číslo k bude mať hodnotu 5.*

U: Áno. Vedel by si povedať, ako súvisí nové ohraničenie $k = 5$ s pôvodnými ohraničeniami $d = -5$ a $h = +1$?

Ž: *Zdá sa mi, že* **číslo k sa bude rovnať väčšej absolútnej hodnote z oboch ohraničení d a h**. *Všetky členy postupnosti budú potom ohraničené číslami $+k$ a $-k$.*

U: Presne tak. Vytvoríš si, aspoň v hlave, absolútnu hodnotu z d aj z h. Zistíš, ktorá je väčšia. Dostaneš tak nové ohraničenie členov postupnosti:

$$k = max\left\{|d|, |h|\right\}$$

$$-k \leqq a_n \leqq +k.$$

Ž: *Budeme zisťovať či postupnosť je ohraničená aj inak, než pomocou grafu?*

U: Áno. V jednoduchších prípadoch sa vychádza priamo z definície, overením charakteristickej vlastnosti. V zložitejších prípadoch vyšetrujeme, či je ohraničená funkcia f, ktorá je daná rovnakým predpisom ako postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ale jej definičný obor sú reálne čísla.

$$\boxed{f\colon y = f(x),\ \mathcal{D} = \langle 1, +\infty),\ \text{pričom}\ \forall\ n \in \mathbb{N}\colon f(n) = a_n.}$$

Ž: *Ukážeme si to aj na príkladoch?*

U: Pravdaže. V riešenej časti nájdeš dostatok príkladov na určovanie ohraničenosti rôznych postupností.

U: Pri určovaní ohraničenosti postupnosti sa využívajú aj nasledujúce vlastnosti:

Ak sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničené, potom je ohraničená aj postupnosť:

a) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

b) $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

c) $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde c je ľubovoľné číslo,

d) $\{c \cdot a_n + k \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde c a k sú ľubovoľné čísla.

Ž: *Čiže ak mám ohraničené postupnosti, môžem ich medzi sebou sčítavať, násobiť, vyrábať ich násobky a výsledná postupnosť bude stále ohraničená.*

U: Áno. Dôkazy týchto tvrdení nájdeš v riešenej dôkazovej časti.

U: Vieš čo je najväčší a najmenší člen postupnosti?

Ž: *Najväčší bude asi taký, že žiadny iný nebude väčší. Podobne aj najmenší člen bude asi taký, že žiadny iný nebude menší.*

U: Áno. Najväčší člen označíme a_{max} a najmenší člen a_{min}. Ich presná definícia vyzerá takto:

Člen a_{max} sa nazýva najväčší (maximálny) člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak pre každé prirodzené číslo n platí:

$$a_n \leqq a_{max}.$$

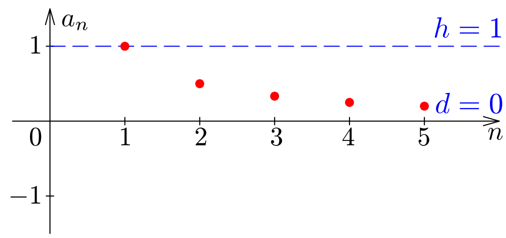
Člen a_{min} sa nazýva najmenší (minimálny) člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak pre každé prirodzené číslo n platí:

$$a_n \geqq a_{min}.$$

Ž: *Tomu rozumiem.*

U: Tak skús porozmýšľať, ako súvisí existencia maximálneho a minimálneho prvku s ohraničenosťou postupnosti. Má ohraničená postupnosť maximálny a minimálny člen?

Ž: *Vezmem si na pomoc postupnosť, o ktorej už viem, že je ohraničená. Napríklad postupnosť prevrátených hodnôt, teda* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$*. Je klesajúca, zhora aj zdola ohraničená. Maximálny člen je ten prvý. Všetky ostatné sú už menšie. Ale minimálny nemá. Každý nasledujúci člen bude mať totiž ešte menšiu hodnotu než predchádzajúci. Takže táto postupnosť je zdola ohraničená, ale nemá minimálny člen.*



U: Dobre, a opačné tvrdenie? Ak postupnosť má maximálny a minimálny člen, je aj ohraničená?

Ž: *Ak má maximálny aj minimálny člen, tak asi bude ohraničená, lebo za dolné ohraničenie môžem vziať práve hodnotu najmenšieho člena a za horné ohraničenie vezmem hodnotu najväčšieho člena.*

U: Dobre, skús to teraz sformulovať ako matematickú vetu.

Ž: **Ak postupnosť má najväčší člen, tak je zhora ohraničená.**
Ak postupnosť má najmenší člen, tak je zdola ohraničená.

U: Správne. Doplním ešte, že ***obrátené tvrdenia neplatia***.
Nájdenie maximálneho a minimálneho člena postupnosti si ukážeme na príkladoch v riešenej časti.

U: Máme za sebou teóriu ohraničenosti postupnosti a zavedenie maximálneho a minimálneho prvku postupnosti. Odporúčam ti pozrieť si aj riešené príklady k tejto téme.

Príklad : *Dokážte, že ak sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničené, tak je ohraničená aj postupnosť:*

a) $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

b) $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde* $c \in \mathbb{R}$.

Ž: **a)** *Dokážem, že súčet dvoch ohraničených postupností je tiež* **ohraničená postupnosť.**

U: Povedz mi najprv, čo to znamená, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené.

Ž: *Podľa definície:*

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená* $\Leftrightarrow\ \exists k_a \in \mathbb{R}$, *že* $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leqq k_a$.
- Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená* $\Leftrightarrow\ \exists k_b \in \mathbb{R}$, *že* $\forall n \in \mathbb{N}$: $|b_n| \leqq k_b$.
Zaviedol som označenie k_a *a* k_b, *aby som vedel, ku ktorým postupnostiam patria.*

U: Dobre. Teraz musíš nájsť také číslo, označím si ho napríklad K, ktoré bude ohraničením pre novú, súčtovú postupnosť. Musíš vymyslieť ***ako využiť*** k_a ***a*** k_b***, aby si dostal*** K.

Ž: *Uf. To ste mi veľmi nepomohli.*

U: Vezmi si jednu z tých dvoch nerovníc $|a_n| \leqq k_a$ alebo $|b_n| \leqq k_b$. Uprav ju tak, aby si na jej ľavej strane dostal súčet členov postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ž: *Dobre. Vezmem si nerovnicu:* $|a_n| \leqq k_a$. *K nej pripočítam výraz* $|b_n|$:

$$|a_n| \leqq k_a \quad / + |b_n|$$

$$|a_n| + |b_n| \leqq k_a + |b_n|$$

U: Teraz využi ohraničenosť postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ž: *Dostanem tak, že pravá strana nerovnice je menšia ako výraz* $k_a + k_b$:

$$|a_n| + |b_n| \leqq k_a + |b_n| \leqq k_a + k_b, \qquad \text{čiže} \qquad |a_n| + |b_n| \leqq k_a + k_b.$$

A je to. Na ľavej strane je súčet členov a na pravej strane je nové ohraničenie.

