Monotónnosť postupnosti

Mgr. Jana Králiková

U: Vieme, že postupnosť je špeciálny prípad ***funkcie***. Aké vlastnosti funkcií poznáš?

Ž: *Je toho dosť:* **párnosť, nepárnosť**, *či je* **funkcia prostá, periodická, monotónna, ohraničená**, *či má* **maximum a minimum** *...*

U: Výborne. Niektoré vlastnosti sú ale pre postupnosti nezaujímavé, pretože ich definičný obor sú len prirodzené čísla.

Ž: *Tomu celkom aj rozumiem. Žiadna postupnosť nie je párna ani nepárna, pretože vľavo od osi y nie sú na osi x žiadne prirodzené čísla.*

U: Áno, takže ***graf postupnosti*** nie je súmerný podľa osi y (teda postupnosť nie je párna) ani podľa začiatku súradnicovej sústavy O_{xy} (takže nie je ani nepárna).

Ž: *Ktorými vlastnosťami sa teda budeme zaoberať pri postupnostiach?*

U: V tejto téme sa budeme zaoberať ***monotónnosťou***. Spomenieš si, čo to je?

Ž: *Pri funkciách to znamenalo, či graf stúpa hore alebo naopak, či klesá dole. Pri postupnostiach to bude asi to isté.*

U: V podstate áno, ale je to nepresné vyjadrenie. Postupnosť môže byť ***rastúca***, ***klesajúca***, ***neklesajúca***, ***nerastúca*** alebo ***konštantná***. Teraz si tieto pojmy zadefinujeme:

Postupnosť je rastúca práve vtedy, ak hodnota ľubovoľného jej člena je menšia ako hodnota nasledujúceho člena. Symbolický zápis si pozri v rámčeku:

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je rastúca} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n < a_{n+1}.}$$

Postupnosť je klesajúca práve vtedy, ak hodnota ľubovoľného jej člena je väčšia ako hodnota nasledujúceho člena. Symbolický zápis máš v rámčeku:

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je klesajúca} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n > a_{n+1}.}$$

Postupnosť je neklesajúca práve vtedy, ak hodnota ľubovoľného jej člena je menšia alebo rovná ako hodnota nasledujúceho člena.

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je neklesajúca} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leqq a_{n+1}.}$$

Postupnosť je nerastúca práve vtedy, ak hodnota ľubovoľného jej člena je väčšia alebo rovná ako hodnota nasledujúceho člena.

$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geqq a_{n+1}.}$$

Postupnosť je konštantná práve vtedy, ak ľubovoľné dva jej členy majú rovnakú hodnotu.

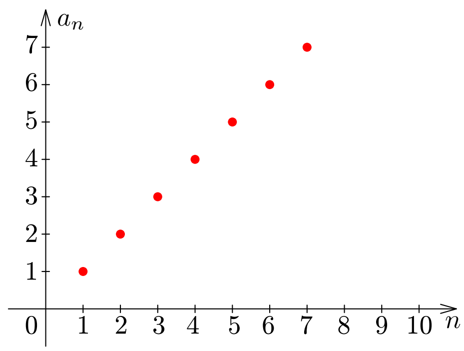
$$\boxed{\text{Postupnosť } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je konštantná} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n = a_{n+1}.}$$

Ž: *Ak sa dobre pamätám, je to zadefinované skoro rovnako ako pri funkciách, len je to inak zapísané.*

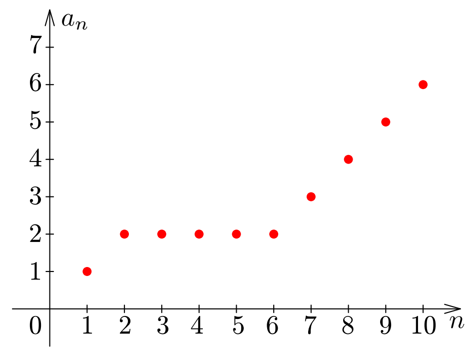
U: Áno a už len doplním, že špeciálne pre rastúce a klesajúce postupnosti sa používa pomenovanie ***rýdzo monotónne postupnosti***. Teraz si preveríme, či si správne pochopil jednotlivé definície.

Z nasledujúcich grafov urč monotónnosť postupností:

a)



b)



Ž: *Oba grafy sa mi zdajú rastúce.*

U: Graf a) naozaj predstavuje ***rastúcu postupnosť***. Pre každé dva za sebou idúce členy a_n a a_{n+1} platí, že $a_{n+1} > a_n$. Ale platí to aj pre graf b)?

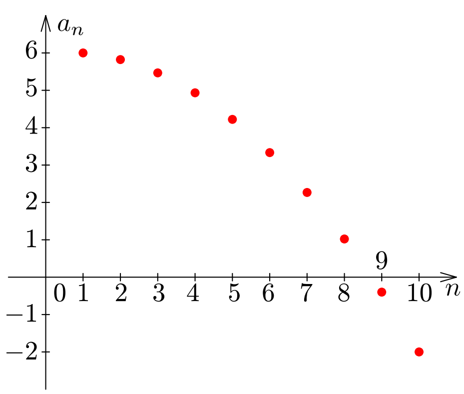
Ž: *Nie. V grafe b) má zopár členov rovnakú hodnotu. Takže to nie je rastúca postupnosť.*

U: Tak porozmýšľaj, aká je.

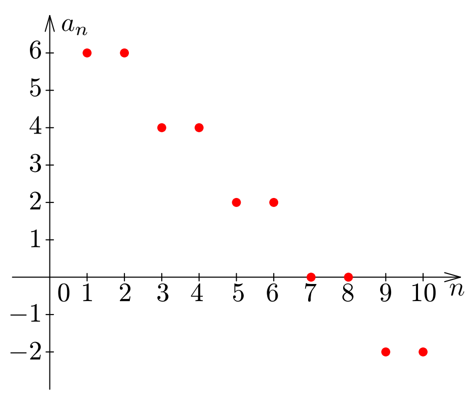
Ž: *Pre niektoré členy platí, že $a_{n+1} = a_n$, pre iné platí, že $a_{n+1} > a_n$. Člen a_{n+1} môže byť väčší alebo rovný ako člen a_n. Takto je podľa definície zavedená* **neklesajúca postupnosť**.

U: Dobre a teraz sa ešte pozri na tieto dva grafy:

c)



d)



Ž: *Graf c) je jasná* **klesajúca postupnosť**. *A graf d) predstavuje postupnosť, kde každý člen môže mať hodnotu rovnakú alebo menšiu než predchádzajúci člen, takže v tomto prípade pôjde o* **nerastúcu postupnosť**.

U: Výborne.

