Limita postupnosti

Mgr. Jana Králiková

U: Pred nami je náročnejšie ale veľmi dôležité učivo. Pokúsime sa ním prehrýzť. Vieš čo znamená slovo ***limita***?

Ž: *Hranica.*

U: Presne tak. Slovo limita pochádza z latinčiny a mohol si sa s ním stretnúť aj v dejepise. Pojem LIMES ROMANUM znamenal hranicu Rímskej ríše.

Ž: *Áno, niečo také sme sa fakt učili.*

U: Dodnes slovom limita, z latinského limes, označujeme nejakú hraničnú hodnotu. Ale poďme k matematike. Spomenieš si na pojem limity postupnosti?

Ž: *Ak máme danú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej hodnoty sa blížia k nejakému číslu a, tak práve toto číslo a nazývame limita postupnosti.*

U: Dobre. Potrebujeme ale upresniť, čo to znamená, že členy postupnosti sa blížia k nejakému a. Presnejšie to vyjadríme v definícii limity postupnosti:

Reálne číslo a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak ku každému kladnému číslu ε existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq n_0$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Zapisujeme to takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon}$$

Ž: *Ja rozumiem každému slovu v tejto definícii ale dohromady tvoria nejaký divný guláš.*

U: Tak sa pozrime, čo v tom guláši pláva. Nerovnicou $|a_n - a| < \varepsilon$ je vyjadrené to, že $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ má stred v bode a. Takýto interval sa nazýva aj ***okolie bodu*** a a číslu ε hovoríme ***polomer okolia***.

Ž: *Tomu rozumiem. Okolo bodu a sme vytvorili jeho okolie. Veľkosť tohto okolia záleží od hodnoty ε. Už viem prečo musí byť $\varepsilon > 0$. Je to dĺžka polovice intervalu.*

U: Áno. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ si teraz znázorníme graficky v súradnicovom systéme O_{xy}. Na vodorovnú *os x* nanesieme prirodzené čísla a na zvislú *os y* hodnoty členov postupnosti. Členy postupnosti sa majú blížiť k číslu a, takže číslo a tiež znázorníme na *osi y*.

Ž: *Jasné. A ak je tam znázornené číslo a, tak aj celé jeho okolie je tam znázornené s ním.*

U: Presne tak. A teraz v krajných bodoch okolia bodu a a aj bodom a povedieš priamky rovnobežné s *osou x*.

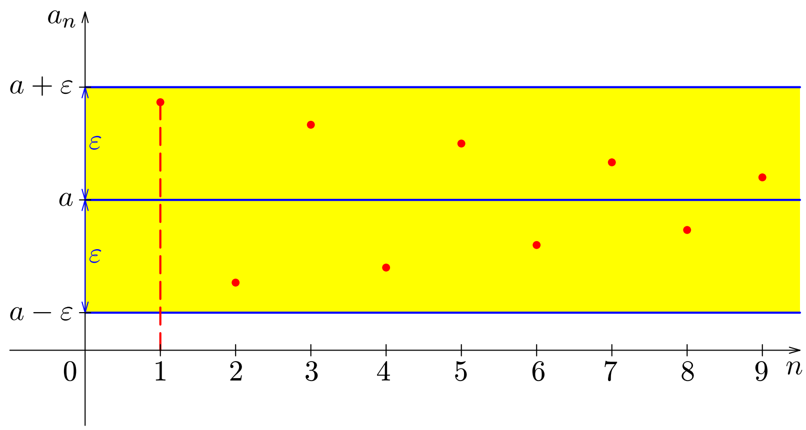
Ž: *Na čo mi to bude dobré?*

U: Vytvoríš tak pás, ktorý je súmerný podľa priamky $y = a$. Budeš mať lepšiu predstavu, či nejaký člen postupnosti leží v okolí bodu a alebo nie. Ukážem ti, že k ľubovoľne zvolenému kladnému číslu ε sa dá nájsť také prirodzené číslo n_0, že pre všetky indexy $n \geqq n_0$ sú hodnoty príslušných členov a_n znázornené vo vnútri pásu.

Ukážeme si to na konkrétnej postupnosti $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + 2\right\}_{n=1}^{\infty}$.

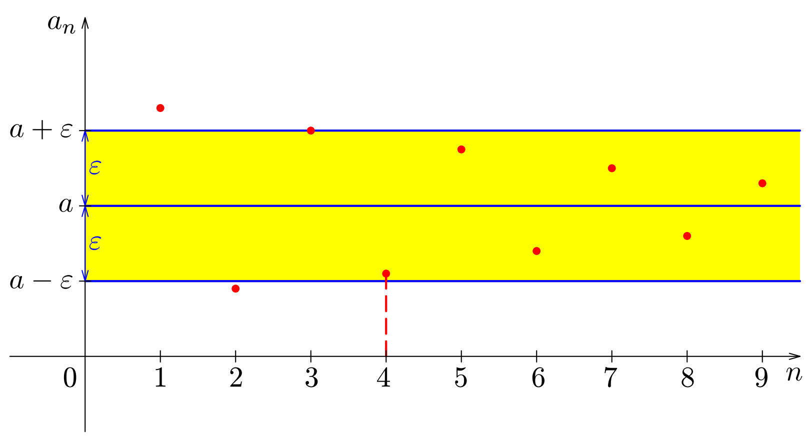
Ž: *Jej členy majú hodnoty:* $\left\{3,\ 1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 1\frac{3}{4},\ 2\frac{1}{5},\ 1\frac{5}{6}, \dots\right\}$.