U: Na pravej strane síce už máš nové ohraničenie, ale ľavá strana ešte hotová nie je. Ako je definovaná ohraničenosť postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Ž: *Postupnosť* $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená* $\Leftrightarrow\ \exists K \in \mathbb{R}$, *že* $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n + b_n| \leqq K$.
Aha, už to vidím. Potrebujem mať absolútnu hodnotu súčtu, nie súčet absolútnych hodnôt.

U: Využi vlastnosť ***absolútnej hodnoty***: $|a + b| \leqq |a| + |b|$, pre ľubovoľné reálne čísla a a b.

Ž: *Takže dostanem:*

$$|a_n + b_n| \leqq |a_n| + |b_n| \leqq k_a + k_b, \qquad \text{čiže} \qquad |a_n + b_n| \leqq k_a + k_b.$$

Za ohraničenie K *môžem teda vziať súčet ohraničení* k_a *a* k_b.

Postupnosť $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je ohraničená, lebo existuje číslo** $K = k_a + k_b$**, pomocou ktorého viem ohraničiť všetky členy tejto postupnosti takto:** $-K \leqq a_n + b_n \leqq K$.

U: Správne. A môžeme prejsť na dôkaz druhého tvrdenia.

Ž: b) *Mám dokázať, že násobok ohraničenej postupnosti je tiež ohraničenou postupnosťou.*

U: Áno. Kedy sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničené?

Ž: *Podľa definície:*

- *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená* $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$, *že* $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leqq k$.
- *Postupnosť* $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená* $\Leftrightarrow$ $\exists K \in \mathbb{R}$, *že* $\forall n \in \mathbb{N}$: $|c \cdot a_n| \leqq K$.

Využijem platnosť predpokladu, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená, teda:*

$$|a_n| \leqq k.$$

U: Aké ekvivalentné úpravy použiješ, aby si z predpokladu dokázal tvrdenie?

Ž: *Najprv by som vynásobil túto nerovnosť číslom* c*, ale neviem aké má znamienko. Ak by bolo záporné tak sa nerovnosť obráti na opačnú.*

U: Vynásob nerovnosť nie číslom c, ale jeho absolútnou hodnotou. A využi ďalšiu vlastnosť absolútnej hodnoty: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, pre ľubovoľné reálne čísla a a b.

Ž: *Vykonám:*

$$|a_n| \leqq k \quad / \cdot |c|$$

$$|c| \cdot |a_n| \leqq |c| \cdot k$$

$$|c \cdot a_n| \leqq |c| \cdot k$$

Hotovo. Číslo K *sa môže rovnať súčinu* $|c| \cdot k$.

U: Áno. Pri násobení nerovnice číslom $|c|$ si ale musel predpokladať, že $c \neq 0$. Násobenie nerovnice nulou totiž nie je ekvivalentná úprava. Mení sa množina koreňov nerovnice. Pre $c \neq 0$ vieš ohraničiť postupnosť $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ale čo ak $c = 0$?

Ž: *Z postupnosti* $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dostanem postupnosť* $\{0\}_{n=1}^{\infty}$.

U: Je takáto postupnosť ohraničená?

Ž: *Je konštantná, lebo každý jej člen je nula. Takže je ohraničená. Dokázal som, že ľubovoľný násobok ohraničenej postupnosti viem vždy ohraničiť.*

Postupnosť $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, lebo existuje číslo $K = |c| \cdot k$, pomocou ktorého viem ohraničiť všetky členy tejto postupnosti takto: $-K \leqq c \cdot a_n \leqq K$.

U: Správne. Tieto dokázané tvrdenia by ti mohli pomôcť pri nasledujúcej samostatnej práci.

Úloha :

Dokážte, že ak sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničené, tak je ohraničená aj postupnosť:*

a) $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

b) $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

c) $\{c \cdot a_n + d \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *pričom* $c, d \in \mathbb{R}$.

Príklad : *Dokážte, že ak sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničené, tak je ohraničená aj postupnosť:*

$$\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Presvedčte sa, že podiel dvoch ohraničených postupností nemusí byť ohraničený.

U: Čo to znamená, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené?

Ž: *Podľa definície:*

- *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená $\Leftrightarrow$ $\exists k_a \in \mathbb{R}$, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leqq k_a$.*
- *Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená $\Leftrightarrow$ $\exists k_b \in \mathbb{R}$, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $|b_n| \leqq k_b$.*

Zaviedol som označenie k_a a k_b, aby som vedel, ku ktorým postupnostiam patria.

U: V poriadku. Vezmi si jednu z tých dvoch nerovníc a vynásob ju tak, aby si na jej ľavej strane dostal potrebný súčin.

Ž: *Začnem tou prvou nerovnicou:*

$$|a_n| \leqq k_a \;\; / \cdot |b_n|$$

$$|a_n| \cdot |b_n| \leqq k_a \cdot |b_n|$$

U: Na ľavej strane nerovnice teraz využijeme vlastnosť ***absolútnej hodnoty***: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Ž: *Vznikne nerovnica:*

$$|a_n \cdot b_n| \leqq k_a \cdot |b_n|.$$

U: Áno. Ľavú stranu už máš v potrebnom tvare. Ako si upravíš pravú stranu?

Ž: *Využijem ohraničenosť postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, teda že: $|b_n| \leqq k_b$. Dostanem:*

$$|a_n \cdot b_n| \leqq k_a \cdot |b_n| \leqq k_a \cdot k_b,$$

čiže:

$$|a_n \cdot b_n| \leqq k_a \cdot k_b.$$

U: Správne, dokonč to.

Ž: *Postupnosť $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ viem ohraničiť pomocou čísel k_a a k_b tak, že vytvorím ich súčin. Nech $k_a \cdot k_b = K$. Potom môžem zapísať, že* **postupnosť $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, pretože $\exists K = k_a \cdot k_b$, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n \cdot b_n| \leqq K$.**

U: Dobre. Môžeme túto úlohu považovať za dokončenú. Podobne by si dokázal, že ak máš dve ohraničené postupnosti, tak aj ich súčet, rozdiel, násobok a mocnina jednej z nich je tiež ohraničenou postupnosťou.

Ž: *A čo podiel? Je aj podiel ohraničených postupností ohraničenou postupnosťou?*

U: Nie vždy.