Ž: *A ako budeme zisťovať monotónnosť postupnosti, ak ju budeme mať danú vzorcom a nie grafom?*

U: Presne tak isto ako pri funkciách. V jednoduchších prípadoch sa vychádza priamo z definície. Napríklad: postupnosť je rastúca práve vtedy, ak pre $\forall n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{a to je práve vtedy, ak} \quad a_{n+1} - a_n > 0.$$

Proste si vytvoríš ***rozdiel*** $a_{n+1} - a_n$ a ak je tento rozdiel kladný pre každé $n \in \mathbb{N}$, tak je daná postupnosť rastúca.

Ž: *Rozumiem. Ak je rozdiel $a_{n+1} - a_n$ pre každé prirodzené číslo n záporný, tak ide o klesajúcu postupnosť. A ak je rozdiel každých dvoch susedných členov nulový, tak ide o konštantnú postupnosť.*

U: Aj to môže nastať. Ale konštantnú postupnosť spoznáš hneď, nie je potrebné robiť rozdiel susedných členov.

Ž: *To je pravda. Konštantná postupnosť má vo vzorci pre n-tý člen len nejaké konkrétne číslo a nie premennú n.*

U: Na to aby si zistil monotónnosť postupnosti, nemusíš vytvárať len rozdiel $a_{n+1} - a_n$. Môžeš vytvoriť aj ***podiel*** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Ukážeme si to opäť na rastúcej postupnosti. Postupnosť je rastúca práve vtedy, ak pre každé $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} > a_n$.

Ž: *V nerovnici $a_{n+1} > a_n$ teraz nebudem odčítavať člen a_n, ale budem ním deliť:*

$$a_{n+1} > a_n \;/\; : a_n$$

Lenže výsledný tvar nerovnice bude závisieť od znamienka člena, ktorým delím.

U: Máš pravdu. Ak sú všetky členy postupnosti kladné, tak postupnosť je rastúca práve vtedy, ak pre $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Ž: *A ak sú všetky členy postupnosti záporné, tak pri delení sa zmení symbol nerovnosti na opačný. Postupnosť je potom rastúca práve vtedy, ak pre $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.*

U: Úplne rovnako by si postupoval pri klesajúcej postupnosti. Postupnosť je klesajúca práve vtedy, ak pre každé $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} < a_n$.

Ž: *Takže by som si vytvoril podiel dvoch susedných členov a porovnal by som ho s hodnotou 1. Ak sú všetky členy postupnosti kladné, tak postupnosť je klesajúca práve vtedy, ak $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.*

A ak sú všetky členy záporné, tak postupnosť je klesajúca práve vtedy, ak $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

U: Nezabudni, že pri zisťovaní monotónnosti pomocou podielu musia mať všetky členy postupnosti rovnaké znamienko!

Ž: *Dúfam, že to nepopletiem a že si vždy spomeniem, kedy ktorý vzťah platí.*

U: V prípade potreby si vždy môžeš rýchlo odvodiť pre akú postupnosť platí nerovnosť, ktorá ti vyšla.

Ž: *Alebo môžem použiť rozdiel. Tam nemám čo pokaziť.*

U: Niekedy je podiel výhodnejší. Čím viac príkladov vypočítaš, tým väčší nadhľad získaš, či sa ti použitím podielu členov niečo vykráti alebo nie. V riešenej časti tejto témy nájdeš dostatok príkladov na zisťovanie monotónnosti pomocou rozdielu aj podielu.

Ž: *Toto všetko, čo sme si teraz povedali, platí len pre jednoduchšie prípady? Čo budem potom robiť v zložitejšom prípade?*

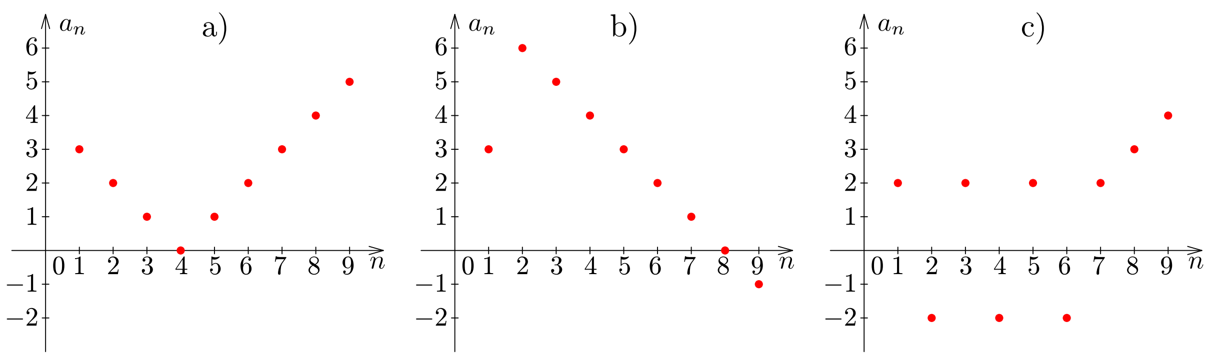
U: Uvedomíš si, že postupnosť je funkcia. Každý jej člen je vlastne funkčná hodnota niektorého prirodzeného čísla, takže budeš vyšetrovať monotónnosť funkcie f, ktorá je daná rovnakým predpisom ako postupnosť, ale jej definičný obor sú reálne čísla.

$$\boxed{f:\ y = f(x),\ \mathcal{D} = \langle 1, +\infty), \ \text{pričom pre každé } n \in \mathbb{N}:\ f(n) = a_n.}$$

Ž: *Pomôžem si grafom funkcie?*

U: Áno. Grafom postupnosti je množina izolovaných bodov, ktoré ležia na grafe príslušnej funkcie. Postupnosť bude mať rovnakú monotónnosť ako táto funkcia.

U: Teraz si prezri nasledujúce grafy nekonečných postupností a povedz mi niečo o ich monotónnosti.



Ž: *Myslím, že o každej postupnosti z týchto obrázkov by som mohol povedať, že nie je monotónna.*

U: Správne. Ani jedna z postupností nie je monotónna v zmysle definície, ktorú sme si uviedli. Ale ak si na každom grafe zakryješ úsek, kde to nie je v súlade s definíciou, uvidíš, že od určitého člena už každá z týchto postupností monotónna je. Skús si to.

Ž: *Dobre, takže:*

- *V prvom grafe mi prekážajú prvé tri členy tejto postupnosti, lebo ich hodnoty sú klesajúce. Od štvrtého člena je už postupnosť rastúca.*

- *V tom druhom grafe mi prekáža vlastne len prvý člen, potom je už postupnosť klesajúca.*

- *A v treťom grafe by som potreboval zakryť až prvých šesť členov a od siedmeho člena už bude postupnosť rastúca.*

U: Postupnosť je rastúca už od šiesteho člena.

Ž: *Aha, naozaj.*

U: O každej z týchto postupností môžeme povedať, že je monotónna, ale až od určitého člena. Tento člen budeme označovať a_{n_0}. Pojem monotónnosti postupnosti môžeme potom zovšeobecniť takto:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je monotónna od určitého indexu*** n_0 $(n_0 \in \mathbb{N})$ ***práve vtedy, ak definičná vlastnosť monotónnosti postupnosti je splnená pre všetky*** $n \geqq n_0$.