U: Áno. Znázorním ich v súradnicovej sústave a za ε zvolím najprv také veľké číslo, aby pás bol poriadne široký. Pozri sa na prvý obrázok:



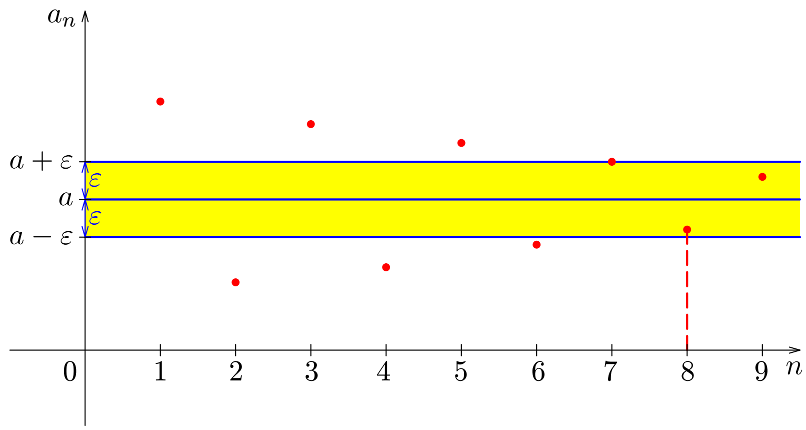
Ž: *Všetky členy postupnosti sú dnu, v páse.*

U: Áno, hodnotu polomeru ε sme zvolili dostatočne veľkú, takže už od prvého člena postupnosti sú všetky ďalšie v okolí bodu a. Pre zvolené ε sme našli $n_0 = 1$. Poďme ďalej. Hodnotu ε trošku zmenšíme:



Ž: *Pás sa zúžil, takže zopár prvých členov je mimo neho. Až od štvrtého člena sú už všetky ďalšie v páse. Teda* $n_0 = 4$.

U: Presne tak. Konečný počet prvých členov je mimo pásu, ale nekonečný počet ďalších členov je už v páse a blíži sa k hodnote a. A pozri sa ešte na tretí obrázok:



Ž: *Pás je ešte užší.*

U: Pretože polomer ε má ešte menšiu hodnotu. Počet členov, ktoré sú mimo pásu, je väčší ako v predchádzajúcom prípade, ale opäť vieme nájsť taký index n_0, že od člena s týmto indexom už budú všetky ďalšie členy vo vnútri pásu. Mimo pásu ostalo len prvých sedem členov.

Ž: *A vo vnútri pásu sú členy s indexom väčším alebo rovným ako $n_0 = 8$. Aký počet členov môže byť mimo pásu?*

U: Akýkoľvek konečný počet prvých členov. Nekonečný počet členov, ktorý za ním nasleduje už musí ležať v páse. Od určitého člena budú teda všetky ďalšie členy bližšie a bližšie k číslu a. Samotnú hodnotu a pritom môžu ale nemusia nadobudnúť.

Ž: *Takže číslo a je limitou postupnosti vtedy, ak si môžem vytvoriť ľubovoľne úzky pás a aj tak v ňom bude ležať nekonečne veľa členov postupnosti?*

U: Áno aj nie. Nestačí, ak v ňom bude nekonečne veľa členov postupnosti. Musia tam byť – od určitého člena postupnosti – všetky ďalšie členy.

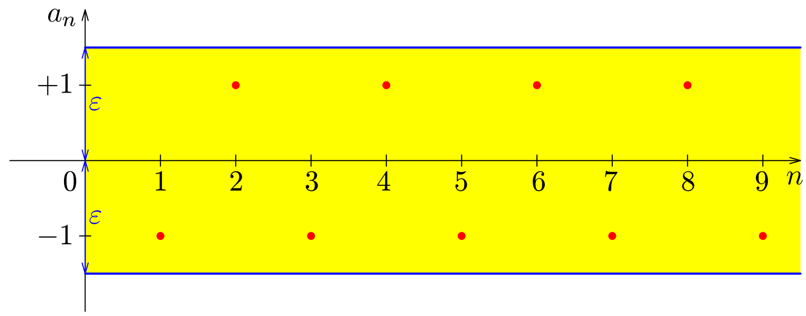
Ž: *A to je rozdiel?*

U: Pravdaže áno. Vezmime si napríklad postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Jej členy nadobúdajú len dve hodnoty: $+1$ a -1. Ktoré číslo je limitou tejto postupnosti?

Ž: *Obe hodnoty $+1$ aj -1 sa mi vidia rovnocenné. Nekonečne veľa členov postupnosti má hodnotu $+1$ a tiež nekonečne veľa členov má hodnotu -1. Tak asi obe hodnoty by mohli byť limitami.*

U: Vrátime sa späť k definícii. Ak číslo $+1$ je limitou, tak v jeho ľubovoľnom okolí budú od určitého indexu n_0 všetky ďalšie členy postupnosti. A rovnako to bude aj pre číslo -1. V ľubovoľnom jeho okolí by mali ležať počnúc nejakým členom aj všetky ďalšie. Platí to?

Ž: *No, ale ja si predsa viem vyrobiť taký široký pás, aby mi pokryl aj číslo $+1$ aj číslo -1. Tak bude platiť, že všetky členy postupnosti – už od prvého – budú v páse. Napríklad takto:*



U: Samozrejme, ak si zvolíš široký pás, tak naozaj budú všetky členy postupnosti ležať vo vnútri. Ale v definícii limity sa hovorí, že to má platiť pre ***akýkoľvek*** pás. Mimochodom, tvoj pás nie je symetrický ani podľa priamky $y = +1$ ani podľa priamky $y = -1$.

Ž: *Aha. Takže mojou úlohou nie je nájsť jeden taký pás, pre ktorý to platí, ale potvrdiť, že akýkoľvek široký alebo úzky pás bude obsahovať všetky ďalšie členy postupnosti?*

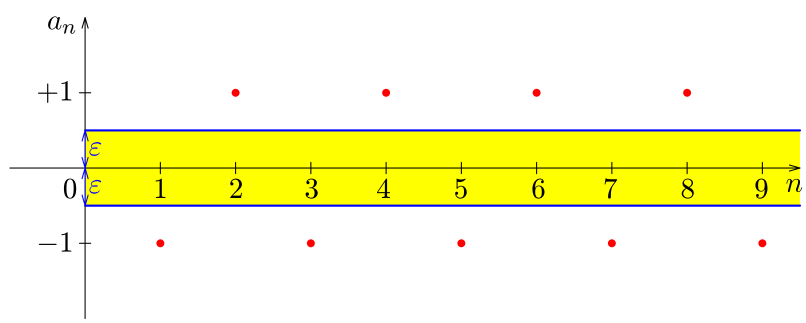
U: Presne tak. Ako to teda bude vyzerať s limitou postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$?

