Limita postupnosti II.

Mgr. Jana Králiková

U: Pojem ***limity*** by si už mal poznať. Teraz si zopakujeme a rozšírime naše poznatky.

Ž: *Ak máme danú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej hodnoty sa blížia k nejakému číslu a, tak práve toto číslo a nazývame limita postupnosti.*

U: Dobre. Potrebujeme ale upresniť, čo to znamená, že členy postupnosti sa blížia k nejakému a. To vyjadruje definícia limity postupnosti:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq n_0$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Zapisujeme to takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N},\; \forall n \geqq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon}$$

U: Vieš ako sa nájde limita nejakej postupnosti?

Ž: *Áno. Najprv sa vypočítajú hodnoty niekoľkých prvých členov postupnosti alebo sa narysuje graf a odhadne sa, k akému číslu sa asi členy blížia.*

U: Ale to nastačí. Je potrebné aj dokázať, že odhadnuté číslo a je naozaj limitou postupnosti.

Ž: *Tento dôkaz sa robí pomocou definície tak, že sa rieši nerovnica $|a_n - a| < \varepsilon$.*

U: Presne tak. Hľadá sa, pre ktoré prirodzené číslo n je táto nerovnosť splnená. Pri hľadaní limity sa však dá postupovať aj inak.

Ž: *Nebolo by od veci vedieť aj nejaký jednoduchší postup.*

U: Dobre je poznať dve veci:
1. ***limity niektorých základných postupností,***
2. ***vlastnosti, ktoré umožňujú upraviť danú postupnosť na niektorú základnú.***

Ž: *A ktoré sú to tie základné postupnosti?*

U: Zatiaľ to bude konštantná postupnosť $\{k\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosť prevrátených hodnôt $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ž: *Všetky členy konštantnej postupnosti majú rovnakú hodnotu k, takže táto hodnota bude aj limitou konštantnej postupnosti. A prevrátené hodnoty prirodzených čísel sa pre rastúce n blížia k nule, takže limita postupnosti prevrátených hodnôt je 0.*

U: Výborne. Platí

$$\lim_{n\to\infty} k = k \qquad a \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ž: *A teraz ešte tie vlastnosti, pomocou ktorých vypočítam limitu každej postupnosti.*

U: Každej určite nie. Aby si mohol vypočítať limitu nejakej postupnosti musia byť splnené určité predpoklady.

Ž: *A už sa to zamotáva.*

U: Ani nie. Tie predpoklady sú takéto:
Nech sú dané dve konvergentné postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***a*** $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Na pojem ***konvergentnosť*** sa ešte pamätáš?

Ž: *Konvergentná postupnosť je taká, ktorá má konečnú limitu.*

U: Dobre. Tak nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pričom $a, b \in \mathbb{R}$.
Potom sú konvergentné aj postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a platí:

Limita súčtu dvoch konvergentných postupností sa rovná súčtu ich limít.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b}$$

Limita rozdielu dvoch konvergentných postupností sa rovná rozdielu ich limít.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b}$$

Limita násobku konvergentnej postupnosti sa rovná násobku jej limity.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a, \;\; c \in \mathbb{R}}$$

Limita súčinu dvoch konvergentných postupností sa rovná súčinu ich limít.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b}$$

Ak navyše platí, že každý člen postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rôzny od nuly a aj jej limita je rôzna od nuly, tak:
Limita podielu dvoch konvergentných postupností sa rovná podielu ich limít.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \;\; \forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0, b \neq 0}$$

Ž: *Ako mi takéto pravidlá pomôžu pri výpočte limít?*

U: Ukážeme si to na príkladoch:

Vypočítaj limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$***, ak:*** ***a)*** $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$,
b) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Ž: a) *Zapíšem si čo mám vypočítať:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = \cdots$$

U: Výraz $\dfrac{3n+1}{n}$ rozdeľ na dva zlomky.

Ž: *To je jednoduché:*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \cdots$$

U: Máš vypočítať limitu súčtu dvoch konvergentných postupností - konštantnej postupnosti a postupnosti prevrátených hodnôt.

Ž: *Limita súčtu sa rovná súčtu limít, takže:*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3.$$

U: Dobre. Rovnako by si postupoval, keby si mal v čitateli rozdiel. Len by si využil pravidlo pre limitu rozdielu. Poďme si ukázať výpočet druhej limity.

Ž: b) *Zapíšem si čo mám vypočítať:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \cdots$$

U: Toto je postupnosť druhých mocnín prevrátených hodnôt. A mocnina nie je nič iné ako súčin.

Ž: *Aha, takže to zapíšem ako súčin dvoch rovnakých činiteľov a využijem pravidlo pre limitu súčinu:*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

U: Správne. Pravidlo pre súčin si mohol využiť, pretože sa násobili dve konvergentné postupnosti. Rovnako by si postupoval, keby jeden činiteľ bol konštantnou postupnosťou.

Ž: *Vtedy by sme využili pravidlo pre limitu násobku konvergentnej postupnosti.*

U: Správne. A ešte jedna pripomienka:
Pravidlo pre limitu súčtu sa dá rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov.
Pravidlo pre limitu súčinu sa dá rozšíriť na ľubovoľný konečný počet činiteľov. Príklady na výpočty rôznych limít nájdeš v riešenej časti.

U: Poznáš ***aritmetickú*** a ***geometrickú postupnosť***?

Ž: *Pravdaže. Aritmetická postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná prvým členom* a_1 *a diferenciou* d. *Každý jej člen sa dá vypočítať podľa vzorca:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

U: Dobre. Kedy je aritmetická postupnosť konvergentná?