Príklady na monotónnosť od určitého člena nájdeš opäť v riešenej časti tejto témy.

Ž: *Trošku si to zhrniem, aby som v tom mal jasno. Zatiaľ sme mali dve možnosti.*
Prvá možnosť: – *postupnosť nezmenila svoju monotónnosť od začiatku až do konca. Teda pri nekonečných postupnostiach – až do nekonečna.*
Druhá možnosť: – *postupnosť mohla na svojom začiatku trošku poskakovať hore-dole, ale potom sa umúdrila a od nejakého člena už svoju monotónnosť viac nezmenila.*

U: To si zhrnul pekne. Ale niektoré funkcie menia monotónnosť na svojom definičnom obore častejšie. Vtedy hovoríme o intervaloch monotónnosti. Podobne je to aj pri postupnostiach.

Ž: *Aha, ale namiesto intervalov máme asi množiny.*

U: Presne tak. Aj v predchádzajúcom obrázku a) by si mohol povedať, že pre $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ je postupnosť klesajúca a pre $n \in \{4,\ 5,\ 6,\ \dots\}$ je rastúca.

Ž: *Takže si pridám aj túto možnosť:*
Tretia možnosť: – *postupnosť môže byť monotónna len na nejakej podmnožine definičného oboru.*

U: Áno, ale tá podmnožina nie je ľubovoľná. Ak je konečná, musí byť typu:

$$\{k,\ k+1,\ k+2,\ k+3,\ \dots,\ k+m\}$$

a ak je nekonečná, musí byť typu:

$$\{k,\ k+1,\ k+2,\ k+3,\ \dots\},$$

kde k a m sú ľubovoľné prirodzené čísla.

Ž: *Rozumiem. Ak je to konečná podmnožina, tak premenná* k *označuje začiatok a premenná* $k+m$ *jej koniec. Ak je tá podmnožina nekonečná, tak začína v* k *a pokračuje až do nekonečna.*

U: Dobre. Všetko, čo potrebuješ k monotónnosti vedieť, sme si vysvetlili.

Príklad 1: *Použitím rozdielu aj podielu susedných členov zistite, či je postupnosť*

$$\left\{\frac{3n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \textit{monotónna.}$$

U: K zisteniu monotónnosti budeš potrebovať vyjadrenia pre členy a_n a a_{n+1}.

Ž: *Predpis pre člen a_n mám v zadaní postupnosti a predpis pre a_{n+1} dostanem tak, že do predpisu pre člen a_n dosadím namiesto premennej n výraz $n+1$. Ak to bude potrebné, tak aj upravím čo mi vznikne:*

$$a_n = \frac{3n-1}{n+2},$$
$$a_{n+1} = \frac{3\cdot(n+1)-1}{n+1+2} = \frac{3n+2}{n+3}.$$

U: Dobre, najprv si ukážeme prvý spôsob zisťovania monotónnosti:

Určenie monotónnosti na základe rozdielu členov a_{n+1} a a_n.

Ž: *Vytvorím teda rozdiel $a_{n+1} - a_n$ a upravím ho:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{n+3} - \frac{3n-1}{n+2} = \frac{(3n+2)\cdot(n+2) - (3n-1)\cdot(n+3)}{(n+3)\cdot(n+2)} =$$
$$= \frac{(3n^2+6n+2n+4) - (3n^2+9n-n-3)}{(n+3)\cdot(n+2)} = \frac{7}{(n+3)\cdot(n+2)}.$$

Hotovo. Čo mám urobiť teraz?

U: Zisti, aké znamienko má výraz, ktorý si dostal. Je tento zlomok kladný alebo záporný?

Ž: *V čitateli mám $+7$, to je kladné číslo. A v menovateli mám súčin $(n+3)\cdot(n+2)$. Obe zátvorky majú pre ľubovoľné prirodzené číslo vždy kladnú hodnotu, takže aj ich súčin bude stále kladný. Čitateľ je kladný, menovateľ je kladný, celý zlomok je teda stále kladný.*

U: Dobre. Keďže tento zlomok je kladný, tak aj rozdiel $a_{n+1} - a_n$ je pre každé prirodzené číslo kladný. Zapíšem to takto:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n.$$

A to je charakteristická vlastnosť pre akú postupnosť?

Ž: *Pre rastúcu. Takže* **postupnosť** $\left\{\frac{3n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je rastúca**.

U: Áno, a ukážeme si aj druhý spôsob zisťovania monotónnosti:

Určenie monotónnosti na základe podielu členov a_{n+1} a a_n.

Ž: *Predpisy pre členy a_{n+1} a a_n už vytvorené mám, môžem rovno vyrobiť ich podiel.*

U: Nezabudni najprv zistiť, či všetky členy postupnosti majú rovnaké znamienko.

Ž: *Aha. V zlomku* $\frac{3n-1}{n+2}$ *je čitateľ aj menovateľ stále kladný, takže celý zlomok je pre každé prirodzené číslo n vždy kladný. Každý člen tejto postupnosti bude mať teda kladnú hodnotu.*

U: Správne. Môžeš vytvoriť podiel $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a upraviť ho.

Ž: *Idem na vec:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3n+2}{n+3}}{\frac{3n-1}{n+2}} = \frac{(3n+2)\cdot(n+2)}{(n+3)\cdot(3n-1)} = \frac{3n^2+6n+2n+4}{3n^2+9n-n-3} = \frac{3n^2+8n+4}{3n^2+8n-3}.$$

Teraz by som asi mal vysloviť nejakú úvahu.

U: Správne. Mal by si porovnať výrazy v čitateli a v menovateli a určiť, ktorý je väčší.

Ž: *Dobre.*

$$3n^2+8n+4 > 3n^2+8n-3,$$

pretože ak odčítam z oboch strán rovnaké členy, dostanem, že:

$$4 > -3,$$

čo je pravda. Čitateľ zlomku je väčší ako menovateľ a teda zlomok má hodnotu väčšiu ako 1.

Postupnosť $\left\{\frac{3n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je teda rastúca.**

Úloha :

Zistite, či je postupnosť $\left\{\frac{2\cdot(n-1)}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna.*

Výsledok:

Postupnosť je rastúca.

Príklad 2: *Zistite, či je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna, ak:*

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$,

b) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

U: Máš zisťovať monotónosť daných postupností. Vieš, ako na to?