Ž: *Číslo $+1$ nebude limitou, lebo neviem nájsť taký člen postupnosti, aby už všetky nasledujúce mali tiež hodnotu $+1$. Rovnako číslo -1 nebude limitou. A čo tak číslo 0? Nemohla by byť limitou nulka? Leží pekne v prostriedku medzi $+1$ a -1.*

U: Takže znovu definícia. V akomkoľvek širokom páse, ktorého os je priamka $y = 0$, bude ležať od určitého člena postupnosti aj každý nasledujúci člen?

Ž: *Hops. To nie. Stačí ak si za ε zvolím hodnotu $0{,}5$ a dostanem pás, v ktorom nebude ležať dokonca ani jeden člen postupnosti, nieto ešte nekonečne veľa.*

U: Áno, vyzeralo by to takto:



Ž: *Tak teda, ktoré číslo bude vlastne limitou?*

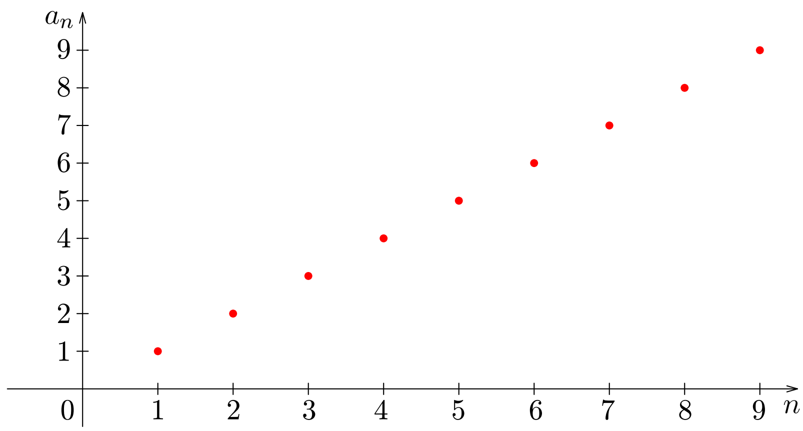
U: Odpoviem ti otázkou: vieš nájsť číslo, pre ktoré bude definícia limity platiť?

Ž: *Nie. Vhodných kandidátov $+1$ a -1 sme vylúčili a ostatné čísla budú na tom tak ako číslo 0. Takže asi žiadne číslo nebude spĺňať definíciu limity.*

U: Presne tak. Pre túto postupnosť žiadne reálne číslo nespĺňa definíciu limity. Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ teda nemá limitu.

Ž: *Uf. To som nečakal. Myslel som si, že každá postupnosť bude mať nejakú limitu.*

U: A keby si mal postupnosť $\{n\}_{n=1}^{\infty}$? Jej graf je ti určite jasný. Vieš určiť, ku ktorému reálnemu číslu sa blíži nekonečný počet členov tejto postupnosti?



Ž: *To nie. Hodnoty členov rastú do nekonečna a nepribližujú sa k žiadnemu konkrétnemu číslu. Taká postupnosť nie je ani ohraničená.*

U: Tak vidíš. O tom, ako súvisí ohraničenosť a existencia limity, sa budeme rozprávať o chvíľu.

U: Zatiaľ by si už mal mať predstavu o tom, kedy je číslo limitou postupnosti. S existenciou limity súvisia aj dva ďalšie pojmy – ***konvergentnosť*** a ***divergentnosť*** postupnosti.

Ž: *Vždy keď niečo ako-tak pochopím, hneď mi predložíte ďalšie záhady. Čo to bude teraz?*

U: Len ďalšie dve definície:

- ***Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej limitou je reálne číslo a, sa nazýva konvergentná postupnosť.***

- ***Ak neexistuje reálne číslo a, ktoré by bolo limitou postupnosti, tak sa postupnosť nazýva divergentnou postupnosťou.***

Ž: *Takže konvergentná postupnosť je taká, ktorá má limitu. Divergentná je taká, ktorá nemá limitu.*

U: Áno. A je najvyšší čas, aby sme si povedali, aké vety platia pre limity postupnosti. Najprv to budú existenčné vety.

Existenčné vety o limitách postupností:

- ***Veta 1: Každá postupnosť má najviac jednu limitu.***

- ***Dôsledok vety 1: Každá konvergentná postupnosť má práve jednu limitu.***

- ***Veta 2: Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.***

- ***Dôsledok vety 2: Každá neohraničená postupnosť je divergentná.***

Ž: *Uf. Kým sa cez toto prehryziem...*

U: Pôjdeme postupne. Prvá veta hovorí o tom, že postupnosť môže mať len jednu alebo žiadnu limitu. Iná možnosť nie je. Dôkaz tejto vety aj jej dôsledku nájdeš v riešenej dôkazovej časti.

Ž: *Ak je veta pravdivá, tak jej dôsledok je jasný. Postupnosť je konvergentná, ak má limitu. No a ak má limitu, tak odpadá možnosť, že nemá limitu. A čo tá druhá veta?*

U: V druhej vete a jej dôsledku sa rozoberá vzťah medzi ohraničenosťou a konvergenciou. Hovorí sa tam, že ak postupnosť má limitu, tak ju viem ohraničiť. A ak ju neviem ohraničiť, tak neexistuje číslo, ktoré by bolo jej limitou. Aj dôkaz tejto vety nájdeš v riešenej dôkazovej časti.

Ž: *Ako budeme zisťovať, či postupnosť je konvergentná alebo divergentná?*

U: Postupovať budeme takto:

1. Zistíme, či postupnosť je alebo nie je ohraničená.
2. Ak postupnosť nie je ohraničená, potom je divergentná. (To je dôsledok vety 2.)
3. Ak je postupnosť ohraničená, potom môže byť konvergentná alebo divergentná. Urobíme preto odhad, či má alebo nemá limitu.
4. Ak sme odhadli nejakú hodnotu a, dokážeme hypotézu, či odhadnuté číslo je naozaj limitou postupnosti.
5. Ak sme odhadli, že daná postupnosť je divergentná, dokážeme to sporom.

Ž: *Ajaj. Čo bod, to hrôza. Povedzme, že zvládnem vyšetriť ohraničenosť. Ak postupnosť nie je ohraničená, som dobrý, lebo úloha je skončená. Ale ak je ohraničená, som nahratý. Ako odhadnem, či postupnosť má alebo nemá limitu?*

U: Môže ti k tomu pomôcť výpočet dostatočne veľkého počtu členov postupnosti alebo tiež grafické znázornenie postupnosti, prípadne funkcie, ktorá vznikne rozšírením definičného oboru postupnosti na všetky reálne čísla.