Ž: *Tomu celkom nerozumiem. Vedel by som to dokázať rovnako ako súčin v predchádzajúcom príklade. Vezmem si jednu z nerovníc a upravím ju tak, aby na ľavej strane vznikol podiel:*

$$|a_n| \leqq k_a \;\; / : |b_n|$$

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \leqq \frac{k_a}{|b_n|}$$

U: Za predpokladu, že postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nenulové členy.

Ž: *Áno. Na ľavej strane využijem vlastnosť absolútnej hodnoty:*

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqq \frac{k_a}{|b_n|}$$

U: Zatiaľ to máš správne.

Ž: *Teraz využijem, že aj postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a platí $|b_n| \leqq k_b$:*

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqq \frac{k_a}{|b_n|} \leqq \frac{k_a}{k_b}.$$

Takže som postupnosť ohraničil pomocou podielu čísel k_a a k_b.

U: A teraz už to správne nie je. Máš tam veľkú chybu v úsudku.

Ž: *Kde? Veď všetko som robil tak, ako v predchádzajúcom príklade.*

U: Tak si to ukážeme. Sleduj nasledujúce ekvivalentné úpravy nerovnice $|b_n| \leqq k_b$:

$$\boxed{\begin{aligned} |b_n| &\leqq k_b \quad / : |b_n| \\ \frac{|b_n|}{|b_n|} &\leqq \frac{k_b}{|b_n|} \\ 1 &\leqq \frac{k_b}{|b_n|} \quad / : k_b \\ \frac{1}{k_b} &\leqq \frac{1}{|b_n|} \end{aligned}}$$

Pozri sa, čo nám vyšlo. Je tam snáď napísané, že $\frac{1}{|b_n|} \leqq \frac{1}{k_b}$?

Ž: *To nie. Ekvivalentnými úpravami vyšla presne opačná nerovnosť, než som použil ja.*

U: Tak vidíš. Postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená napríklad číslami $+5$ a -5. Ale k nej vytvorená prevrátená postupnosť $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ už ohraničená nie je. Nemôžeš uvažovať o číslach $+\frac{1}{5}$ a $-\frac{1}{5}$ ako o jej ohraničeniach.

Ž: *Tak teda dobre. Unáhlil som sa. Ak mám dve ohraničené postupnosti, tak viem ohraničiť ich súčet, rozdiel, súčin, násobok, mocninu, len nie podiel.*

Úloha :

Dokážte, že ak sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničené, tak je ohraničená aj postupnosť:

a) $\{(a_n)^m\}_{n=1}^{\infty}$, *kde m je ľubovoľné prirodzené číslo,*

b) $\{(a_n)^r \cdot (b_n)^s\}_{n=1}^{\infty}$, *kde r, s sú ľubovoľné prirodzené čísla.*

Príklad 1: *Zistite, či je ohraničená postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *daná vzorcom pre* n*-tý člen:*

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$,

b) $a_n = 2^n$.

Ž: *V definícii sa hovorí, že* **postupnosť je ohraničená, ak existujú také reálne čísla** *– dolné ohraničenie* d *a horné ohraničenie* h*, že pre každý člen postupnosti platí:* $d \leqq a_n \leqq h$*. Mám zistiť, či také čísla* d *a* h *existujú. Teoreticky mi je to jasné, ale prakticky – neviem, ako na to.*

U: Takže pomôcka. Vedel by si povedať, aké sú všetky prirodzené čísla a teda aj ich prevrátené hodnoty?

Ž: **a)** *Všetky prirodzené čísla sú kladné. Aj ich prevrátené hodnoty sú kladné. Aha, takže postupnosť danú vzorcom* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *viem zdola ohraničiť nulou, lebo pre každé prirodzené číslo* n *je* $\dfrac{1}{n} > 0$*. Sláva, mám dolné ohraničenie.*

U: A keď už sme pri týchto prevrátených hodnotách, vieš, ktorá bude najväčšia zo všetkých prevrátených hodnôt prislúchajúcich prirodzeným číslam?

Ž: *Ktorá bude najväčšia prevrátená hodnota? Prevrátené hodnoty prirodzených čísel sú:* $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots$ *Hodnoty sú stále menšie, takže najväčšia z nich je hneď tá prvá. Tým mám nájdené aj horné ohraničenie. Pre každý člen* a_n *platí:*

$0 < a_n \leqq 1$ *a teda* **postupnosť** $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je ohraničená**.

U: Áno, dolným ohraničením je $d = 0$ a horným ohraničením je $h = 1$. Postupnosť je ohraničená aj vtedy, ak existuje také reálne číslo k, že pre všetky členy postupnosti platí: $|a_n| \leqq k$. Vedel by si túto postupnosť ohraničiť aj pomocou čísla k?

Ž: *Skúsim. Z ohraničení* $d = 0$ *a* $h = 1$ *si vezmem to s väčšou absolútnou hodnotou, teda* $k = 1$*. Pre každý člen* a_n *danej postupnosti potom platí:* $|a_n| \leqq 1$*.*

U: Súhlasím, prejdi na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = 2^n$*. Ako zistím, či je ohraničená?*

U: Spomeň si, ako vyzerajú grafy základných funkcií. Veď postupnosť je vlastne špeciálny typ funkcie.

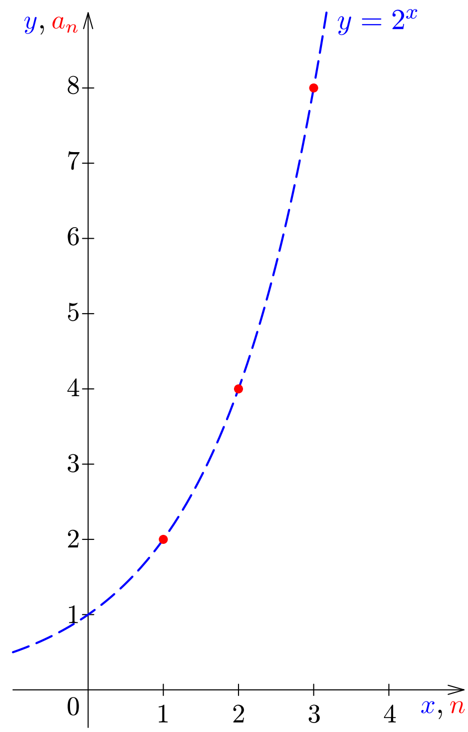
Ž: *Takže by som si mal spomenúť na* **exponenciálnu funkciu**: $f(x) = 2^x$*, pre* $x \in \mathbb{R}$*. Vypočítam si zopár funkčných hodnôt.*

U: To je dobrý nápad. Urob to.