Ž: *Uf. To neviem.*

U: A vieš ako závisí monotónnosť a ohraničenosť aritmetickej postupnosti od diferencie d?

Ž: *Takto:*
- ak je $d > 0$, tak je postupnosť rastúca, zdola ohraničená prvým členom a zhora neohraničená.
- ak je $d < 0$, tak je klesajúca, zhora ohraničená prvým členom a zdola neohraničená.

U: Áno. V oboch týchto prípadoch je postupnosť ***divergentná***. Ostala ešte jedna možnosť.

Ž: *- ak je $d = 0$, tak je aritmetická postupnosť konštantná a ohraničená zhora aj zdola.*

U: Áno. A každá konštantná postupnosť je ***konvergentná***. Limitou je vtedy hodnota prvého člena. Pozri si nasledujúce zhrnutie:

Pre aritmetickú postupnosť platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \textit{pre} \qquad d > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \textit{pre} \qquad d < 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \qquad \textit{pre} \qquad d = 0.$$

U: A teraz sa porozprávame o geometrickej postupnosti.

Ž: *Geometrická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná prvým členom a_1 a kvocientom q. Každý jej člen sa dá vypočítať podľa vzorca:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: S monotónnosťou a ohraničenosťou geometrickej postupnosti je to trošku komplikovanejšie. Povieme si len, kedy je konvergentná a kedy divergentná.

Ž: *Konvergentná je určite vtedy, ak je kvocient $q = 1$. Vtedy je geometrická postupnosť konštantná.*

U: Správne. Konvergentná je aj vtedy, ak $q \in (-1, +1)$. Hodnoty členov sa blížia k nule - buď len z jednej strany, ak je kvocient nezáporný alebo z oboch, ak je záporný.

Ž: *A čo ostatné hodnoty kvocienta?*

U: Geometrická postupnosť je divergentná pre $q > 1$. Diverguje do plus nekonečna, ak má kladný prvý člen alebo diverguje do mínus nekonečna, ak má záporný prvý člen.

Ž: *Rozumiem. Ak je prvý člen kladný a kvocient je väčší ako 1, tak všetky ďalšie hodnoty budú stále väčšie a väčšie. Preto je nevlastná limita plus nekonečno. A ak je prvý člen záporný a budem postupne násobiť kladným kvocientom, väčším ako 1, tak všetky členy budú záporné a budú sa blížiť hodnote mínus nekonečno.*

U: Ostala nám možnosť, že $q \leqq -1$. V takom prípade členy postupnosti striedajú znamienka a limita postupnosti neexistuje.

Ž: *Prečo?*

U: Ak je $a_1 \neq 0$ a $q = -1$, tak členy postupnosti nadobúdajú len dve možné hodnoty a_1 a $-a_1$. Postupnosť je divergentná a nemá limitu. A ak je $q < -1$, tak členy postupnosti majú stále väčší a väčší rozptyl, vzďaľujú sa od hodnoty prvého člena na obe strany. Postupnosť je tiež divergentná a nemá limitu.

Ž: *Mohli by sme si to zhrnúť?*

U: Samozrejme. Pozri si nasledujúci rámček:

Pre geometrickú postupnosť platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad pre \quad q > 1, a_1 > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad pre \quad q > 1, a_1 < 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \quad pre \quad q = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad pre \quad |q| < 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \ neexistuje\ pre \quad q \leqq -1.$$

Ž: *To je sila! Ako to využijem?*

U: Aritmetická postupnosť je, čo sa limít týka, málo zaujímavá. Ale vďaka poznatkom o geometrickej postupnosti budeš vedieť vypočítať limity exponenciálnych výrazov. Ukážeme si to.

Zisti, či je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná alebo divergentná, ak:

a) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

b) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}$.

Ž: a) *Postupnosť je konvergentná, ak má limitu. Pokúsim sa ju vypočítať:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \cdots$$

U: Postupnosť je geometrická, s prvým členom $a_1 = \frac{1}{2}$ a kvocientom $q = \frac{1}{2}$. Hodnota kvocientu je z intervalu $(-1, +1)$. V takom prípade je limita postupnosti rovná nule.

Ž: *Takže*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Postupnosť má limitu, teda je konvergentná. A to je všetko?

U: Áno. Hodnoty členov sa predsa stále zmenšujú, blížia sa k nule.

Ž: b) *Opäť si zapíšem čo mám vypočítať:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \cdots$$

Je to ako v príklade a). Kvocient je $q = \frac{1}{2}$, takže postupnosť je konvergentná.

U: To nie je pravda. Postupnosť je daná úplne inak. Uprav si najprv výraz $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$ tak, aby jeho exponent nebol záporné ale prirodzené číslo.

Ž: *To sa prevráti hodnota zlomku, ktorý umocňujem:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} 2^n = \cdots$$

A teraz čo?

U: Toto je geometrická postupnosť s prvým členom $a_1 = 2$ a kvocientom $q = 2$. Takáto postupnosť je divergentná, jej členy divergujú do plus nekonečna.

Ž: *Takže limitu má, nevlastnú:*

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$

Ž: *Na čo sú nám vlastne limity potrebné?*

U: Vo vyššej matematike sa limity vyskytujú často. V diferenciálnom a integrálnom počte, pri zisťovaní ohraničenosti funkcií, pri riešení priebehu funkcií... To všetko sa ešte len budeš učiť. Ale spomeniem ti dve veci, o ktorých si už určite počul: π a e.

Ž: *Číslo π sa volá* **Ludolfovo číslo**. *Má približnú hodnotu* $3,1415\ldots$. *Používa sa na výpočet obvodov a obsahov okrúhlych útvarov. Číslo e sa nazýva* **Eulerovo číslo** *a je to základ prirodzených logaritmov. Jeho približná hodnota je* $2,718\ldots$.