Ž: *Rozumiem. Buď si vypočítam toľko členov postupnosti, aby mi bolo jasné, k čomu sa blížia alebo si nakreslím graf a z neho uvidím, kam tie členy smerujú.*

U: Áno. Ak už budeš mať odhad, ktoré číslo by mohlo byť limitou, urobíš dôkaz, overenie hypotézy. V jednoduchších prípadoch priamo na základe definície limity postupnosti.

Ž: *A to urobím ako?*

U: Dokážeš, že ku každému, ľubovoľne malému, číslu ε existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq n_0$ bude platiť $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ž: *To je definícia. Ale ako to urobím prakticky? Veď nemôžem preverovať každé kladné číslo ε.*

U: Máš pravdu. Pri dôkaze postupujeme tak, že ekvivalentnými úpravami vyriešime nerovnicu $|a_n - a| < \varepsilon$, s premennými ε a n. Riešenie nerovnice sa snažíme získať v tvare $n > V(\varepsilon)$, kde na pravej strane nerovnice bude výraz, ktorý závisí len na premennej ε.

Ž: *Tak na to sa vôbec neteším.*

U: Už to len dokončím. Ak si odhadol, že postupnosť bude divergentná, dôkaz urobíš vyvrátením negácie tejto hypotézy. To znamená sporom. Budeš predpokladať, že existuje limita postupnosti. Dôsledkom tohto predpokladu by mal byť nejaký spor. Z neho vyplynie, že predpoklad existencie limity je nesprávny a teda postupnosť je divergentná.

Ž: *Ja len dúfam, že mi to vysvetlíte aj na príkladoch. Takto teoreticky si to viem len ťažko predstaviť.*

U: Samozrejme. Medzi riešenými príkladmi nájdeš úlohy na dokazovanie konvergencie aj divergencie rôznych postupností.

U: Doteraz sme za limitu považovali nejaké konkrétne číslo a. Hovoríme tomu, že číslo a je ***vlastná limita postupnosti***.

Ž: *A existuje aj nevlastná limita?*

U: Áno, hneď si to aj vysvetlíme. Existujú dva prípady nevlastnej limity postupnosti:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***má nevlastnú limitu plus nekonečno*** $(a = +\infty)$ ***práve vtedy, ak ku každému reálnemu číslu*** h ***existuje prirodzené číslo*** n_0 ***také, že pre všetky prirodzené čísla*** $n \geqq n_0$ ***platí:***

$$a_n > h.$$

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k plus nekonečnu a zapisujeme to takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall h \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqq n_0 \ \Rightarrow \ a_n > h}$$

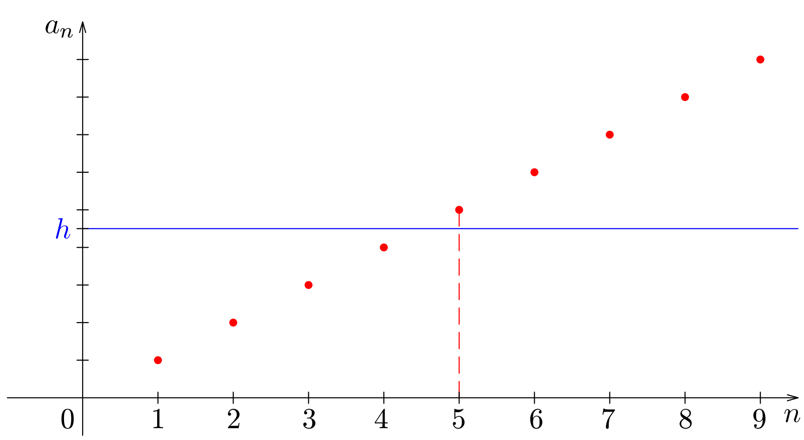
U: V definícii sa hovorí, že ku každému reálnemu číslu h má existovať prirodzené číslo n_0. Prakticky sa ale volí číslo $h > 0$, ľubovoľne veľké. Vieš prečo?

Ž: *Asi preto, že keď sa nekonečne veľa členov postupnosti blíži do plus nekonečna, tak sú to kladné a veľké čísla, preto má zmysel nastaviť aj hodnotu h kladnú a ľubovoľne veľkú.*

U: V podstate áno.

Ž: *A môžeme si to ukázať aj na obrázku?*

U: Samozrejme. Tu je geometrická interpretácia definície nevlastnej limity plus nekonečno:



Ž: *Mne to trošku pripomína ohraničenosť postupnosti.*

U: Skôr neohraničenosť. Na obrázku vidíš, že akokoľvek vysoko by si chcel umiestniť hodnotu h, vždy sa nájde člen postupnosti a za ním všetky ostatné, ktoré budú umiestnené ešte vyššie.

Ž: *Rozumiem. Zatiaľ mi je jasné, že ak je a nejaké konkrétne reálne číslo, tak hovoríme o vlastnej limite a postupnosť je konvergentná. Ak je a plus nekonečno, tak hovoríme o nevlastnej limite a postupnosť je divergentná. Ten druhý prípad nevlastnej limity je asi pre mínus nekonečno.*

U: Presne tak. Analogicky uvediem aj druhý prípad nevlastnej limity:

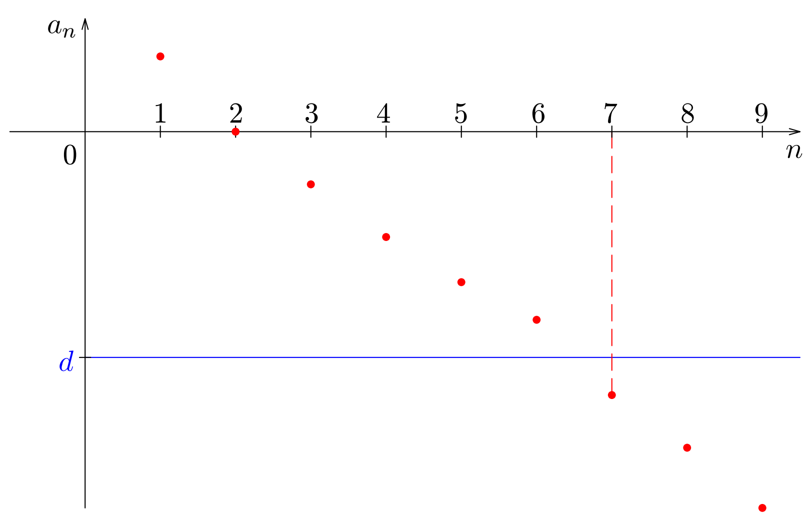
> ***Postupnosť*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***má nevlastnú limitu <u>mínus nekonečno</u>*** $(a = -\infty)$ ***práve vtedy, ak ku každému reálnemu číslu*** d ***existuje prirodzené číslo*** n_0 ***také, že pre všetky prirodzené čísla*** $n \geqq n_0$ ***platí:***
>
> $$a_n < d.$$
>
> Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k mínus nekonečnu a zapisujeme to takto:
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall d \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqq n_0 \ \Rightarrow\ a_n < d}$$

U: V definícii máme opäť uvedené, že číslo d je ľubovoľné reálne číslo. Prakticky sa ale volí $d < 0$, ľubovoľne malé.

Ž: *Teraz sa nekonečne veľa členov blíži do mínus nekonečna, takže sú záporné a stále menšie, preto nás bude zaujímať hodnota d len záporná a ľubovoľne malá.*

U: Grafická interpretácia by bola takáto:



Ž: *Hodnoty členov takejto postupnosti sa blížia k $-\infty$, lebo vždy sa nájde člen, ktorý má menšiu hodnotu než akékoľvek číslo d.*

U: Áno. O limitách postupnosti sa dá rozprávať ešte veľa, napríklad ako sa limity počítajú, aké vety pre výpočty limít platia ... Ale to sa už dozvieš v inej téme.

Príklad D1: *Dokážte, že každá postupnosť má najviac jednu limitu.*

U: Toto je prvá existenčná veta o limitách postupnosti. Tvrdí sa v nej, že každá postupnosť môže mať najviac jednu limitu. Čo to znamená?

Ž: *Najviac jednu limitu – to znamená žiadnu alebo práve jednu.*

U: Dobre. V takomto prípade použijeme ***dôkaz sporom***. Ako prebieha?

Ž: *Myslím, že sa najprv vytvorí opačné tvrdenie k pôvodnej vete, ktorú máme dokázať. Potom sa snažíme nejak priamo dokázať to opačné tvrdenie a počas toho by som mal prísť k nejakej hlúposti. K niečomu nepravdivému. A keďže opačné tvrdenie povedie k nepravde, tak pôvodné tvrdenie musí byť pravda. Tak nejak by to malo byť.*

U: V podstate správne. Vytvoríme ***negáciu*** nášho tvrdenia. Keďže nemôže súčasne platiť pôvodné tvrdenie aj jeho negácia, tak z dôsledkov tohto nového predpokladu dospejeme k nejakému sporu. Odtiaľ vyplýva, že negáciou vytvorený predpoklad je nesprávny, a teda pôvodné tvrdenie je pravdivé. Ako bude vyzerať negácia našej vety?

Ž: *V našej vete je spojenie najviac jedna. Jeho negáciou dostanem spojenie aspoň dve.*

U: Dobre. Ako znegueješ ***kvantifikátor***?

Ž: *Ak je v pôvodnej vete použitý kvantifikátor pre všetky, pre každú postupnosť čosi platí, tak jeho negácia je, že existuje postupnosť, pre ktorú to neplatí.*

U: Áno. Ako teda bude vyzerať negácia tvrdenia zo zadania príkladu?

Ž: *Ak si našu pôvodnú vetu označím ako V a jej negáciu ako V', tak:*

V: **Každá postupnosť má najviac jednu limitu.**

V': **Existuje taká postupnosť, ktorá má dve alebo viac rôznych limít.**

U: Výborne. Tak sa pokúsme dokázať negáciu.

Ž: *Lenže neviem ako.*

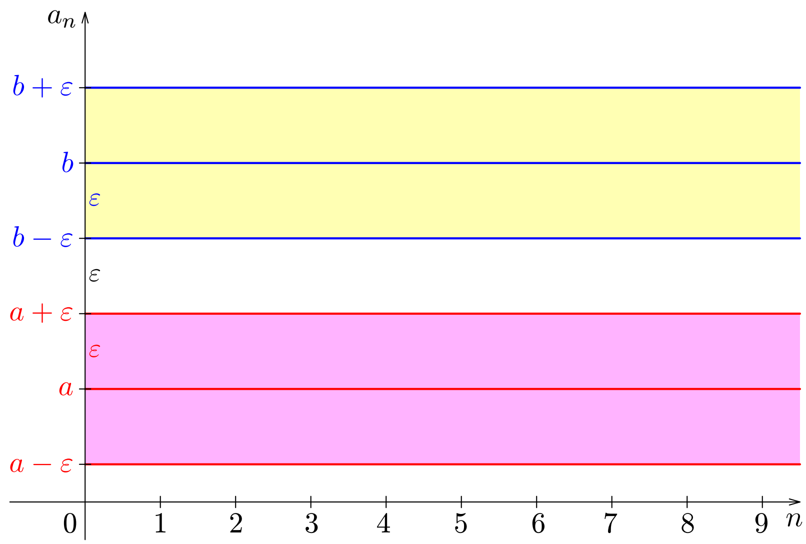
U: Podľa definície limity. Nové tvrdenie, ktoré sme dostali negáciou hovorí, že existuje postupnosť, ktorá má dve alebo viac limít. Predpokladáme, že sú to rôzne hodnoty. Dôkaz si urobíme pre dve limity. Pri predpoklade, že má postupnosť viac limít, by si postupoval rovnako. Spomeň si teraz na definíciu limity.

Ž: *Postupnosť má limitu, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taký prirodzený index n_0, že každý člen postupnosti s indexom rovným alebo väčším než n_0, už bude ležať v epsilonovom okolí tej limity.*

U: Dobre. Predpokladáme teda, že existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá má dve rôzne limity. Označím si ich a a b, pričom $a \neq b$. Podľa definície – číslo je limitou postupnosti práve vtedy, ak v ***každom*** jeho epsilonovom okolí leží nekonečne veľa členov – od určitého člena všetky ďalšie. Ak to má platiť pre každé ε, tak určite aj pre $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{3}$.