Ž: *Funkčné hodnoty sú vlastne mocniny dvojky. Zapíšem si ich do tabuľky:*

x	-1	0	1	2	3	4	...
$f(x) = 2^x$	0,5	1	2	4	8	16	...

U: Dobre. Načrtni graf exponenciálnej funkcie. Grafom našej postupnosti je množina izolovaných bodov, ktoré ležia na tejto exponenciálnej krivke. Vyznač niekoľko z nich.



Ž: *Viac bodov postupnosti sa mi tam už nevojde.*

U: To nevadí. Postačí ak si uvedomíš, že ležia na tejto rastúcej krivke. Čo z toho vyplýva pre ohraničenosť postupnosti?

Ž: *Najmenšiu hodnotu bude mať postupnosť pre $x = 1$, vtedy bude $f(1) = a_1 = 2^1 = 2$, takže za dolné ohraničenie postupnosti, si môžem zvoliť číslo $d = 2$. Zhora ale funkcia nie je ohraničená, pretože pre rastúce x budú funkčné hodnoty stále väčšie a väčšie a horné ohraničenie exponenciálnej funkcie a ani našej postupnosti nebude existovať.*
Postupnosť $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená len zdola a pre každý jej člen a_n platí: $a_n \geqq 2$..

Úloha 1:

Zistite, či je postupnosť $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničená.*

Výsledok:

Postupnosť je ohraničená, $h = \dfrac{1}{2}$, $d = 0$.

Úloha 2:

Zistite, či je postupnosť $\{3 + \log n\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničená.*

Výsledok:

Postupnosť je ohraničená len zdola, $d = 3$.

Príklad 2: *Zistite, či je ohraničená postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *daná vzorcom pre* n*-tý člen:*

a) $a_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$,

b) $a_n = \dfrac{2n-10}{n+1}$.

Ž: *V definícii sa hovorí, že* **postupnosť je ohraničená, ak existujú také reálne čísla** *– dolné ohraničenie* d *a horné ohraničenie* h*, že pre každý člen postupnosti platí:* $d \leqq a_n \leqq h$*. Mám zistiť, či také čísla* d *a* h *existujú. Teoreticky mi je to jasné, ale prakticky – neviem, ako na to.*

U: Takže pomôcka. Vedel by si zistiť, či sú členy postupnosti len kladné čísla?

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

Menovateľ zlomku je kladný vždy, takže preverím len čitateľa:

$$\frac{3n-1}{n+2} > 0 \;\Leftrightarrow\; 3n-1 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}.$$

A to platí stále, lebo každé prirodzené číslo je väčšie ako $\dfrac{1}{3}$*. Čitateľ aj menovateľ zlomku sú stále kladné, takže celý zlomok, teda každý člen postupnosti je kladné číslo. Zdola mám teda našu postupnosť ohraničenú číslom* $d = 0$.

U: Výborne. Teraz porozmýšľaj nad horným ohraničením.

Ž: *Ako by som to len ohraničil zhora? Pomôžete mi aj teraz?*

U: Rád. Skús si zlomok z predpisu našej postupnosti upraviť tak, aby si tam využil postupnosť nejakých prevrátených hodnôt.

Ž: *Neviem si ani predstaviť, ako to urobím.*

U: Zlomok $\dfrac{3n-1}{n+2}$ si upravíme tak, aby sme v čitateli dostali nejaký násobok menovateľa a ešte čosi a potom rozdelíme tento zlomok na dva zlomčeky. Takto:

$$\frac{3n-1}{n+2} = \frac{3n+6-7}{n+2} = \frac{3\cdot(n+2)-7}{n+2} = \frac{3\cdot(n+2)}{n+2} - \frac{7}{n+2} = 3 - \frac{7}{n+2}.$$

Ž: *A tento nový predpis nám pomôže?*

U: Mal by. Od čísla 3 odpočítavaš hodnotu zlomku $\dfrac{7}{n+2}$. Ten je vždy kladný, takže po jeho odpočítaní od trojky dostaneš vždy výsledok menší ako 3. Môžeme napísať, že pre každé prirodzené číslo n je $3 - \dfrac{7}{n+2} < 3$.

Ž: *A keďže predpis* $3 - \dfrac{7}{n+2}$ *je vlastne upravený vzorec pre* n*-tý člen postupnosti, tak to znamená, že sme našli horné ohraničenie našej postupnosti:* $h = 3$*. Pre každý člen* a_n *našej postupnosti platí:*

$0 < a_n < 3$ *a teda* **postupnosť** $\left\{\dfrac{3n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je ohraničená**.

U: Dobre. Využil si to, že za dolné ohraničenie sa môže použiť číslo 0, pretože všetky členy postupnosti sú kladné. V nasledujúcom príklade to už tak nebude.

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{2n-10}{n+1}$. *Naozaj, jej prvé členy sú záporné. Čo teraz? Ako nájdem čísla* d *a* h*?*

U: Postupuj tak, ako v predchádzajúcom príklade. Najprv si rozdeľ zlomok na dva zlomky.

Ž: *Dobre. Upravím čitateľa a rozdelím zlomok:*

$$a_n = \frac{2n-10}{n+1} = \frac{2n+2-12}{n+1} = \frac{2\cdot(n+1)-12}{n+1} = \frac{2\cdot(n+1)}{n+1} - \frac{12}{n+1} = 2 - \frac{12}{n+1}.$$

Mám.

U: A teraz, podobne ako v predchádzajúcom príklade, využi ohraničenosť postupnosti prevrátených hodnôt.

Ž: *Postupnosť* $\left\{\dfrac{12}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je klesajúca. Zhora je ohraničená hodnotou svojho prvého člena, teda číslom* 6 *a zdola číslom* 0*, lebo má len kladné členy.*

U: Áno. V našej postupnosti, danej upraveným vzťahom $a_n = 2 - \dfrac{12}{n+1}$, máš od čísla 2 odpočítavať hodnoty ohraničenej postupnosti $\left\{\dfrac{12}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Najprv odpočítaš 6, potom 4, potom 3 ... Takto to bude pokračovať, až pre nejaké veľmi veľké n budeš odpočítavať hodnoty veľmi blízke nule.

Ž: *Aha, keďže od čísla* 2 *odpočítavam ohraničenú klesajúcu postupnosť, tak dostanem znova ohraničenú, ale už rastúcu postupnosť.*

U: Presne tak. Už ju vieš ohraničiť?

Ž: *Najmenšiu hodnotu, ktorú táto postupnosť bude mať, je hodnota hneď prvého člena* $a_1 = 2 - 6 = -4$. *Ďalšie členy už budú všetky väčšie, takže dolné ohraničenie môže byť* $d = -4$. *Zhora ju viem ohraničiť číslom* 2*, pretože žiaden člen nebude väčší. Takže* $h = 2$. *Pre každý člen* a_n *platí:*

$-4 \leqq a_n < 2$ *a teda* **postupnosť** $\left\{\dfrac{2n-10}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je ohraničená**.