U: Obe hodnoty sú zaujímavé tým, že ich desatinný rozvoj je nekonečný a neperiodický. Takéto čísla nazývame iracionálne.

Ž: *A ako s tým súvisí limita?*

U: Obvod jednotkovej kružnice k, teda takej, ktorej polomer je 1, sa vypočíta podľa vzorca $O_k = 2\pi$. Ak sa do tejto kružnice vpisujú pravidelné n-uholníky, tak ich obvody tvoria pre rastúce n rastúcu a ohraničenú postupnosť.

Ž: *Áno, zdola je ohraničená obvodom rovnostranného trojuholníka vpísaného do kružnice a zhora obvodom samotnej kružnice.*

U: Presne tak. Rovnako si môžeš vytvoriť postupnosť obvodov pravidelných n-uholníkov opísaných tejto kružnici. Dostaneš klesajúcu a ohraničenú postupnosť.

Ž: *Zhora ohraničenú obvodom rovnostranného trojuholníka. Každý ďalší n-uholník bude mať vždy menší obvod. Zdola je táto postupnosť ohraničená obvodom kružnice.*

U: Hodnota 2π je limitou postupnosti obvodov pravidelných vpísaných n-uholníkov aj pravidelných opísaných n-uholníkov. Samotné číslo π je polovicou tejto limity:

$$\pi = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} O_{vp} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} O_{op}.$$

Ludolfovo číslo je pomenované podľa holandského matematika Ludolpha van Zeulena, ale s myšlienkou vpísaných a opísaných n-uholníkov prišiel už staroveký matematik a fyzik Archimedes. Preto sa mu niekedy hovorí Archimedovo číslo.

Ž: *Pekné. A čo Eulerovo číslo?*

U: Svoj názov má podľa švajčiarskeho matematika Leonharda Eulera a je definované takto:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Ž: *Chcel by som byť ako Leonhard alebo Ludolph a vymyslieť nejakú nočnú moru pre študentov.*

U: Nič ti v tom nebráni. V dvoch častiach tejto témy (Limita postupnosti I. a Limita postupnosti II.) sme si priblížili pojem, definíciu, výpočty limít postupností a ich využitie. Odporúčam ti pozrieť sa aj na príklady v riešenej časti.

Príklad 1: *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 7$*. Použitím viet o operáciách s limitami vypočítajte:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(5a_n - 2b_n)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n + 8)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{14a_n}{5b_n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - 1}{2b_n + 1}$.

U: Aké vety o operáciách s limitami poznáš?

Ž: *Viem, že limita súčtu, rozdielu, súčinu, násobku a aj podielu dvoch postupností sa rovná súčtu, rozdielu, súčinu, násobku alebo podielu limít týchto dvoch postupností.*

U: Zabudol si na jeden dôležitý predpoklad. Limity tých dvoch postupností musia existovať.

Ž: *Aha, áno. Postupnosti musia byť konvergentné.*

U: A ak chceš použiť pravidlo pre limitu podielu, musíš mať zaručené, že všetky členy postupnosti v menovateli, aj jej limita, sú nenulové. Môžeme prejsť na príklady.

Ž: **a)** *Postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú konvergentné, ich limity sú dané konečné čísla. Dosadím si čísla* 4 *a* 7 *do výrazu* $\lim\limits_{n\to\infty}(5a_n - 2b_n)$ *a vypočítam jeho hodnotu.*

U: A za čo budeš dosadzovať?

Ž: *Predsa za* a_n *a* b_n*.*

U: Čísla 4 a 7 ale nepredstavujú hodnoty n-tých členov a_n a b_n, ale hodnoty limít jednotlivých postupností.

Ž: *Tak čo mám robiť?*

U: Použitím vety pre limitu rozdielu postupností najprv dostaneš:

$$\lim_{n\to\infty}(5a_n - 2b_n) = \lim_{n\to\infty} 5a_n - \lim_{n\to\infty} 2b_n = \cdots$$

Teraz využiješ vetu pre limitu násobku:

$$\cdots = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n - 2 \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \cdots$$

Tieto limity sú dané. Teraz už môžeš dosadzovať:

$$\cdots = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 6.$$

Ž: **b)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n + 8)$*. Zvládnem to sám. Najprv použijem pravidlo pre limitu súčtu a potom pravidlo pre limitu súčinu:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n + 8) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) + \lim_{n\to\infty} 8 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} 8 = \cdots$$

Hodnoty limít sú dané, môžem ich dosadiť. Limita konštantnej postupnosti sa rovná konštante 8:

$$\cdots = 4 \cdot 7 + 8 = 36.$$

U: Výborne. Prejdime na ďalší príklad.

Ž: **c)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{14a_n}{5b_n}$. *Predpokladám, že postupnosť* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má len nenulové členy, jej limita je tiež nenulová, takže môžem použiť pravidlo pre limitu podielu:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{14a_n}{5b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 14a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} 5b_n} = \cdots$$

teraz v čitateli aj menovateli zlomku použijem pravidlo pre limitu násobku a potom už dosadím hodnoty limít:

$$\cdots = \frac{14 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n}{5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{14 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{8}{5}.$$

U: Veľmi dobre. Ostala nám posledná limita.

Ž: **d)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - 1}{2b_n + 1}$. *To bude ľahké. Najprv použijem pravidlo pre limitu podielu, v čitateli potom využijem pravidlo pre limitu rozdielu a v menovateli pre limitu súčtu.*

U: Ukáž mi to radšej rovno na príklade.