Ž: *Prečo ste si zvolili pre ε práve takúto hodnotu?*

U: Ak si vytvorím pásy okolo limít a a b, tak pre takúto hodnotu epsilonu mám zaručené, že sa nebudú prekrývať. Mohol by som si zvoliť ľubovoľnú hodnotu menšiu ako je polovica vzdialenosti limít a a b. Ja som si zvolil tretinu ich vzdialenosti. Pozri si obrázok:



Ž: *Dobre. A prečo je nutné, aby sa tie pásy neprekrývali?*

U: Hneď ti to vysvetlím. Keďže a je limitou, tak v páse súmernom podľa priamky $y = a$ sa nachádza nekonečne veľa členov tejto postupnosti a mimo pásu je len konečný počet. Keďže aj b je limitou, tak v okolí tohto čísla sa tiež musí nachádzať nekonečne veľa členov s výnimkou nejakého konečného počtu.

Ž: *Veď to sa nedá! Nemôžu byť tie isté členy postupnosti na dvoch rôznych miestach – teda v dvoch pásoch, ktoré nemajú nič spoločné.*

U: Presne tak. Znamená to, že sme došli k sporu. Znegovaná veta nie je pravdivá a z toho vyplýva, že platí pôvodné tvrdenie.

Ž: *Teda* **neexistuje postupnosť, ktorá by mala viac ako jednu limitu**.

Úloha 1: *Dokážte, že konvergentná postupnosť má práve jednu limitu.*

Príklad D2: *Dokážte, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená.*

U: Máme dokázať, že ak je postupnosť konvergentná, potom je ohraničená. Povedz mi najprv, čo to znamená, že postupnosť je ***konvergentná***.

Ž: *Postupnosť je konvergentná vtedy, ak má limitu a tou limitou je nejaké konkrétne číslo.*

U: Áno. A kedy je postupnosť ***ohraničená***?

Ž: *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ak existujú také čísla* **d** *a* **h**, *že pre všetky členy postupnosti platí:*

$$d \leqq a_n \leqq h.$$

U: Dobre. To, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená, dokážeme priamo. Nech je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná a jej limitou je číslo a. Čo platí pre toto číslo podľa definície limity?

Ž: *Ak je číslo a limitou postupnosti, tak potom pre jeho ľubovoľné okolie existuje taký index n_0, že všetky členy postupnosti s indexom $n \geqq n_0$ ležia v tomto okolí čísla a.*

U: Vravíš, že to platí pre ľubovoľné okolie čísla a. Tak si zvolíme jedno konkrétne okolie. Nech napríklad $\varepsilon = 1$. K nemu existuje také n_0, že platí:

$$\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n_0-1},}_{\text{môžu ležať mimo zvoleného okolia čísla } a} \qquad \underbrace{a_{n_0},\ a_{n_0+1},\ a_{n_0+2},\ a_{n_0+3},\ \ldots}_{\text{ležia v zvolenom okolí čísla } a}$$

Ž: *Zatiaľ ste vypísali všetky členy postupnosti a vyznačili ste, ktoré ležia v tom konkrétnom epsilonovom páse limity a a ktoré tam ležať nemusia. Ale ako dôjdeme k ohraničenosti?*

U: Mimo nášho pásu môže ležať len konečný počet členov postupnosti: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0-1}$. Nájdeme medzi nimi najväčšiu a najmenšiu hodnotu. Tú najmenšiu označíme m a najväčšiu M:

$$m = min\,\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n_0-1}\}\,,$$

$$M = max\,\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n_0-1}\}\,.$$

Pre každý člen a_n z tohto konečného počtu teda platí:

$$m \leqq a_n \leqq M,\ \ kde\ n \in \{1, 2, 3, \ldots, n_0 - 1\}\,.$$

Ž: *Takže konečný počet členov vieme ohraničiť. Ale ostal nám ešte ten nekonečný počet. Ako ohraničíme nekonečne veľa čísel?*

U: Tých nekonečne veľa členov už ohraničené máme. Ležia predsa v páse, ktorý je ohraničený hodnotami $a - \varepsilon$ a $a + \varepsilon$. A my sme si zvolili za ε hodnotu 1.

Ž: *Aha. Keďže podľa definície limity platí:*

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,\ \ kde\ n \geqq n_0,$$

tak pre $\varepsilon = 1$ môžeme písať:

$$a - 1 < a_n < a + 1,\ \ kde\ n \geqq n_0.$$

U: Áno. Konečná množina členov je ohraničená zdola číslom m a nekonečná množina členov je ohraničená zdola číslom $a-1$. Stačí, ak si za dolné ohraničenie postupnosti vezmeme tú menšiu hodnotu z tých dvoch:

$$d = min\,\{m,\ a-1\}.$$

Ž: *A pre horné ohraničenie asi platí podobný postup. Konečný počet členov na začiatku je ohraničený zhora číslom M a nekonečný počet členov je ohraničený zhora číslom $a+1$. Takže za horné ohraničenie postupnosti si zvolíme väčšiu hodnotu z tých dvoch:*

$$h = max\,\{M,\ a+1\}.$$

U: Presne tak. Našli sme čísla d a h, ktoré nám ohraničujú zdola a zhora všetky členy postupnosti. Pre $\forall n \in \mathbb{N}$ teda platí:

$$d < a_n < h.$$

Tým sme dokázali, že ***konvergentná postupnosť je ohraničená***.

Príklad 1: *Zistite, či je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *daná vzorcom pre* n*-tý člen konvergentná, ak*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

U: Poznáš postup, ktorým sa zisťuje ***konvergentnosť*** alebo ***divergentnosť*** danej postupnosti?

Ž: *Najprv si vypočítam niekoľko prvých členov postupnosti a pomocou nich sa pokúsim vytvoriť odhad, či postupnosť konverguje alebo diverguje. V oboch prípadoch musím ten odhad potvrdiť dôkazom.*

U: Ak hneď na začiatku určíš, že postupnosť je neohraničená, tak je divergentná. Ak je ohraničená, tak naozaj musíš vytvoriť hypotézu o konvergencii alebo divergencii a dokázať ju. Poďme na náš príklad.