U: Výborne.

Úloha :

Zistite, či je postupnosť $\left\{\dfrac{2n-1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničená.*

Výsledok:

Postupnosť je ohraničená, $d = \dfrac{1}{3}$, $h = 1$.

Príklad 3: *Dokážte, že postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená, ak:*

a) $a_n = 3 + \dfrac{1}{2n}$,

b) $a_n = \dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{n+1}{3n}$.

U: Povedz mi najprv definíciu ohraničenosti postupnosti.

Ž: *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená vtedy, ak existujú také reálne čísla* d *a* h *alebo* k*, že pre každý člen postupnosti platí* $d \leqq a_n \leqq h$ *alebo* $|a_n| \leqq k$*.*

U: Okrem týchto definícií by si mal poznať aj nejaké vety o ohraničenosti. Spomenieš si?

Ž: *Ak máme dve ohraničené postupnosti, tak je ohraničená aj postupnosť, ktorá vznikne ako ich súčet, rozdiel alebo súčin. A ohraničená je aj postupnosť, ktorú dostaneme ako násobok alebo mocninu členov jednej z nich.*

U: Výborne. Teóriu ovládaš. Prejdime na príklady.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = 3 + \dfrac{1}{2n}$*. Vypočítam si niekoľko jej prvých členov a zapíšem si ich do tabuľky:*

n	1	2	3	4	5	6	...
$a_n = 3 + \dfrac{1}{2n}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{10}$	$3\frac{1}{12}$	...

Myslím, že by som vedel našu postupnosť ohraničiť takto:

$$3 \leqq 3 + \frac{1}{2n} \leqq 3{,}5.$$

U: To je tvoj odhad. Musíš ho aj dokázať.

Ž: *Vyriešením nerovnice* $3 \leqq 3 + \dfrac{1}{2n}$ *dokážem, že číslo* 3 *ohraničuje postupnosť zdola:*

$$\boxed{\begin{aligned} &3 \leqq 3 + \frac{1}{2n} \quad / - 3 \\ &0 \leqq \frac{1}{2n} \quad / \cdot 2n \\ &0 \leqq 1 \end{aligned}}$$

Dostali sme pravdivú nerovnosť, takže **číslo 3 je dolným ohraničením**.

U: Áno. Ako to bude vyzerať pre odhad horného ohraničenia?

Ž: *Vyriešením nerovnice* $3 + \dfrac{1}{2n} \leqq 3{,}5$ *dokážem, že číslo* 3,5 *ohraničuje postupnosť zhora:*

$$\begin{aligned} 3+\frac{1}{2n} &\leqq 3\frac{1}{2} \quad / -3 \\ \frac{1}{2n} &\leqq \frac{1}{2} \quad / \cdot 2n \\ 1 &\leqq n \end{aligned}$$

Aj to je pravdivá nerovnosť. **Číslo 3,5 je horným ohraničením našej postupnosti. Postupnosť $\left\{3+\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola aj zhora zároveň, takže je ohraničená.**

U: Dobre. Nie vždy je odhad ohraničenosti, teda nájdenie čísel d a h také jednoduché. Na tom istom príklade si ukážeme aj iný postup. Využiješ pri ňom vety o ohraničenosti.

Ž: *Tie vety ale predpokladajú, že na začiatku mám nejaké ohraničené postupnosti. Teraz nemám žiadne také postupnosti.*

U: Ale máš. Pozri sa pozorne na predpis postupnosti $\left\{3+\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Vidíš v tomto vzorci nejakú jednoduchú postupnosť, o ktorej vieš, že je ohraničená?

Ž: *Myslím, že tam mám postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. O nej viem, že je ohraničená zdola číslom 0, lebo všetky členy tejto postupnosti sú kladné čísla. Zhora ju ohraničuje číslo 1, lebo postupnosť je pre rastúce n klesajúca a jej prvý člen je jej najväčším členom. Mám teda jednu ohraničenú postupnosť. Ako pomocou nej dostanem postupnosť $\left\{3+\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$?*

U: Sleduj pozorne:

> Postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, takže ak ju vynásobím konštantou $\frac{1}{2}$, vzniknutá postupnosť $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ bude tiež ohraničená. Ak k nej pripočítam ďalšiu ohraničenú postupnosť, konkrétne – konštantnú postupnosť $\{3\}_{n=1}^{\infty}$, tak vzniknutý súčet bude tiež ohraničenou postupnosťou.

Vzniknutá postupnosť $\left\{3+\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je teda ohraničenou postupnosťou.

Ž: *To bolo perfektné. Pár elegantných riadkov a už je koniec príkladu. Páčilo sa mi to.*

U: To som rád. Môžeš si takéto riešenie vyskúšať na príklade b).

Ž: b) *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen takto: $a_n = \frac{2n}{n+1} + \frac{n+1}{3n}$. Myslím, že najväčší problém bude na začiatku nájsť nejakú ohraničenú postupnosť. Aby som mal na čom stavať.*

U: Každý z tých dvoch zlomkov zo zadania postupnosti si upravíme zvlášť. Najprv prvý:

$$\frac{2n}{n+1}=\frac{2n+0}{n+1}=\frac{2n+2-2}{n+1}=\frac{2\cdot(n+1)-2}{n+1}=\frac{2\cdot(n+1)}{n+1}-\frac{2}{n+1}=2-\frac{2}{n+1}.$$

Zlomok $\frac{2n}{n+1}$ sme si upravili na výraz $2-\frac{2}{n+1}$. Teraz už vidíš tú základnú postupnosť?

Ž: *Áno, použijem ohraničenú postupnosť* $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Vynásobím ju číslom* -2. *Nová postupnosť* $\left\{\frac{-2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je tiež ohraničená. A ešte k nej pripočítam ohraničenú konštantnú postupnosť* $\{2\}_{n=1}^{\infty}$. *Postupnosť* $\left\{2+\frac{-2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *bude teda ohraničená. Super.*

U: A to isté máš urobiť s druhým zlomkom vo vzorci $a_n=\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}$.

Ž: *Dobre. Pohrám sa so zlomkom* $\frac{n+1}{3n}$:

$$\frac{n+1}{3n}=\frac{n}{3\cdot n}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}.$$

Hotovo. Základná ohraničená postupnosť, ktorú použijem je postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Vynásobím ju číslom* $\frac{1}{3}$ *a dostanem ohraničenú postupnosť* $\left\{\frac{1}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *K nej pripočítam konštantnú postupnosť* $\left\{\frac{1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, *ktorá je tiež ohraničená. Vzniknutá postupnosť* $\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *bude teda ohraničená.*

U: Dobre. Ukázali sme, že výrazy $\left(2-\frac{2}{n+1}\right)$ a $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right)$ predstavujú predpisy pre ohraničené postupnosti, takže aj ich súčet bude predstavovať ohraničenú postupnosť.