Ž: *Takže:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 1}{2b_n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)}{\lim\limits_{n\to\infty} (2b_n + 1)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2b_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \cdots$$

U: V menovateli máš ešte limitu násobku.

Ž: *A to je násobok limity, takže pokračujem:*

$$\cdots = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{4-1}{2\cdot 7+1} = \frac{1}{5}.$$

U: Šlo ti to veľmi dobre.

Úloha :

Dané sú také konvergentné postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *že* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 10$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$.

Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^3$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)^2$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n \cdot b_n}{a_n - b_n}$.

Výsledok:

a) 1000, *b)* 64, *c)* $-\dfrac{5}{3}$.

Príklad 2: *Použitím vhodných úprav a viet o operáciách s limitami vypočítajte:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-1}{3n+2}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n+3}{-4n^2+7n-6}$.

U: Aké pravidlá pre počítanie s limitami poznáš?

Ž: *Viem, že limita súčtu, rozdielu, súčinu, násobku a aj podielu dvoch postupností sa rovná súčtu, rozdielu, súčinu, násobku alebo podielu limít týchto dvoch postupností. Pri podieli musíme mať v menovateli postupnosť s nenulovými členmi a nenulovou limitou.*

U: Zabudol si na jeden dôležitý predpoklad. Limity tých dvoch postupností musia existovať.

Ž: *Aha, áno. Postupnosti musia byť konvergentné.*

U: Pri výpočte limít sa niekedy tieto pravidlá nedajú použiť priamo, ale až po vhodnej algebraickej úprave predpisu postupnosti.

Ž: *A to už prečo?*

U: Práve kvôli tomu, že v predpise postupnosti nie sú konvergentné postupnosti. Ukážeme si to na príklade.

Ž: **a)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-1}{3n+2}$. *Ak použijem pravidlá pre limity dostanem:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5n-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3n+2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5n - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 3n + \lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{5\cdot \lim\limits_{n\to\infty} n - 1}{3\cdot \lim\limits_{n\to\infty} n + 2}.$$

U: To je presne to, o čom som hovoril. V čitateli aj v menovateli zlomku si došiel až k limite z rastúcej a neohraničenej postupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ž: *Tá je divergentná, diverguje do plus nekonečna. Takže sa daná limita nedá vypočítať?*

U: Dá. Ale najprv musíme urobiť úpravu, ktorá sa používa pri výpočte limít v tvare podielu mnohočlenov s premennou n.

Ž: *Čo sa už dá urobiť so zlomkom* $\dfrac{5n-1}{3n+2}$*? Veď sa už nedá viac zjednodušiť.*

U: Čitateľ aj menovateľ zlomku vydelíme najvyššou mocninou premennej n, ktorá sa v zlomku nachádza.

Ž: *V našom prípade to bude* n^1*?*

U: Áno. Vynásobíme teda celý zlomok $\dfrac{5n-1}{3n+2}$ zlomkom s hodnotou 1 v tvare $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

Ž: *Vydelili ste každý člen v čitateli aj v menovateli premennou n. Nezdá sa mi, že by sa to nejak zjednodušilo.*

U: Cieľom nie je výraz zjednodušiť, ale upraviť ho tak, aby obsahoval predpisy len konvergentných postupností.

Ž: *A to už máme?*

U: Pozri sa sám. V čitateli je súčet konštanty 5 a postupnosti prevrátených hodnôt. V menovateli je rozdiel konštanty 3 a násobku postupnosti prevrátených hodnôt.

Ž: *Samé konvergentné postupnosti.*

U: Takže teraz už pravidlá pre počítanie s limitami môžeš použiť.

Ž: *Dostanem:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = \frac{5 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{3 + 2\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \cdots$$

U: Zatiaľ dobre. Limita postupnosti prevrátených hodnôt je nula, takže môžeš vyčísliť aj to.

Ž:

$$\cdots = \frac{5-0}{3+2\cdot 0} = \frac{5-0}{3+0} = \frac{5}{3}.$$

U: Výborne. Len zopakujem, že sme použili úpravu, pri ktorej sme čitateľa aj menovateľa vydelili najvyššou mocninou premennej n. Budeš to potrebovať aj v nasledujúcom príklade.

Ž: **b)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n+3}{-4n^2+7n-6}$, *ale mám tam nejaké divergentné postupnosti.*

U: Vydeľ čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou premennej n, ktorá sa tam nachádza.

Ž: *To je* n^2*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+3}{-4n^2+7n-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+3}{-4n^2+7n-6} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{-4n^2}{n^2} + \frac{7n}{n^2} - \frac{6}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{-4+\frac{7}{n}-\frac{6}{n^2}} = \cdots$$

U: Áno. Teraz máš v čitateli aj v menovateli už len konvergentné postupnosti. Postupnosť prevrátených hodnôt prirodzených čísel je nulová a jej násobok alebo kladná mocnina je tiež nulovou postupnosťou. Ich limita je teda 0.

Ž: *Takže využijem pravidlá pre počítanie s limitami a dostanem:*

$$\cdots = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} -4 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n^2}} = \frac{2-0+0}{-4+0-0} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

U: Správne.

Úloha :

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-2n+4}{n^3-n^2+7n-1}$.

Výsledok*:*

5.

Príklad 3: *Použitím vhodných úprav a viet o operáciách s limitami vypočítajte:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$.

U: Aké vety o operáciách s limitami poznáš?