Ž: *Najprv musím vytvoriť predpis pre člen* a_{n+1}. *Potom vytvorím rozdiel* $a_{n+1} - a_n$ *alebo podiel* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *Pomocou výsledného výrazu určím monotónnosť.*

U: Dobre, ukážeš mi to na konkrétnych postupnostiach.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen* $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. *Pripravím si predpis pre člen* a_{n+1}, *dosadením výrazu* $n+1$ *za premennú* n *do vzorca pre člen* a_n*:*

$$a_n = \frac{n+1}{n},$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Teraz vytvorím rozdiel týchto členov a upravím ho:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)\cdot n - (n+1)\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n} =$$

$$= \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{(n+1)\cdot n} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)\cdot n} = \frac{-1}{(n+1)\cdot n}.$$

Hotovo. Viac sa to už zjednodušiť nedá.

U: Dobre. Aké znamienko má výsledný zlomok?

Ž: *Súčin* $(n+1)\cdot n$ *v menovateli je kladný, lebo* n *je prirodzené číslo. V čitateli je záporné číslo* -1. **Podiel záporného a kladného čísla je vždy záporný**. *Takže môžem napísať:*

$$a_{n+1} - a_n < 0, \text{ teda } a_{n+1} < a_n.$$

Tento vzťah platí pre každé prirodzené číslo n, *takže* **daná postupnosť je klesajúca**. *Zvláštne, myslel som si, že keď mám v zadaní v čitateli väčšiu hodnotu ako v menovateli, tak postupnosť bude rásť.*

U: V zlomku $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ je čitateľ naozaj väčší ako menovateľ. Hodnota zlomku je teda väčšia ako 1. Platí to pre každý člen tejto postupnosti. Ale keď uvažuješ o celej postupnosti takýchto čísel, tak výsledná hodnota zlomkov sa pre rastúce n zmenšuje. Skús si vyčísliť niekoľko prvých členov.

Ž: *Dobre. Niekoľko prvých hodnôt si zapíšem do tabuľky:*

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = \dfrac{n+1}{n}$	2	1,5	$1,\overline{3}$	1,25	1,2	...

Už to vidím. Takže **postupnosť** $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je** *naozaj* **klesajúca**.

U: Naozaj klesajúca je preto, lebo si to predtým dokázal. Nie preto, že si to overil na niekoľkých konkrétnych členoch. Prejdime na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen* $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

U: Pamätáš sa ešte na to, čo znamená ten výkričník v menovateli?

Ž: *Hm, že si mám dať na niečo pozor?*

U: Dúfam, že žartuješ. Pozor máš dávať stále. Ten výkričník znamená niečo iné. Spomenieš si na slovo ***faktoriál*** ?

Ž: *Už si spomínam. To bol taký postupný súčin. Násobili sa medzi sebou čísla - počnúc tým, za ktorým bol výkričník, až po číslo* 1.

U: Presnejšie, pre každé prirodzené číslo n je:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Ž: *Dobre, idem na vec. Najprv si vytvorím predpis pre* a_{n+1}*:*

$$a_n = \frac{2^n}{n!},$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Teraz si vytvorím rozdiel členov a_{n+1} *a* a_n.

U: Rozdiel si predviedol v príklade a). Teraz zisti monotónnosť použitím podielu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ž: *Vykonám:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!} = \frac{2 \cdot n!}{(n+1)!} = \cdots$$

A ďalej ako? Neviem vykrátiť tie faktoriály.

U: Tak si pripomenieme vlastnosť faktoriálu. Pre každé prirodzené číslo n platí:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Ž: *Aha, teraz už budem vedieť pokračovať v úprave podielu:*

$$\cdots = \frac{2 \cdot n!}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1}.$$

U: Pri použití podielu členov potrebuješ vedieť, či máš postupnosť len s kladnými členmi alebo len so zápornými členmi.

Ž: *Každý člen tejto postupnosti viem vypočítať podľa vzorca* $a_n = \frac{2^n}{n!}$. *Čitateľ je stále kladný, menovateľ tiež. Takže mám postupnosť, ktorá má len kladné členy.*

U: A ako teda zistíš monotónnosť?

Ž: *Zistím, či je zlomok* $\dfrac{2}{n+1}$ *väčší alebo menší ako* 1. *Postupnosť je rastúca vtedy, ak*

$$\frac{2}{n+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > n.$$

Čo mi to vlastne vyšlo?

U: Vyšlo ti, že postupnosť je rastúca pre také prirodzené čísla, ktoré sú menšie ako 1.

Ž: *Prirodzené čísla menšie ako* 1*? Také nie sú. Aha, už rozumiem. Postupnosť nie je rastúca, takže je klesajúca.*

U: Neponáhľaj sa. Ak postupnosť nie je rastúca, neznamená to, že musí byť nutne klesajúca. Prever to.

Ž: *Tak dobre. Postupnosť je klesajúca vtedy, ak*

$$\frac{2}{n+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < n.$$

Postupnosť je teda klesajúca pre prirodzené čísla väčšie ako 1. *To znamená od druhého člena. Prvý člen zrejme nejakým spôsobom tú monotónnosť pokazil. Mohol by som si vyčísliť niekoľko prvých členov, aby som videl, ako to vyzerá?*

U: Samozrejme.

Ž: *Tak teda:*

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = \dfrac{2^n}{n!}$	2	2	$1{,}\overline{3}$	$0{,}\overline{3}$	$0{,}2\overline{6}$	...

U: Už vidíš ako sa správa prvý člen?

Ž: *Áno, je rovnaký ako druhý člen. Až potom sa hodnoty členov zmenšujú.*

U: Ako sa nazýva takáto postupnosť?

Ž: **Postupnosť $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca. Od druhého člena je klesajúca.**

U: Výborne. Nasledujúca úloha je pre tvoju samostatnú prácu.

Úloha :

Zistite, či je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna, ak:*

a) $a_n = \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$,

b) $a_n = 5\cdot 1{,}01^n$.

Výsledok*:*

Postupnosť je

a) klesajúca,

b) rastúca.

Príklad 3: *Zistite, či je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna, ak:*

a) $a_n = n \cdot \dfrac{1+(-1)^n}{2}$,

b) $a_n = n + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

U: Máš zisťovať monotónosť daných postupností. Vieš, ako na to?

Ž: *Najprv musím vytvoriť predpis pre člen* a_{n+1}. *Potom vytvorím rozdiel* $a_{n+1} - a_n$ *alebo podiel* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *Pomocou výsledného výrazu určím monotónnosť.*

U: Dobre, ukážeš mi to na konkrétnych postupnostiach.

Ž: **a)** *Prvá postupnosť je daná vzorcom* $a_n = n \cdot \dfrac{1+(-1)^n}{2}$. *Asi vám nebude stačiť, keď si vypíšem niekoľko prvých členov a tak zistím monotónnosť, však?*

U: To mi naozaj nebude stačiť. A tebe by to tiež nemalo stačiť. Potrebuješ dokázať, že niečo platí alebo neplatí pre všetky členy postupnosti, nielen pre niekoľko prvých členov.

Ž: *Tak dobre. Vyjadrím si vzorec pre člen* a_{n+1} *tak, že dosadím do vzorca pre* a_n *za premennú* n *výraz* $n+1$*:*

$$a_n = n \cdot \frac{1+(-1)^n}{2},$$

$$a_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}.$$

Určím ich rozdiel.