Postupnosť daná vzorcom $a_n=\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}$ ***je ohraničená.***

Úloha 1:

Dokážte, že postupnosť $\left\{3+\frac{5n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená.*

Úloha 2:

Dokážte, že postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená pre každé číslo* x, *pre ktoré platí vzťah:* $|x|=1$.

Príklad 4: *Počnúc ktorým členom sú všetky členy postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *menšie ako* $\dfrac{1}{1000}$*?*

a) $a_n = \dfrac{1}{2+3\cdot n}$,

b) $a_n = \left|\dfrac{1}{1-2\cdot n}\right|$.

U: Máš nájsť taký index n_0, že všetky členy s väčším alebo rovným indexom budú menšie ako $\dfrac{1}{1000}$. Ako budeš postupovať?

Ž: *Budem riešiť nerovnicu pre premennú n.*

U: Dobre, predveď mi to.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen:* $a_n = \dfrac{1}{2+3\cdot n}$. *Má platiť:*

$$a_n < \frac{1}{1000} \qquad \textit{čiže} \qquad \frac{1}{2+3\cdot n} < \frac{1}{1000}.$$

U: Ako budeš riešiť takúto nerovnicu?

Ž: *Najprv odstránim zlomky násobením oboch strán nerovnice kladným číslom* 1000 *a kladným výrazom* $2+3\cdot n$*, takže mi to nezmení nerovnosť. Keď odstránim zlomky, uvidím, čo sa bude dať zjednodušiť ďalej:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+3\cdot n} &< \frac{1}{1000} \quad / \cdot 1000\cdot(2+3\cdot n)\\
1000 &< 2+3\cdot n \quad / -2\\
998 &< 3\cdot n \quad / :3\\
\frac{998}{3} &< n
\end{aligned}$$

U: Dobre. Akú hodnotu má zlomok $\dfrac{998}{3}$?

Ž: *Zlomok* $\dfrac{998}{3} = 332,66666\cdots = 332,\bar{6}$.

U: Ktoré prvé prirodzené číslo bude spĺňať nerovnosť $n > 332,\bar{6}$?

Ž: *Prvé bude číslo* $n_0 = 333$.
Od člena a_{333} platí, že jeho hodnota aj hodnota všetkých ďalších členov je menšia ako 0,001.

U: Dobre. Prejdi na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \left|\dfrac{1}{1-2\cdot n}\right|$. *Urobím to tak ako v príklade a). Budem proste riešiť nerovnicu:*

$$\left|\frac{1}{1-2\cdot n}\right| < \frac{1}{1000}.$$

U: Áno, ale v tejto nerovnici máš aj ***absolútnu hodnotu***. Som zvedavý, ako si s ňou poradíš.

Ž: *Pousilujem sa. Na ľavej strane nerovnice využijem vlastnosť absolútnej hodnoty podielu a ešte odstránim zlomky:*

$$\frac{|1|}{|1-2\cdot n|} < \frac{1}{1000} \;/ \cdot 1000 \cdot |1-2\cdot n|$$

$$1000 < |1-2\cdot n|$$

A teraz by som mal odstrániť absolútnu hodnotu, lebo inak sa nepohnem ďalej.

U: Zisti, aké znamienko nadobúda výraz v absolútnej hodnote. Máš tam $1-2\cdot n$, je to kladný alebo záporný výraz?

Ž: *Výraz* $1-2\cdot n$ *bude mať stále zápornú hodnotu, takže* $|1-2\cdot n| = -(1-2\cdot n)$. *A ak odstránim zátvorku, tak dostanem opačný výraz k* $1-2\cdot n$, *teda* $2\cdot n-1$. *Už to skoro mám.*

$$\boxed{\begin{array}{c} 1000 < 2\cdot n - 1 \;/ +1 \\ 1001 < 2\cdot n \;/ : 2 \\ \dfrac{1001}{2} < n \\ n > 500{,}5 \end{array}}$$

U: Dobre. Už máš len určiť, ktoré členy sú teda menšie ako 0,001.

Ž: *Má to platiť pre* $n > 500{,}5$, *čiže* $n_0 = 501$.
Od člena a_{501} platí, že všetky ďalšie členy postupnosti sú menšie ako 0,001.

U: Výborne.

Úloha :
Od ktorého člena postupnosti $\{(n-3)^2+4\}_{n=1}^{\infty}$ *platí, že hodnota členov je väčšia než* 200?

Výsledok:
Od 18. člena.

Príklad 5: *Určte najväčší a najmenší člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ danej vzorcom pre n-tý člen:*

a) $a_n = -n^2 + 6n - 5,$

b) $a_n = -n^2 + 5n - 6.$

U: Povedz mi najprv, čo rozumieme pod pojmom ***najväčší*** a ***najmenší člen postupnosti***.

Ž: *Najväčší člen postupnosti je taký člen, že všetky ostatné členy tejto postupnosti sú menšie, nanajvýš rovné tomu najväčšiemu. Podobne, najmenší člen postupnosti je taký, že všetky ostatné členy sú väčšie, nanajvýš rovné tomu najmenšiemu členu.*

U: Správne. Najväčší – maximálny člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme $a_{\max}$ a najmenší – minimálny člen označujeme $a_{\min}$. A teraz už môžeme prejsť na príklady.

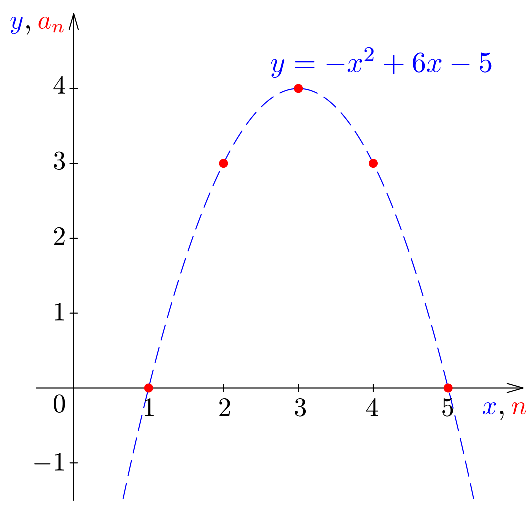
Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen a ten má tvar kvadratického výrazu:* $a_n = -n^2 + 6n - 5$. *Upravím ho na súčin* **koreňových činiteľov***:*

$$a_n = -n^2 + 6n - 5 = -(n^2 - 6n + 5) = -(n - 1)\cdot(n - 5).$$

U: Dobre, ako budeš postupovať ďalej?