Ž: *Viem, že limita súčtu, rozdielu, súčinu, násobku a aj podielu dvoch postupností sa rovná súčtu, rozdielu, súčinu, násobku alebo podielu limít týchto dvoch postupností. Pri podieli musíme mať v menovateli postupnosť s nenulovými členmi a nenulovou limitou.*

U: Zabudol si na jeden dôležitý predpoklad. Limity tých dvoch postupností musia existovať.

Ž: *Aha, áno. Postupnosti musia byť konvergentné.*

U: Pri výpočte limít sa niekedy tieto pravidlá nedajú použiť priamo, ale až po vhodnej algebraickej úprave predpisu postupnosti. Ukážeme si to na príklade.

Ž: **a)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$*. Naozaj nemôžem použiť žiadne pravidlo, lebo napríklad* $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$*. Ako mám teda postupovať?*

U: Ukážeme si úpravu používanú pre postupnosť s iracionálnymi výrazmi s premennou n pod odmocninou.

Ž: *Presne to tam mám.*

U: Celá úprava smeruje k odstráneniu druhej odmocniny vo výraze $\sqrt{n^2+n}$. Pomôže ti známy vzorec $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$.

Ž: *Vzorec poznám, ale neviem ako mi pomôže.*

U: Môžeš ho zapísať v tvare $A-B=\dfrac{A^2-B^2}{A+B}$. Ak teraz položíš $A=\sqrt{n^2+n}$ a $B=n$, tak druhú odmocninu odstrániš. Skús to!

Ž:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Veď je to ešte horšie, odmocninu mám teraz v menovateli!

U: Neboj sa. Použijeme úpravu vhodnú pri výpočte limity postupnosti v tvare podielu mnohočlenov s premennou n. Vydelíme čitateľa aj menovateľa zlomku najvyššou mocninou premennej, ktorá sa tam vyskytuje.

Ž: *V našom zlomku je najvyššia mocnina* n^2*.*

U: Veruže nie. Druhú mocninu tam síce máš, ale pod odmocninou. Takže najvyššou mocninou premennej n je len prvá mocnina.

Ž: *Takže vydelím čitateľa aj menovateľa zlomku premennou* n*:*

$$\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\cdots$$

Pri delení odmocniny v menovateli som využil to, že $n=\sqrt{n^2}$*.*

U: Dobre. Teraz už môžeme použiť pravidlá pre počítanie s limitami.

$$\cdots = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ž: *Ďalší príklad už skúsim sám.*

Ž: **b)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$. *Opäť využijem vzorec* $A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B}$, *pričom* $A=\sqrt{n+2}$ *a* $B=\sqrt{n+1}$*:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} == \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \cdots$$

U: A už len posledná úprava. Vydeľ čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou premennej.

Ž: *To je teraz* n^1*?*

U: Nie. Premennú n máš pod odmocninou. Takže jej najvyššia mocnina má exponent $\frac{1}{2}$.

Ž: *Najvyššia mocnina je teda vlastne druhá odmocnina. No dobre:*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \cdots$$

U: Ak si teraz uvedomíš, že postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti, ktoré majú limitu rovnú nule, tak môžeš dopočítať limitu takto:

$$\cdots = \frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = 0.$$

Úloha :

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4n+5}-n)$.

Výsledok*:*

-2.

Príklad 4: *Použitím vhodných úprav a viet o operáciách s limitami vypočítajte:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n+3^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+1}+2^n}{4^{n-1}-2^{n+1}}$.

U: Aké pravidlá pre počítanie s limitami poznáš?

Ž: *Viem, že limita súčtu, rozdielu, súčinu, násobku a aj podielu dvoch postupností sa rovná súčtu, rozdielu, súčinu, násobku alebo podielu limít týchto dvoch postupností. Pri podieli musíme mať v menovateli postupnosť s nenulovými členmi a nenulovou limitou.*

U: Zabudol si na jeden dôležitý predpoklad. Limity tých dvoch postupností musia existovať.

Ž: *Aha, áno. Postupnosti musia byť konvergentné.*

U: Pri výpočte limít sa niekedy tieto pravidlá nedajú použiť priamo, ale až po vhodnej algebraickej úprave predpisu postupnosti. Ukážeme si to na príklade.

Ž: **a)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n+3^n}$. *Postupnosti* $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú divergentné, ich limity sú plus nekonečno. Znamená to, že aj* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n+3^n} = +\infty$*?*

U: Nie, znamená to len, že pravidlá pre operácie s limitami nemôžeš použiť. Ale môžeš si výraz upraviť tak, aby ho tvorili predpisy len konvergentných postupností.

Ž: *Ako?*

U: Čitateľa aj menovateľa zlomku si vydeľ n-tou mocninou väčšieho základu.

Ž: *V našom prípade je to* 3^n*. Takže:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n} \cdot \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}+\frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2^n}{3^n}+1} = \cdots$$

U: Dobre. Ďalej využi pravidlo pre podiel mocnín s rovnakým exponentom. Dostaneš tak výraz, v ktorom sú predpisy len konvergentných postupností. Budeš môcť využiť pravidlá pre počítanie s limitami.

Ž: *Tak najprv – podiel mocnín s rovnakým exponentom sa rovná mocnine podielu:*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

U: Výborne. Využil si, že postupnosť $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, jej limita je 0. Okrem nej bol v zlomku už len predpis konštantnej postupnosti $\{1\}_{n=1}^{\infty}$. Jej limita je 1. Prejdi na príklad b).

Ž: **b)** *Mám vypočítať* $\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+2^n}{4^{n-1}-2^{n+1}}$. *V čitateli aj v menovateli mám predpisy samých divergentných postupností, takže najprv použijem nejakú algebraickú úpravu. Lenže, mám tam nielen rôzne základy ale aj rôzne stupne mocnín. Čím mám teraz deliť?*

U: Stále platí, že delíš mocninou s najväčším základom. A čo sa stupňa mocniny týka, môžeš si vybrať či to bude $n-1$, n alebo $n+1$. Ja ti odporúčam vybrať si ten najnižší stupeň.