U: Dobre. Podiel nie je možné použiť, pretože postupnosť má aj nulové členy. Pri vytváraní rozdielu bude veľa úprav, tak dávaj pozor, aby si neurobil chybu.

Ž: $a_{n+1} - a_n =$

$$= (n+1) \cdot \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - n \cdot \frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{(n+1) \cdot [1+(-1)^{n+1}] - n \cdot [1+(-1)^n]}{2} =$$

$$= \frac{n+1+n \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} - n - n \cdot (-1)^n}{2} = \frac{1 + n \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} - n \cdot (-1)^n}{2}.$$

A čo ďalej?

U: Ešte môžeš upraviť mocniny čísla -1 na rovnaký stupeň a vybrať ich pred zátvorku.

Ž: *Uf. Mocninu* $(-1)^{n+1}$ *si napíšem ako súčin* $(-1)\cdot(-1)^n$. *Dostanem:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 - n \cdot (-1)^n - (-1)^n - n \cdot (-1)^n}{2} = \frac{1 - (-1)^n \cdot (2n+1)}{2}.$$

U: Výborne. Hodnota tohto výrazu ale závisí od hodnoty mocniny čísla -1.

Ž: - *Ak n **je párne**, tak:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(+1)\cdot(2n+1)}{2} = \frac{1-2n-1}{2} = \frac{-2n}{2} = -n.$$

- *Ak n **je nepárne**, tak:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(-1)\cdot(2n+1)}{2} = \frac{1+2n+1}{2} = \frac{2+2n}{2} = n+1.$$

U: A teraz sa pozrime, čo nám to vlastne vyšlo. Aký je rozdiel za sebou idúcich členov?

Ž: *Pre párne n má rozdiel hodnotu $-n$, teda je záporný. A pre nepárne n je rozdiel kladný, lebo má hodnotu $n+1$. Rozdiel susedných členov je raz kladný, raz záporný. Takže postupnosť nie je monotónna?*

U: Veru, nie je. ***Postupnosť*** $\left\{n \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ***nie je monotónna.*** Vypíš si niekoľko prvých členov, možno ťa to presvedčí.

Ž: *Dobre.*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = n \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}$	0	2	0	4	0	6	0	...

U: Tak čo povieš na takúto postupnosť?

Ž: *Teraz to už vidím. Členy s nepárnym poradovým číslom sú nulové a členy s párnym prirodzeným číslom majú stále väčšiu prirodzenú hodnotu. Tak toto naozaj nie je monotónna postupnosť.*

U: Pokiaľ členy postupnosti takto kmitajú - raz hore, raz dole - hovorí sa tomu kmitajúca alebo oscilujúca postupnosť. Tá nepatrí medzi monotónne.

Ž: *A to kmitanie mi tam zabezpečuje výraz $(-1)^n$. Kvôli nemu raz odpočítavam a raz pripočítavam.*

U: Áno, ale nie vždy je to tak. Prejdi na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen $a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2}$. Myslím, že tu nie je čo riešiť. Vo vzorci je výraz $(-1)^n$, ten strieda znamienka, takže postupnosť nie je monotónna, ale oscilujúca.*

U: To je veľmi unáhlené tvrdenie.

Ž: *Tak ja vám to teda dokážem. Najprv si vyjadrím vzorec pre a_{n+1}:*

$$a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2},$$

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}.$$

Teraz vytvorím rozdiel týchto členov.

U: V poriadku.

Ž: $a_{n+1} - a_n = n + 1 + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - \left(n + \frac{1+(-1)^n}{2}\right) =$

$$= n + 1 + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} - n - \frac{1+(-1)^n}{2} = 1 + \frac{1+(-1)^{n+1} - 1 - (-1)^n}{2} =$$

$$= 1 + \frac{(-1)^{n+1} - (-1)^n}{2} = 1 + \frac{(-1)^n \cdot (-1-1)}{2} = 1 - (-1)^n.$$

U: Dobre. Ostáva ti určiť, či je tento výraz kladný alebo záporný.

Ž: - *Ak n* **je párne**, *tak:*

$$a_{n+1} - a_n = 1 - (+1) = 0.$$

- *Ak n* **je nepárne**, *tak:*

$$a_{n+1} - a_n = 1 - (-1) = 2.$$

U: Hodnoty 0 a 2, teda možné výsledky rozdielu $a_{n+1} - a_n$, sú obe nezáporné. Môžeme teda zapísať, že $a_{n+1} - a_n \geqq 0$. Odtiaľ ale dostaneme, že $a_{n+1} \geqq a_n$. A to je vzťah pre akú postupnosť?

Ž: *Keďže pre všetky členy postupnosti platí, že $a_{n+1} \geqq a_n$, tak* **postupnosť** $\left\{n + \frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je neklesajúca**.

U: Áno. Vypočítaj si opäť niekoľko prvých členov, aby si aj videl to, čo si dokázal.

Ž: *To urobím rád:*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2}$	1	3	3	5	5	7	7	...

Pekná postupnosť. Ak je n nepárne, nechám ho bez zmeny, ak je n párne, tak ho zväčším o 1. A vidím, že takto daná postupnosť je naozaj neklesajúca.

U: Výborne.

Úloha :

Zistite, či je postupnosť $\left\{2 + 3\cdot(-1)^{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna.*

Výsledok:

Postupnosť je oscilujúca.

Príklad 4: *Pomocou grafu príslušnej funkcie zistite monotónnosť postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak:*
a) $a_n = 2 + 10^n$,
b) $a_n = -2\cdot\log n$.

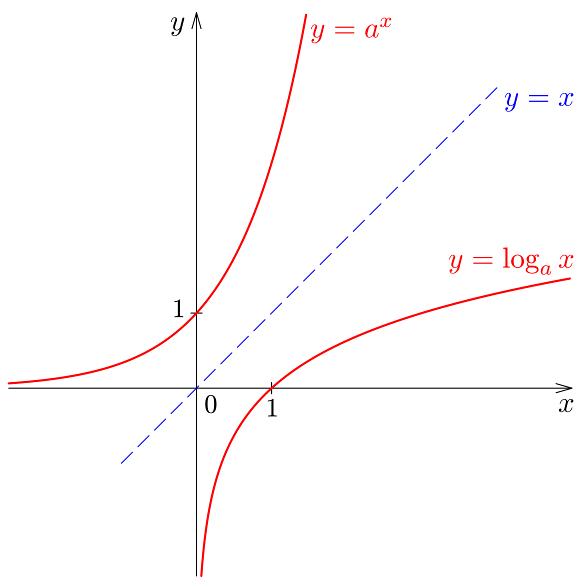
U: Postupnosť je definovaná na množine prirodzených čísel. Ale keďže máš využiť grafy funkcií, tak si musíš tento definičný obor rozšíriť.