Ž: *Z tohto výrazu viem, že keby som nemal postupnosť, ale kvadratickú funkciu, tak jej graf by bola parabola, ktorá pretína os x v bodoch 1 a 5. V strede medzi bodmi 1 a 5 na osi x je bod 3. Keďže parabola je súmerná, tak jej vrchol bude mať súradnice* $[3,\ a_3]$*:* $a_3 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$. *Súradnice vrchola paraboly sú teda* $[3, 4]$.

U: Máš pravdu. Graf tejto kvadratickej funkcie by vyzeral takto:



Ž: *Vrchol paraboly v takejto polohe predstavuje jej maximum. Teda postupnosť má maximálny člen. Je ním tretí člen. Zapíšem to takto:* $a_{\max} = a_3 = 4$.

U: Ostáva ti ešte preveriť, či existuje najmenší člen.

Ž: *Opäť si pomôžem grafom. Od tretieho člena je postupnosť* **klesajúca**. *Parabola v takejto polohe nie je zdola ohraničená a nemá teda ani minimálnu hodnotu. Takže ani* **postupnosť $\{-n^2 + 6\cdot n - 5\}_{n=1}^{\infty}$ nemá minimálny člen**.

U: Vyriešil si to dobre. Prejdime na druhý príklad.

Ž: **b)** *Postupnosť je daná skoro rovnako ako v predchádzajúcom príklade. Kvadratický výraz si upravím na súčin* **koreňových činiteľov***:*

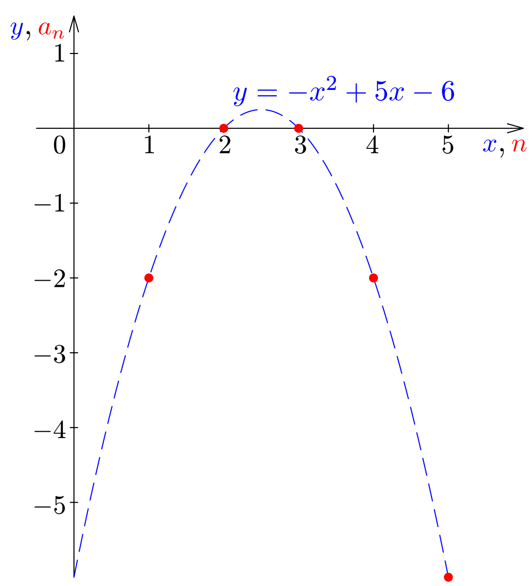
$$a_n = -n^2 + 5n - 6 = -(n^2 - 5n + 6) = -(n - 2)\cdot(n - 3).$$

Keby som nemal postupnosť, ale kvadratickú funkciu $y = -x^2 + 5x - 6$, tak jej graf by pretínal os x v bodoch 2 a 3. V prostriedku medzi týmito číslami je číslo 2,5. Parabola má vrchol v bode $[2{,}5,\ f(2{,}5)]$ a je to jej maximum.

U: V definičnom obore postupnosti sa ale číslo 2,5 nenachádza.

Ž: *Takže postupnosť nemá maximálny prvok.*

U: Neponáhľaj sa. Parabola, ktorá je grafom kvadratickej funkcie $f : y = -x^2 + 5x - 6$ má naozaj v bode $[2{,}5,\ f(2{,}5)]$ svoj vrchol - maximálnu hodnotu. A je pravda, že postupnosť tam nie je definovaná. Pozri sa na graf:



U: Členy a_2 a a_3 majú hodnotu 0, lebo tam parabola pretína os x, ako si povedal. Všetky ostatné členy postupnosti budú menšie než a_2 a a_3. Teda postupnosť má maximum. Je ním hodnota druhého a tretieho člena. Zapísal by som to takto: $a_{max} = a_2 = a_3 = 0$.

Ž: *Tak dobre. Ostáva mi ešte preveriť, či existuje najmenší člen. Opäť si pomôžem grafom kvadratickej funkcie. Člen $a_1 = a_4 = -2$, ale členy a_5, a_6, a_7 ... majú stále menšiu a menšiu hodnotu. Parabola v takejto polohe nie je zdola ohraničená a nemá ani minimálnu hodnotu.*

Úloha :

Určte najväčší a najmenší člen postupnosti $\{n^2 - 9\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok*:*

Najmenším členom je prvý člen s hodnotou −8, najväčší člen postupnosť nemá.

Príklad 6: *Určte najväčší a najmenší člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ danej vzorcom pre n-tý člen:*

a) $a_n = 3n^2 - 14n - 17$,

b) $a_n = \dfrac{21}{3n^2 - 14n - 17}$ *. . . náročnejší príklad.*

U: Povedz mi najprv, čo rozumieme pod pojmom ***najväčší*** a ***najmenší člen postupnosti***.

Ž: *Najväčší prvok postupnosti je taký člen postupnosti, že všetky jej ostatné členy sú menšie, nanajvýš rovné tomu najväčšiemu. Podobne, najmenší prvok postupnosti je taký člen, že všetky ostatné členy sú väčšie, nanajvýš rovné tomu najmenšiemu členu.*

U: Správne. Najväčší – maximálny člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme $a_{\max}$ a najmenší – minimálny člen označujeme $a_{\min}$. A teraz už môžeme prejsť na príklad.

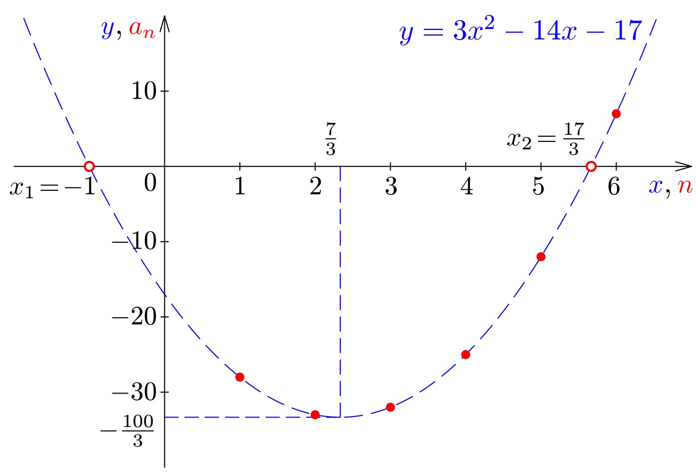
Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom $a_n = 3n^2 - 14n - 17$. Tento kvadratický výraz si upravím na* **súčin koreňových činiteľov***:*

$$3n^2 - 14n - 17 = 3\cdot\left(n^2 - \frac{14}{3}\cdot n - \frac{17}{3}\right) = 3\cdot\left(n - \frac{17}{3}\right)\cdot(n+1) = 3\cdot\left(n - \frac{17}{3}\right)\cdot[n-(-1)]\,.$$

U: Dobre. Ako to využiješ?