Ž: *Dobre. Vydelím teda čitateľa aj menovateľa mocninou* 4^{n-1}*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+2^n}{4^{n-1}-2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+2^n}{4^{n-1}-2^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{4^{n-1}}}{\frac{1}{4^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{4^{n-1}} + \frac{2^n}{4^{n-1}}}{\frac{4^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}} = \cdots$$

Niečo sa mi vykráti a dostanem:

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^2\cdot 4^{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{2^n}{4^{n-1}}}{1 - \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^2\cdot 1 + \frac{2^n}{4^{n-1}}}{1 - \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^2 + \frac{2^n}{4^{n-1}}}{1 - \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}} = \cdots$$

A teraz čo?

U: Uprav si čitatele a menovatele malých zlomkov tak, aby obsahovali rovnaký stupeň mocniny. Potom využi pravidlo pre podiel mocnín.

Ž: *Pokúsim sa.*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{4^2 + \frac{2\cdot 2^{n-1}}{4^{n-1}}}{1 - \frac{2^2\cdot 2^{n-1}}{4^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{16 + 2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}}{1 - 4\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{16 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \cdots$$

U: V tomto výraze máš predpisy už len konvergentných postupností $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{16\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{1\}_{n=1}^{\infty}$. Môžeš použiť pravidlá pre počítanie s limitami.

Ž:

$$\cdots = \frac{16 + 2\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - 4\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{16+2\cdot 0}{1-4\cdot 0} = 16.$$

Úloha :

Vypočítajte:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{3^n-4^n}$, *b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

Výsledok*:*

a) -1, *b)* 3.

Príklad 5: *Použitím vhodných úprav a viet o operáciách s limitami vypočítajte:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3\cdots+n}{n^2}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{3}{(n+1)^2} + \dfrac{5}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{(n+1)^2}\right]$.

U: Aké pravidlá pre počítanie s limitami poznáš?

Ž: *Viem, že limita súčtu, rozdielu, súčinu, násobku a aj podielu dvoch postupností sa rovná súčtu, rozdielu, súčinu, násobku alebo podielu limít týchto dvoch postupností. Pri podieli musíme mať v menovateli postupnosť s nenulovými členmi a nenulovou limitou.*

U: Zabudol si na jeden dôležitý predpoklad. Limity tých dvoch postupností musia existovať.

Ž: *Aha, áno. Postupnosti musia byť konvergentné.*

U: Pri výpočte limít sa niekedy tieto pravidlá nedajú použiť priamo, ale až po vhodnej úprave predpisu postupnosti. Ukážeme si to na príklade.

Ž: **a)** *Mám vypočítať* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3\cdots+n}{n^2}$. *to je veľmi jednoduché. Ak si rozdelím daný zlomok na súčet* n *malých zlomkov* $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$, *tak dostanem súčet predpisov samých konvergentných postupností prevrátených hodnôt. Ich limity sú nuly, takže aj výsledná limita je nula. Hotovo.*

U: To bolo rýchle a nesprávne.

Ž: *Prečo? Veď som len využil pravidlo pre limitu súčtu konvergentných postupností.*

U: Áno, ale toto pravidlo platí len pre ***súčet konečného počtu*** konvergentných postupností. V danom príklade je ale počet zlomkov nekonečný.

Ž: *A teraz čo?*

U: Teraz treba použiť nejakú úpravu, ktorá ti daný výraz zmení tak, aby si pravidlá pre počítanie s limitami mohol použiť.

Ž: *Tak už ma nenapínajte.*

U: Všimni si čitateľa zlomku. Máš v ňom súčet prvých n prirodzených čísel. Vieš ho vypočítať?

Ž: *Jasné. Použijem vzorec pre súčet prvých* n *členov* **aritmetickej postupnosti** *s prvým členom* 1 *a diferenciou* 1*:*

$$1+2+3\cdots+n = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\,.$$

U: Výborne. Nahraď teda v limite súčet $1+2+3\cdots+n$ výrazom $\dfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$.

Ž:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2} + \frac{n}{2n^2}\right) = \cdots$$

Vykrátim a môžem využiť pravidlá pre počítanie s limitami:

$$\cdots = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Ž: **b)** *Mám vypočítať* $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{2n-1}{(n+1)^2}\right]$. *Teraz sa už nachytať nedám. Nemôžem limitu celého výrazu rozdeliť na súčet limít z jednotlivých zlomkov, lebo tých sčítancov je nekonečne veľa.*

U: To je veľmi rozumný začiatok. Ako teda budeš postupovať?

Ž: *Zlúčil by som to všetko na spoločného menovateľa a potom v čitateli sčítam čísla:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{2n-1}{(n+1)^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1+3+\cdots+2n-1}{(n+1)^2} = \cdots$$

A teraz si upravím čitateľa. Opäť tam mám súčet prvých n *členov aritmetickej postupnosti s prvým členom* 1, *ale s diferenciou* 2. *Využitím vzorca pre súčet prvých* n *členov dostávam:*

$$1+3+5+\cdots+2n-1 = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(1+2n-1) = \frac{1}{2}\cdot n\cdot 2n = n^2.$$

U: Veľmi dobre. Môžeš pokračovať vo výpočte limity.

Ž:

$$\cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = \cdots$$

U: Ako sa počítajú limity výrazov v tvare podielu mnohočlenov?