Ž: *Vytvorím si funkcie* f *a* g*:*
$f:\ y = 2 + 10^x$, *pre* $x \in \mathbb{R}$.
$g:\ y = -2\cdot\log x$, *pre* $x \in \mathbb{R}^+$.

U: V poriadku, aj keď ako definičný obor funkcií by postačoval interval $\langle 1, \infty)$. Ako vyzerá graf ***exponenciálnej*** a ***logaritmickej funkcie***?

Ž: *Hm. Neviem. Nepamätám sa.*

U: Pomôžem ti, ale grafy základných funkcií (kvadratických, mocninových, exponenciálnych, logaritmických, goniometrických, ...) je dobré mať v hlave. Sám vidíš, že sa nevyužívajú len vtedy, keď sa preberajú funkcie. Tu je graf exponenciálnej a k nej inverznej logaritmickej funkcie pre základ $a > 1$.



Ž: *Základ v exponenciálnej aj logaritmickej funkcii je u mňa* $a = 10$. *Lenže moje funkcie nie sú v základnom tvare. Exponenciálna funkcia* f *má oproti základnej funkcii* $y = 10^x$ *každú hodnotu zväčšenú o* 2. *A logaritmická funkcia* g *ju má vynásobenú číslom* -2.

U: To by ti nemalo prekážať pri určení monotónnosti.

Ž: *Máte pravdu. Exponenciálna funkcia* $y = 10^x$ *je rastúca. Ak každú jej hodnotu zväčším o* 2, *dostanem funkciu* f, *ktorej graf bude posunutý smerom nahor o* 2. *Ale funkcia ostane rastúca.*

U: Áno. Grafom postupnosti je množina izolovaných bodov, ktoré ležia na grafe funkcie, takže aj ***postupnosť*** $\{2 + 10^n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je rastúca***.

Ž: *Logaritmická funkcia* $y = \log x$ *je tiež rastúca. Ak by som každú jej hodnotu zväčšil* 2*-krát, dostal by som opäť rastúcu funkciu, len jej graf by stúpal hore strmšie.*

U: Súhlasím, ale ešte máš aj zmeniť znamienko.

Ž: *Takže sa mi z rastúcej stane klesajúca. Funkcia g je vďaka násobeniu záporným číslom už klesajúca, takže aj* **postupnosť** $\{-2 \cdot \log n\}_{n=1}^{\infty}$ **je klesajúca**. *Hotovo. S grafom to nebolo ani také ťažké.*

U: Súhlasím.

Úloha :

Pomocou grafu príslušnej funkcie zistite monotónnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak:

a) $a_n = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

b) $a_n = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

c) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

d) $a_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Výsledok:

a) c) klesajúca,
b) d) rastúca.

Príklad 5: *Zistite, či je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna, ak je daná rekurentným vzťahom:*

a) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = -2{\cdot}a_n,\ n \in \mathbb{N}$,

b) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2},\ \ n \in \mathbb{N}$.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná rekurentne takto:* $a_1 = 10$, $a_{n+1} = -2{\cdot}a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Použijem podiel členov a_{n+1} a a_n, lebo tuším, že sa mi tam niečo vykráti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot a_n}{a_n} = -2.$$

To bolo rýchle. Podiel je menší ako 1, takže daná postupnosť je klesajúca.

U: Nemáš pravdu. Ak vytváraš podiel členov a_{n+1} a a_n a chceš ho porovnávať s číslom 1, tak musí byť splnená jedna podmienka. Pamätáš sa?

Ž: *Nie.*

U: Všetky členy postupnosti musia mať rovnaké znamienko. Je to splnené v tejto postupnosti?

Ž: *To neviem, ako to mám zistiť?*

U: Pozri sa na rekurentný predpis. Ak chceš vypočítať hodnotu nasledujúceho člena a_{n+1}, musíš člen a_n násobiť záporným číslom. Aj každý ďalší člen budeš násobiť záporným číslom. Ako sa budú správať znamienka jednotlivých členov?

Ž: *Myslím, že znamienka sa budú striedať. Raz plus, raz mínus.*

U: Presne tak. Vyjadri si niekoľko prvých členov tejto postupnosti, aby si v tom mal jasnejšie.

Ž: *Dobre.*

n	1	2	3	4	5	...
a_n	10	-20	$+40$	-80	$+160$	...

Už to vidím. Členy postupnosti naozaj striedajú svoje znamienka. Takže o monotónnosti nemôže byť ani reči.
Postupnosť daná rekurentným vzťahom $a_1 = 10,\ a_{n+1} = -2 \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N}$ nie je monotónna.

U: Teraz je to správne.

Ž: **b)** *Postupnosť je daná rekurentným vzťahom* $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
S takýmto vzorcom som sa už niekde stretol. Je to **aritmetický priemer** *dvoch čísel, však?*

U: Áno, počnúc tretím členom postupnosti je každý ďalší člen vytvorený ako aritmetický priemer predchádzajúcich dvoch členov. Ako si poradíš so zistením monotónnosti takejto postupnosti?

Ž: *Ani neviem. Poradíte mi?*

U: Vytvor si rozdiel za sebou idúcich členov. Teraz to ale bude rozdiel členov a_{n+2} a a_{n+1}.

Ž: *Dobre.*

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} - a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1} - 2 \cdot a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2}.$$

Viac to už zjednodušiť neviem. Ale ako odtiaľ získam informáciu o monotónnosti?

U: Uprav výsledný zlomok tak, aby v jeho čitateli bol rozdiel členov a_{n+1} a a_n.

Ž: *Takže v čitateli vyberiem pred zátvorku číslo -1. Tým sa mi zmenia znamienka na opačné:*

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{-1 \cdot (a_{n+1} - a_n)}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (a_{n+1} - a_n).$$

U: Už sme takmer na konci. Ak je rozdiel $a_{n+1} - a_n$ kladný a vynásobíš ho číslom $-\frac{1}{2}$, tak hodnota rozdielu $a_{n+2} - a_{n+1}$, bude záporná. Zapísal by som to takto:

$$ak \quad a_{n+1} - a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} - a_{n+1} < 0.$$

A naopak, ak je rozdiel členov $a_{n+1} - a_n$ záporný a vynásobíš ho záporným číslom $-\frac{1}{2}$, tak dostaneš kladnú hodnotu. Rozdiel členov $a_{n+2} - a_{n+1}$ bude teda kladný:

$$ak \quad a_{n+1} - a_n < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} - a_{n+1} > 0.$$

Zatiaľ rozumieš?

Ž: *Áno, lenže neviem, pre ktoré čísla a_{n+1} a a_n je ich rozdiel kladný a pre ktoré záporný.*

U: To ani nepotrebuješ. Stačí ti vedieť, že ak máme ľubovoľné tri za sebou idúce členy postupnosti, tak rozdiel prvých dvoch bude mať iné znamienko, ako rozdiel druhých dvoch. A to stačí na to, aby si vytvoril záver, že daná postupnosť nie je monotónna.