Ž: *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. *Vypočítam si zopár jej prvých hodnôt a potom sa uvidí:*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$	-1	$+\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$	$+\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{5}$	$+\dfrac{1}{6}$	$-\dfrac{1}{7}$	...

U: Vieš povedať, či je postupnosť ohraničená alebo neohraničená?

Ž: *Postupnosť je ohraničená. Zhora číslom* $\dfrac{1}{2}$ *a zdola číslom* -1.

U: Ak je ohraničená, môže byť konvergentná aj divergentná. Musíš vytvoriť odhad, ako sa správajú členy tejto postupnosti.

Ž: *Sú stále bližšie k nule, ale striedavo – raz sa k nule blížia z kladnej strany a raz zo zápornej strany. Preto si myslím, že limita tejto postupnosti bude* 0.

U: Dobre. Tvrdíš, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Musíš to ešte dokázať.

Ž: *Sporom?*

U: To určite nie. Negácia tvrdenia by bola, že limitou nie je číslo 0 a dokazovať, že každé číslo okrem nuly nie je limitou by bolo asi dosť náročné. Urobíš priamy dôkaz. Vyjdeš z definície limity postupnosti. Povedz mi ju.

Ž: *Postupnosť* $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* $a = 0$ *práve vtedy, keď ku každému číslu* $\varepsilon > 0$ *existuje taký prirodzený index* n_0, *že pre všetky prirodzené čísla* $n \geqq n_0$ *platí*

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{čiže} \quad \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

U: Výborne. Dostal si nerovnicu s premennými n a ε. Uprav ju tak, aby si z nej videl, ako n závisí od ε.

Ž: *Čiže ε má byť nezávisle premenná a n závisle premenná. Skúsim nerovnicu upraviť odstránením* **absolútnej hodnoty***. Jej riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{array}{c} \left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \\ \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \\ \dfrac{|(-1)^n|}{|n|} < \varepsilon \\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon \end{array}}$$

U: Zatiaľ dobre. Využil si vlastnosť absolútnej hodnoty podielu. Výsledný vzťah ešte uprav.

Ž: *Áno, aby som na ľavej strane mal len n a na pravej strane výraz obsahujúci ε:*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

U: Keďže $\varepsilon > 0$, tak aj $n > 0$. Ku každému ε (ľubovoľne zvolenému) vieš teda určiť potrebný index n_0. Dokázal si, že ***postupnosť*** $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ***je konvergentná a jej limitou je naozaj číslo*** 0.

Ž: *Ale ja neviem ako dostanem index n_0. Ako závisí od hodnoty ε?*

U: Urobíš podiel $\dfrac{1}{\varepsilon}$ a za n_0 vezmeš najbližšie prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako hodnota tohto podielu. Vyskúšaj si to pre niekoľko rôznych hodnôt ε.

Ž: *Tak teda:*

pre	$\varepsilon = 5$	*je*	$n > 0,2$	*a*	$n_0 = 1,$
pre	$\varepsilon = 1$	*je*	$n > 1$	*a*	$n_0 = 2,$
pre	$\varepsilon = 0,5$	*je*	$n > 2$	*a*	$n_0 = 3,$
pre	$\varepsilon = 0,1$	*je*	$n > 10$	*a*	$n_0 = 11,$
pre	$\varepsilon = 0,01$	*je*	$n > 100$	*a*	$n_0 = 101, \ldots$

Už je mi to jasné.

Úloha :

Zistite, či je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná vzorcom pre n-tý člen konvergentná, ak

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + 4,$

b) $a_n = \dfrac{1}{2n+4}.$

Výsledok*:*

a) postupnosť je konvergentná, $a = 4$, $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$,

b) postupnosť je konvergentná, $a = 0$, $n > \dfrac{1}{2\varepsilon} - 2$.

Príklad 2: *Zistite, či je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *daná vzorcom pre* n*-tý člen divergentná, ak*

a) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$,

b) $a_n = (-1)^n \cdot 5^2 + 5$.

U: Poznáš postup, ktorým sa zisťuje ***konvergentnosť*** alebo ***divergentnosť*** danej postupnosti?

Ž: *Najprv si vypočítam niekoľko prvých členov postupnosti a pomocou nich sa pokúsim vytvoriť odhad, či postupnosť konverguje alebo diverguje. V oboch prípadoch musím ten odhad potvrdiť dôkazom.*

U: Ak hneď na začiatku určíš, že postupnosť je neohraničená, tak je divergentná. Ak je ohraničená, tak naozaj musíš vytvoriť hypotézu o konvergencii alebo divergencii a dokázať ju. Poďme na naše príklady.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = (-1)^n \cdot n^2$. *Vypočítam si zopár jej prvých členov a potom sa uvidí:*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = (-1)^n \cdot n^2$	-1	$+4$	-9	$+16$	-25	$+36$	-49	...

U: Vieš povedať, či je postupnosť ohraničená alebo neohraničená?

U: Je neohraničená. Kladné hodnoty sú stále väčšie a väčšie, rastú do plus nekonečna. Záporné hodnoty sú stále menšie a idú do mínus nekonečna.

U: Áno. ***Postupnosť je neohraničená, takže je divergentná.*** Prejdi na druhý príklad.

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = (-1)^n \cdot 5^2 + 5$. *Opäť si najprv vypočítam zopár jej prvých hodnôt:*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n = (-1)^n \cdot 5^2 + 5$	-20	$+30$	-20	$+30$	-20	$+30$	-20	...

U: Čo tieto hodnoty znamenajú?

Ž: *Postupnosť je ohraničená, ale keďže strieda hodnoty* -20 *a* 30, *tak nemá limitu.*

U: Dobre. Postupnosť nemá limitu. Ako by si to dokázal?

Ž: *Sporom. Budem predpokladať, že nejaká limita existuje.*

U: Áno. Nech je limitou číslo a. Čo to znamená podľa definície?