Ž: *Keby som nemal postupnosť, ale* **kvadratickú funkciu***, tak jej graf by bola parabola, ktorá pretína os x v bodoch $\frac{17}{3}$ a -1. Vrchol paraboly má x-ovú súradnicu v strede medzi nimi, teda v bode $\frac{7}{3}$.*

U: Súhlasím. Grafické znázornenie funkcie $g: y = 3x^2 - 14x - 17$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ a aj príslušnej postupnosti je na obrázku:



Ž: *Na intervale $\left(-1, \frac{17}{3}\right)$ nadobúda funkcia g záporné hodnoty. Vo vrchole $\left[\frac{7}{3}, -\frac{100}{3}\right]$ má minimum, ale postupnosť tam nie je definovaná. Najbližšie prirodzené čísla k $\frac{7}{3}$ sú 2 a 3. Zistím, ktorý z členov a_2 a a_3 má menšiu hodnotu:*

$a_2 = 3 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 - 17 = -33,$
$a_3 = 3 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 - 17 = -32.$

U: Zistil si, že minimálny člen postupnosti je druhý, jeho hodnota je -33. A čo maximálny člen?

Ž: *Parabola nie je zhora ohraničená, teda nemá maximálny člen. Rovnako je to aj s postupnosťou.*
Postupnosť $\{3n^2-14n-17\}_{n=1}^{\infty}$ má najmenší člen $a_{min} = a_2 = -33$, najväčší člen nenadobúda.

U: Dobre. Tento príklad nám pomôže pri vyriešení príkladu b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{21}{3n^2 - 14n - 17}$. *Vyzerá to na riadnu fušku.*

U: Neboj sa, zvládneš to.

Ž: *Vypočítam hodnoty niekoľkých prvých členov a pomocou nich nejak zistím najväčšiu a najmenšiu hodnotu.*

U: Ak nevieš ako vyzerá graf tejto postupnosti, tak by ťa zopár konkrétnych hodnôt mohlo pomýliť.

Ž: *Tak ako mám postupovať?*

U: Opäť prejdeme od postupností k funkciám. Zavediem označenie $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{g}$ pre funkcie dané takýmito predpismi:

$$f : y = \frac{21}{3x^2 - 14x - 17},\ \mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{17}{3}\right\},$$

$$g : y = 3x^2 - 14x - 17,\ \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

Ž: *Vidím, že funkcia g je vlastne kvadratická funkcia z menovateľa toho zlomku.*

U: Áno. A je to funkcia, ktorou sme sa zaoberali v predchádzajúcom príklade.

Ž: *Takže mi stačí, ak poznám maximálnu a minimálnu hodnotu funkcie g a to mi pomôže k určeniu maximálnej a minimálnej hodnoty funkcie f?*

U: Áno, len nezabúdaj, že predpis funkcie g sa nachádza v menovateli zlomku.

Ž: *Rozumiem. To, čo je najmenšie pre funkciu g je najväčšie pre funkciu f a naopak.*

U: Nie celkom. Tam, kde má funkcia g kladné hodnoty, má ich kladné aj funkcia f. Podobne pre záporné hodnoty. Ale tam, kde funkcia g nadobúda nulové hodnoty, tam funkcia f nie je vôbec definovaná.

Ž: *Áno, lebo pre $x_1 = -1$ a pre $x_2 = \dfrac{17}{3}$ by som mal v menovateli nulu.*

U: Správne. Zameriame sa teraz len na okolie bodu $\dfrac{17}{3}$, pretože -1 nepatrí do definičného oboru postupnosti.

Ž: *Ale ani číslo* $\dfrac{17}{3}$.

U: Číslo $\frac{17}{3}$ síce tiež nie je prirodzené, ale nachádza sa medzi dvoma prirodzenými číslami 5 a 6. Funkčné hodnoty funkcie f sa na okolí bodu $\frac{17}{3}$ správajú takto:

- ***vľavo od*** $\frac{17}{3}$ sú záporné a čím bližšie si zľava pri čísle $\frac{17}{3}$, tým sú funkčné hodnoty menšie a menšie. Blížia sa k nekonečne malým hodnotám.

- ***vpravo od*** $\frac{17}{3}$ sú kladné a čím bližšie si zprava na osi x pri čísle $\frac{17}{3}$, tým sú funkčné hodnoty väčšie a väčšie. Blížia sa k nekonečne veľkým hodnotám.

Ž: *Rozumiem. Musím teda rozlišovať, či som vľavo alebo vpravo od čísla* $\frac{17}{3}$.

U: Áno. Zavedieme si označenie $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3n^2 - 14n - 17\}_{n=1}^{\infty}$. Platí:

$$a_n = \frac{21}{b_n}, \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

A teraz už môžeš uvažovať o najmenšom a najväčšom člene postupností $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. (Pozri sa opäť na graf funkcie g z príkladu a).)

Ž: - *Ak som vľavo od* $\frac{17}{3}$, *tak najväčší záporný člen postupnosti* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je* b_5. *Platí, že:*

$$b_5 = g(5) = -12 \quad \Rightarrow \quad a_{min} = a_5 = \frac{21}{b_5} = \frac{21}{-12} = -1{,}75.$$

- *Ak som vpravo od* $\frac{17}{3}$, *tak najmenší kladný člen postupnosti* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je* b_6. *Platí, že:*

$$b_6 = g(6) = 7 \quad \Rightarrow \quad a_{max} = a_6 = \frac{21}{b_6} = \frac{21}{7} = 3.$$

U: Správne. ***V postupnosti*** $\left\{\frac{21}{3\cdot n^2 - 14\cdot n - 17}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ***je teda najmenším členom*** a_5 ***a najväčším členom*** a_6***.***

Úloha 1:

Určte najväčší a najmenší člen postupnosti $\{3\cdot(-1)^n + 10\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok:

Najväčší prvok $a_{max} = 13$. *Túto hodnotu majú všetky členy s párnym indexom.*
Najmenší prvok $a_{min} = 7$. *Túto hodnotu majú všetky členy s nepárnym indexom.*

Úloha 2:

Určte najväčší a najmenší člen postupnosti $\left\{\frac{91}{3\cdot(-1)^n + 10}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok:

Najväčší prvok $a_{max} = 13$. *Túto hodnotu majú všetky členy s nepárnym indexom.*
Najmenší prvok $a_{min} = 7$. *Túto hodnotu majú všetky členy s párnym indexom.*