Ž: *Aha, pretože pri monotónnej postupnosti sú znamienka rozdielov vždy rovnaké, však? A môžem si napísať hodnoty niekoľkých prvých členov?*

U: Pravdaže. Vidím, že ti matematické odvodenie nepostačuje. Tak ich vypočítaj.

Ž: *Dobre.*

n	1	2	3	4	5	6	...
a_n	1	2	1,5	1,75	1,625	1,6875	...

Teraz už to vidím. Raz to stúpne, potom klesne, znovu stúpne a potom klesne... Takže **postupnosť nie je monotónna**.

Úloha :

Zistite, či je monotónna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je daná rekurentným vzťahom:

a) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n - 10$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2} + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Výsledok:

Postupnosť je

a) klesajúca,

b) rastúca.

Príklad 6: *Určte, pre ktoré hodnoty parametra $p \in \mathbb{R}$ je postupnosť $\left\{\frac{2\cdot n+p}{n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca a pre ktoré je klesajúca.*

U: V predpise pre danú postupnosť sa nachádza parameter p. Máš zistiť, ako závisí monotónnosť postupnosti od hodnoty tohto parametra.

Ž: *Vyjadrím si najprv predpis pre člen a_{n+1} tak, že do predpisu pre člen a_n dosadím za premennú n výraz $n+1$:*

$$a_n = \frac{2\cdot n+p}{n+4},$$
$$a_{n+1} = \frac{2\cdot n+2+p}{n+5}.$$

U: Dobre. Ako budeš postupovať ďalej?

Ž: *Vytvorím si rozdiel týchto dvoch členov a upravím ho:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\cdot n+2+p}{n+5} - \frac{2\cdot n+p}{n+4} = \frac{(2\cdot n+2+p)\cdot(n+4) - (2\cdot n+p)\cdot(n+5)}{(n+5)\cdot(n+4)} = \cdots$$

Uf. Upraviť to bude fuška.

U: Len pomaly, aby si sa nepomýlil. Roznásob zátvorky v čitateli a uvidíš, čo sa dá zlúčiť.

Ž: *Aj v menovateli mám roznásobiť tie dve zátvorky?*

U: Nie. V menovateli máš súčin dvoch stále kladných zátvoriek. Takže aj ich súčin je kladný. Čitateľa potrebuješ roznásobiť preto, aby sa ti zjednodušil. Kým je v takomto tvare, nevieš rozhodnúť, či je kladný alebo záporný.

Ž: *Takže roznásobím zátvorky v čitateli:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2\cdot n^2+2\cdot n+p\cdot n+8\cdot n+8+4\cdot p) - (2\cdot n^2+10\cdot n+p\cdot n+5\cdot p)}{(n+5)\cdot(n+4)} =$$
$$= \frac{2\cdot n^2+2\cdot n+p\cdot n+8\cdot n+8+4\cdot p-2\cdot n^2-10\cdot n-p\cdot n-5\cdot p}{(n+5)\cdot(n+4)} =$$
$$= \frac{8-p}{(n+5)\cdot(n+4)}.$$

Poriadne sa to zmenšilo a hlavne zjednodušilo.

U: Áno. Teraz máš rozhodnúť, kedy je postupnosť rastúca.

Ž: *Rastúca je vtedy, ak je rozdiel členov a_{n+1} a a_n, teda vlastne výraz $\frac{8-p}{(n+5)\cdot(n+4)}$, väčší ako 0. Menovateľ je stále kladný, takže celý zlomok je kladný len vtedy, ak je aj čitateľ kladný. Teda výraz $(8-p)$ musí byť väčší ako 0. A to je vtedy, ak parameter p je menší ako 8.*

U: Výborne. Ja to už len zapíšem symbolicky:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8-p}{(n+5)\cdot(n+4)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8-p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p < 8.$$

Postupnosť $\left\{\frac{2\cdot n+p}{n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca pre parameter p menší ako 8.

Ž: *Ešte mám zistiť, kedy bude táto postupnosť klesajúca. To musím urobiť ešte raz všetky tie úpravy zlomku?*

U: Nie, nemusíš. Veď tými úpravami si len vyjadril rozdiel členov a_{n+1} a a_n. Pouvažuj, kedy je postupnosť klesajúca.

Ž: *Aha. Takže postupnosť je klesajúca, ak je rozdiel členov a_{n+1} a a_n, teda vlastne výraz $\frac{8-p}{(n+5)\cdot(n+4)}$, menší ako 0. Menovateľ je vždy kladný. Keďže celý zlomok má byť záporný, tak musí byť záporný čitateľ. Teda výraz $(8-p)$ musí byť menší ako 0. A to je vtedy, ak je parameter p väčší ako 8.*

U: Skús to zapísať symbolicky.

Ž: *Dobre:*

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8-p}{(n+5)\cdot(n+4)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8-p<0 \quad \Leftrightarrow \quad p > 8.$$

Postupnosť $\left\{\frac{2\cdot n+p}{n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca pre parameter p väčší ako 8.

U: Zaujíma ťa čo nastane, ak sa parameter p rovná hodnote 8?

Ž: *Áno. Môžem to zistiť?*

U: Pravdaže. Dosaď si za p hodnotu 8 do predpisu pre n-tý člen a uprav vzniknutý výraz.

Ž: *Takže:*

$$a_n = \frac{2\cdot n+p}{n+4} = \frac{2\cdot n+8}{n+4} = \frac{2\cdot(n+4)}{n+4} = 2.$$

Ak parameter $p=8$, tak $a_n = 2$.

U: Áno. Každý člen postupnosti má hodnotu 2. Je to konštantná postupnosť, špeciálny prípad nerastúcej aj neklesajúcej postupnosti. Podľa zadania si mal určiť, kedy je postupnosť rastúca alebo klesajúca.

Ž: **Postupnosť je teda rastúca alebo klesajúca, len ak parameter $p \neq 8$.** *Ak je väčší ako 8, tak je postupnosť klesajúca. Ak je menší ako 8, tak je postupnosť rastúca.*

Úloha :

Určte, pre ktoré hodnoty parametra $p \in \mathbb{R}$ je postupnosť $\left\{\frac{n\cdot p}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca.

Výsledok:

Postupnosť je klesajúca, ak $p < 0$.

Príklad 7: *Zistite, či je postupnosť* $\{n^2 - 7n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna od určitého indexu* n_0.

U: Ako zistíš, či je postupnosť monotónna od určitého indexu?

Ž: *Urobím to tak, že si nebudem všímať, že mám nájsť nejaký konkrétny index* n_0. *Budem normálne zisťovať monotónnosť postupnosti. Uvidím, čo mi bude vychádzať.*

U: To je celkom dobrý postup. Zisti teda, či je naša postupnosť monotónna.