Ž: *Najprv vydelím čitateľa aj menovateľa najvyššou mocninou premennej:*

$$\cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \cdots$$

U: Teraz už máš vo výraze len predpisy konvergentných postupností, takže môžeš využiť pravidlá pre počítanie s limitami.

Ž:

$$\cdots = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+0+0} = 1.$$

Úloha :

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{5n^2}$.

Výsledok:

$\frac{1}{5}$.

Príklad 6: *Použitím vhodných úprav a viet o operáciách s limitami vypočítajte:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+5+25+\cdots+5^n}.$$

U: Aké vety o operáciách s limitami poznáš?

Ž: *Viem, že limita súčtu, rozdielu, súčinu, násobku a aj podielu dvoch postupností sa rovná súčtu, rozdielu, súčinu, násobku alebo podielu limít týchto dvoch postupností. Pri podieli musíme mať v menovateli postupnosť s nenulovými členmi a nenulovou limitou.*

U: Zabudol si na jeden dôležitý predpoklad. Limity tých dvoch postupností musia existovať.

Ž: *Aha, áno. Postupnosti musia byť konvergentné.*

U: Pri výpočte limít sa niekedy tieto pravidlá nedajú použiť priamo, ale až po vhodnej algebraickej úprave predpisu postupnosti. Ukážeme si to na príklade.

Ž: *Mám vypočítať* $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+5+25+\cdots+5^n}$*. Mohol by som čitateľa aj menovateľa vydeliť mocninou väčšieho základu. Bolo by to* 5^n*. V čitateli aj v menovateli by som tak dostal súčty predpisov už len konvergentných postupností.*

U: A koľko sčítancov by tie súčty mali?

Ž: *Predsa* n*.*

U: Lenže premenná n sa blíži do nekonečna. A pravidlo platí len pre ***súčet konečného počtu*** konvergentných postupností. V danom príklade by bol v čitateli aj v menovateli počet zlomkov nekonečný.

Ž: *A teraz čo?*

U: Teraz treba použiť nejakú úpravu, ktorá ti daný výraz zmení tak, aby si pravidlá pre počítanie s limitami použiť mohol.

Ž: *Tak už ma nenapínajte.*

U: V čitateli aj v menovateli máš ***súčet členov geometrických postupností***. Vyjadri tento súčet vzorcom.

Ž: *V čitateli je geometrická postupnosť s prvým členom* $a_1 = 1$ *a kvocientom* $q = 2$*. Jej súčet sa vypočíta takto:*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

V menovateli je geometrická postupnosť s prvým členom $a_1 = 1$ *a kvocientom* $q = 5$*. Jej súčet je:*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4}.$$

U: Dobre. Teraz môžeš tieto výsledky dosadiť do pôvodného predpisu.

Ž:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+5+25+\cdots+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{\frac{5^n - 1}{4}} = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{5^n - 1} = \cdots$$

U: Teraz využi úpravu, ktorú si chcel urobiť na začiatku. Vydeľ čitateľa aj menovateľa mocninou 5^n.

Ž: *Takže:*

$$\cdots = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{5^n - 1} \cdot \frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^n}} = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{5^n} - \frac{1}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n} - \frac{1}{5^n}} = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \cdots$$

U: A môžeš využiť pravidlá pre počítanie s limitami.

Ž:

$$\cdots = 4 \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n} = 4 \cdot \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0.$$

Hotovo.

Úloha :

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n}{3^n}$.

Výsledok:

$\dfrac{1}{2}$.

Príklad 7: *Vypočítajte limity:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{3n^2-4}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-4}{5}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-3n^2}{5}$.

Ž: *Všetky tri príklady sú veľmi podobné. Na výpočet limít použijem nasledujúcu úpravu – vydelím čitateľa aj menovateľa zlomku najvyššou mocninou premennej n. Vo všetkých troch príkladoch to bude n^2.*

U: Dobre. Ukáž mi to najprv na prvom príklade.

Ž: **a)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{3n^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3n^2-4} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n^2}}{3-\frac{4}{n^2}} = \cdots$$

Keďže v čitateli aj v menovateli mám už len konvergentné postupnosti, môžem ďalej písať:

$$\cdots = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}} = \frac{0}{3-0} = 0.$$

U: Výborne. ***Postupnosť je konvergentná a jej limitou je číslo 0.***

Ž: **b)** *Druhá postupnosť je prevrátená k tej prvej. To bude tiež ľahké:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{5} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{4}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{3-0}{0} = \frac{3}{0}.$$

A teraz čo? Nulou sa deliť nedá.

U: Výsledok, ktorý si dostal znamená, že ***kladné číslo 3 v čitateli si delil stále menším a menším kladným číslom***. Limitou menovateľa je nula. Výsledok zlomku bude teda stále väčšie a väčšie kladné číslo. Limitou celého zlomku bude plus nekonečno:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{5} = +\infty.$$

Postupnosť je divergentná a má nevlastnú limitu $+\infty$.

Ž: **c)** *Tretia postupnosť sa od druhej líši len opačnými znamienkami v čitateli. Som zvedavý, čo to urobí s výsledkom:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-3n^2}{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-3n^2}{5} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2}-3}{\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{0-3}{0} = \frac{-3}{0}.$$

Keďže **delím záporné číslo -3 malými kladnými číslami blízkymi k nule, tak výsledok bude záporný**. *Čím menší bude menovateľ, tým väčšia bude absolútna hodnota celého zlomku:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4-3n^2}{5} = -\infty.$$

U: Správne. ***Postupnosť je divergentná a má nevlastnú limitu $-\infty$.***

Úloha :

Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-10}{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6-n^3}{n^2-5n+1}$.