Ž: *Pripravím si členy* a_n *a* a_{n+1}:

$a_n = n^2 - 7n,$
$a_{n+1} = (n+1)^2 - 7\cdot(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 7n - 7 = n^2 - 5n - 6.$

Teraz vytvorím ich rozdiel:

$$a_{n+1} - a_n = n^2 - 5n - 6 - \left(n^2 - 7n\right) = n^2 - 5n - 6 - n^2 + 7n = 2n - 6.$$

Vyšiel mi výraz $2n - 6$. *Tento výraz nie je vždy len kladný alebo vždy len záporný, takže postupnosť nie je monotónna.*

U: Zatiaľ správne, ale ak zistíš kedy je tento výraz kladný a kedy je záporný, tak tým vlastne presnejšie určíš, kde je postupnosť rastúca a kde je klesajúca.

Ž: *Zistím to vyriešením nerovničiek:*

postupnosť je rastúca $\Leftrightarrow \quad 2n - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n > 3 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{4,\ 5,\ 6,\ \dots\},$

postupnosť je klesajúca $\Leftrightarrow \quad 2n - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < 3 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{1,\ 2\}.$

U: A čo s hodnotou $n = 3$?

Ž: *Vypočítam si hodnotu tretieho člena aj jeho susedných členov a rozhodnem, kam ho zaradím.*

n	1	2	3	4	5	...
a_n	-6	-10	-12	-12	-10	...

Už to vidím. Tretí člen môžem zaradiť ku klesajúcej časti.

U: ***Postupnosť je rastúca až od štvrtého člena***. Index, od ktorého postupnosť rastie, je $n_0 = 4$.

Úloha :

Zistite, či je postupnosť $\{-n^2 + 11n - 28\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna od určitého indexu* n_0.

Výsledok:

Postupnosť je od klesajúca od šiesteho člena, $n_0 = 6$.

Príklad 8: *Zistite, či je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna od určitého indexu* n_0*, ak:*

a) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$,

b) $a_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ *... náročnejší príklad.*

U: Ako zistíš, či je postupnosť monotónna od určitého indexu?

Ž: *Urobím to tak, že si nebudem všímať, že mám nájsť nejaký konkrétny index* n_0*. Budem normálne zisťovať monotónnosť postupnosti. Uvidím, čo mi bude vychádzať.*

U: To je celkom dobrý postup. Zisti teda, či je naša prvá postupnosť monotónna.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{2^n}{n}$*. Pripravím si predpis pre člen* a_{n+1}*, dosadením výrazu* $n+1$ *za premennú* n *do vzorca pre člen* a_n*:*

$a_n = \dfrac{2^n}{n}$,

$a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.

Vytvorím podiel týchto dvoch členov, možno sa mi pri delení niečo vykráti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}\cdot n}{2^n\cdot(n+1)} = \frac{2\cdot n}{n+1}.$$

U: Ak chceš použiť podiel, musíš vedieť, či všetky členy postupnosti majú rovnaké znamienko.

Ž: *Uhm. Vzorec pre n-tý člen je* $a_n = \dfrac{2^n}{n}$*. Mocniny dvojky v čitateli sú stále kladné a prirodzené čísla v menovateli tiež. Celý zlomok bude teda vždy kladný.*

U: Dobre. Postupnosť má len kladné členy. Ako teraz zistíš, či je napríklad rastúca?

Ž: *Preverím, či podiel členov, teda zlomok* $\dfrac{2\cdot n}{n+1}$ *je väčší ako* 1*:*

$$\textit{Postupnosť je rastúca} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\cdot n}{n+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot n > n+1 \quad \Leftrightarrow \quad n > 1.$$

Vyšlo mi, že postupnosť je rastúca, ak indexy jej členov sú prirodzené čísla väčšie ako 1*.*

U: Vypočítaj si hodnoty niekoľkých prvých členov tejto postupnosti.

Ž: *Každý člen tejto postupnosti je daný vzorcom* $a_n = \dfrac{2^n}{n}$*. Dostanem takéto hodnoty:*

n	1	2	3	4	5	...
a_n	2	2	$2{,}\overline{6}$	4	6,4	...

U: Stačí. Vidíš, ako prvý člen postupnosti „pokazil“ celkovú monotónnosť?

Ž: *Áno.* **Postupnosť $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a pre členy s indexom $n_0 \geqq 2$ je rastúca.**

U: Dobre, môžeme prejsť na príklad b), ten bude trošku náročnejší.

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom $a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$. Pripravím si vzorec pre člen a_{n+1}:*

$$a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}},$$

$$a_{n+1} = \frac{1-(n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{-n}{\sqrt{n+1}}.$$

Teraz vytvorím podiel $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

U: Preruším ťa. Akú hodnotu má prvý člen tejto postupnosti?

Ž: *Ak je $n=1$, tak $a_1 = \frac{1-1}{\sqrt{1}} = \frac{0}{1} = 0$. Hops. Podiel členov by mal v menovateli nulu.*

U: Aké sú znamienka ostatných členov postupnosti? Sú rovnaké?

Ž: *Vo výraze $\frac{1-n}{\sqrt{n}}$ je pre $n > 1$ čitateľ zlomku stále záporný. Menovateľ je kladný. Od druhého člena postupnosti budú všetky záporné.*

U: Áno. Podiel za sebou idúcich členov môžeš vytvoriť, ale len pre $n > 1$.

Ž: *Dobre. Vytvorím ho a zjednoduším:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-n}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1-n}{\sqrt{n}}} = \frac{-n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot(1-n)} = \frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot(n-1)} = \cdots$$

U: Teraz odstráň odmocninu z menovateľa.

Ž: *Vynásobím výsledný zlomok zlomkom s hodnotou 1:*

$$\cdots = \frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot(n-1)} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}{(n+1)\cdot(n-1)} = \frac{n\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}{n^2-1}.$$

No, to som si veľmi nepomohol.

U: Ale áno. Urobíme takúto úvahu:
V čitateli tohto zlomku je súčin $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}$. Ten je určite väčší ako $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n} = n$.
Ak ho ešte vynásobíme premennou n, tak dostaneme súčin $n\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}$, ktorý je určite väčší ako n^2. Ale ak je väčší ako n^2, tak je väčší aj ako n^2-1.

Ž: *Sláva. Takže čitateľ je väčší ako menovateľ, $a_{n+1} > a_n$. Keďže členy postupnosti sú od druhého člena záporné, tak to znamená, že postupnosť je od druhého člena klesajúca.*

U: Lenže prvý člen je nulový a všetky ostatné sú záporné, takže postupnosť je klesajúca už od prvého člena.

Ž: **Postupnosť $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.**

Úloha :

Dokážte, že postupnosť $\{(n-4)^2+1\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna až od určitého indexu n_0.

Výsledok:

Postupnosť je rastúca od štvrtého člena.