Výsledok*:*

a) $+\infty$,

b) $-\infty$.

Príklad 8: *Zistite, či je ohraničená postupnosť*

$$\left\{\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

U: Ako by si zistil, či postupnosť je ***ohraničená***?

Ž: *Vypočítal by som si niekoľko prvých členov a odhadol by som, akými číslami sú asi ohraničené. Potom by som dokázal, že tie čísla sú naozaj ohraničeniami celej postupnosti.*

U: A ako by si to dokázal?

Ž: *Vyriešil by som dve nerovnice – jednu pre dolné a jednu pre horné ohraničenie. Ak čísla sú ohraničeniami, tak mi z nerovnice vyplynie nejaký pravdivý výrok.*

U: Tak mi to predveď na danej postupnosti.

Ž: *Takže najprv zopár členov:*

n	1	2	3	...
$a_n=\dfrac{2n}{n+1}+\dfrac{n+1}{3n}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{5}{6}$	$1\frac{17}{18}$	...

U: Postačujú ti prvé tri čísla na odhad ohraničenosti?

Ž: *Áno. Zdola bude ohraničením určite číslo* 0*, lebo členy postupnosti sú len kladné čísla. Mohol by som asi zvoliť aj hodnotu* $1\frac{2}{3}$*, ale nula postačí tiež.*

U: Takže dolné ohraničenie $d=0$. Čím je asi postupnosť ohraničená zhora?

Ž: *Aj to pekne vidieť. Hodnoty sa blížia k dvojke. Horné ohraničenie* $h=2$.

U: Vyslovil si hypotézu, poď ju dokázať.

Ž: *Dokážem, že pre každý člen* a_n *našej postupnosti platí:* $d \leqq a_n \leqq h$.

Teda, že pre každé $n\in\mathbb{N}$ *platí: - ak* $d=0$ *tak* $\dfrac{2n}{n+1}+\dfrac{n+1}{3n}\geqq 0,$

- ak $h=2$ *tak* $\dfrac{2n}{n+1}+\dfrac{n+1}{3n}\leqq 2.$

U: Dobre. Ďalej by si riešil tieto dve nerovnice. Pomôžem ti s nimi. Prvá je jasná. Sám si povedal, že členy postupnosti sú len kladné čísla.

Ž: *Áno. V oboch zlomkoch na ľavej strane nerovnice mám len kladné čísla, takže aj ich súčet bude kladný. Prvá nerovnica teda platí pre každé prirodzené číslo* n.

U: Správne. Druhá nerovnica má tvar:

$$\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}\leqq 2,\quad \text{odtiaľ po úpravách dostaneme}\quad n^2-4n+1\leqq 0.$$

Ž: *A teraz čo?*

U: Vyriešiš ***kvadratickú nerovnicu***. Ak by si mal kvadratickú rovnicu $x^2-4x+1=0$, tak pomocou vzorca pre jej korene dostaneš:

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

$$\text{takže}\quad x_1=2-\sqrt{3}\doteq 0,3\quad a\quad x_2=2+\sqrt{3}\doteq 3,7.$$

Ž: *Tomu vôbec nerozumiem. Čo mi to vlastne vyšlo?*

U: Parabola, ktorá je grafom ***kvadratickej funkcie*** $f:\ y = x^2 - 4x + 1$ pretína os x približne v bodoch $0,3$ a $3,7$. Funkčné hodnoty pre čísla $x = 1, 2, 3$ sú pod osou x a nad osou x sú funkčné hodnoty pre ostatné prirodzené čísla.

Ž: *Nerovnica bola v tvare $n^2 - 4n + 1 \leqq 0$. Takže táto nerovnosť je splnená len pre $n = 1, 2, 3$?*

U: Áno. Číslo 2 zhora ohraničuje len prvé tri členy. Nie je ohraničením celej postupnosti.

Ž: *Uff. Takže musím vypočítať hodnoty viacerých členov, urobiť nový odhad horného ohraničenia a dokázať jeho platnosť.*

U: Mám lepší nápad. Pri teórii limít sme si uviedli a dokázali vetu (alebo vlastnosť – ak chceš), že ***každá konvergentná postupnosť je ohraničená***. Nepomohlo by ti to?

Ž: *Ak nájdem limitu, tým mám zabezpečenú ohraničenosť?*

U: Áno. Nájsť limitu by nemal byť problém.

Ž: *To nie. Vydelím oba zlomky najvyššou mocninou premennej n. Sledujte:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{n+1}{3n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1+\frac{1}{n}}{3}\right)=\cdots$$

U: Dobre. V čitateli aj v menovateli oboch zlomkov máš teraz predpisy už len samých konvergentných postupností. Môžeš použiť pravidlá pre počítanie s limitami.

Ž: *Vykonám:*

$$\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3}=$$

$$=\frac{2}{1+0}+\frac{1+0}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Postupnosť má konečnú limitu, takže je konvergentná a teda je ohraničená. To bol oveľa jednoduchší postup. Nabudúce už budem zisťovať ohraničenosť pomocou limity.

U: Vedel by si mi teraz povedať čo je horným ohraničením našej postupnosti?

Ž: *Na začiatku som si myslel, že je to číslo 2. Ale ukázalo sa, že je to málo. Teraz vidím, že horným ohraničením je číslo $\frac{7}{3}$.*

U: Áno. Postupnosť je rastúca a jej hodnoty sa blížia k číslu $\frac{7}{3}$. Toto číslo alebo ľubovoľne väčšie číslo je horným ohraničením.

Úloha :

Zistite, či je ohraničená postupnosť $\left\{\dfrac{n^2+7}{8n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Výsledok:

Postupnosť je ohraničená.