Ž: *Ak je číslo* a *limitou našej postupnosti, tak:*

$$\textit{pre } \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \quad \textit{že pre } \forall\ n \geqq n_0 \quad \textit{platí:}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \textit{čiže} \quad \left|(-1)^n \cdot 5^2 + 5 - a\right| < \varepsilon.$$

U: Pamätáš sa dobre. Ak to platí pre ľubovoľnú hodnotu ε, tak to musí platiť aj pre nejakú nami zvolenú hodnotu, napríklad $\varepsilon = 0,5$. Pre ľubovoľné n a $n+1$, $n \geqq n_0$, platí:
$|(-1)^n \cdot 5^2 + 5 - a| < 0,5$,
$\left|(-1)^{n+1} \cdot 5^2 + 5 - a\right| < 0,5$.

Ž: *K čomu to bude dobré?*

U: Sčítame tieto dve nerovnice a uvidíš.

$$\left|(-1)^n \cdot 5^2 + 5 - a\right| + \left|(-1)^{n+1} \cdot 5^2 + 5 - a\right| < 1,$$

čiže

$$\left|(-1)^n \cdot 5^2 + 5 - a\right| + \left|a - (-1)^{n+1} \cdot 5^2 - 5\right| < 1.$$

Ž: *No, veľa toho nevidím.*

U: Teraz využijeme vlastnosť absolútnej hodnoty $|x+y| \leqq |x| + |y|$, takže:

$$\left|(-1)^n \cdot 5^2+5-a+a-(-1)^{n+1} \cdot 5^2-5\right| \leqq \left|(-1)^n \cdot 5^2+5-a\right| + \left|a-(-1)^{n+1} \cdot 5^2-5\right| < 1.$$

Ž: *Na ľavej strane sa výraz v absolútnej hodnote dá zjednodušiť.*

U: Áno. A ešte sa dá táto absolútna hodnota priamo porovnať s číslom 1 na pravej strane nerovnosti.

Ž: *Takže prostrednú časť vynechám a vzniknutú nerovnicu vyriešim. Riešenie nerovnice je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered}
\left|(-1)^n \cdot 5^2+5-a+a-(-1)^{n+1} \cdot 5^2-5\right| < 1 \\
\left|(-1)^n \cdot 25 -(-1)^{n+1} \cdot 25\right| < 1 \\
|(-1)^n \cdot 25 +(-1)^n \cdot 25| < 1 \\
|(-1)^n \cdot 50| < 1 \\
|(-1)^n| \cdot 50 < 1 \\
50 < 1
\end{gathered}}$$

U: Tak, čo ti to vyšlo?

Ž: *Vyšlo mi, že* $50 < 1$. *Ale to nie je pravda.*

U: Presne tak. Došiel si k nepravdivému tvrdeniu, k sporu. Tvrdenie, že postupnosť má limitu je teda nepravdivé. Platí pôvodné tvrdenie: ***postupnosť*** $\{(-1)^n \cdot 5^2 + 5\}_{n=1}^{\infty}$ ***je divergentná.***

Úloha :

Zistite, či postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *daná vzorcom pre n-tý člen je divergentná:*

a) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{5}$,

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 7}{2}$.

Výsledok:

a) Postupnosť je divergentná, pretože je neohraničená.

b) Postupnosť je divergentná, pretože „kmitá“ medzi hodnotami 3 *a* 4.

Príklad 3: *Použitím definície limity postupnosti dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná vzorcom pre n-tý člen má limitu rovnú nule:*

a) $a_n = \dfrac{1}{n+7}$,

b) $a_n = \dfrac{1}{3^n}$,

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 5}{n^2}$.

Ž: *Vo všetkých troch príkladoch mám dokázať, že*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

U: Áno. Kedy je číslo $a = 0$ limitou postupnosti?

Ž: *Podľa definície je to vtedy, ak pre ľubovoľné epsilonové okolie limity $a=0$ vieme nájsť taký prirodzený index n_0, že všetky členy postupnosti, ktoré majú index väčší alebo rovný ako n_0, už budú ležať v epsilonovom okolí limity $a=0$.*

U: Výborne. Ak členy a_n ležia v epsilonovom okolí limity, tak ich vzdialenosť od limity je menšia ako ε. Môžeme to zapísať takto:

$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{čiže} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ž: *A v našom prípade to bude:*

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

U: Presne tak. Predpis pre n-tý člen je vlastne výraz obsahujúci premennú n. Dostaneš tak nerovnicu s absolútnou hodnotou, s dvoma neznámymi n a ε.

Ž: *To sa nebude dať vyriešiť.*

U: Nemáš ju vyriešiť. Len ju upravíš na tvar $n > V(\varepsilon)$, kde $V(\varepsilon)$ je výraz obsahujúci len premennú ε.

Ž: *Takže ε bude nezávisle premenná, teda ľubovoľne voliteľná a n bude závisle premenná. Bude závisieť od hodnoty ε.*

U: Áno. Ak sa ti to podarí, dokážeš tým, že k ľubovoľnému ε vieš nájsť potrebný index n_0.

Ž: *Ale ak dostanem nerovnicu, v ktorej porovnávam premennú n s výrazom $V(\varepsilon)$ obsahujúcim premennú ε, ako odtiaľ dostanem hodnotu n_0?*

U: Za n_0 stačí vziať najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí, že $n > V(\varepsilon)$. Alebo ľubovoľné väčšie. Týmto postupom dokážeš, že existuje. A o to ide. K ľubovoľnému ε nájdeš n_0.

Ž: *Urobím, čo budem vedieť.*

Ž: **a)** *Prvá postupnosť je daná vzorcom $a_n = \dfrac{1}{n+7}$. Mám dokázať, že jej limitou je číslo $a = 0$. Nech ε je ľubovoľné dané kladné číslo. Vyriešim nerovnicu $|a_n - 0| < \varepsilon$ pre danú postupnosť.*

Keďže výraz $\dfrac{1}{n+7} - 0$ *v absolútnej hodnote je kladný, môžem rovno odstrániť absolútnu hodnotu. Celé riešenie tejto nerovnice je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\frac{1}{n+7} - 0\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{1}{n+7}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n+7} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} - 7 \end{aligned}}$$

U: Dostal si nerovnicu v tvare $n > V(\varepsilon)$, kde $V(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon} - 7$. Odtiaľ vieš pre akékoľvek ε určiť požadovanú hodnotu indexu n_0. Vyskúšaj si to pre $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001\ \ldots$

Ž: *Dobre:*

pre	$\varepsilon = 0,1$	*je*	$n > 3$	*a*	$n_0 = 4$,
pre	$\varepsilon = 0,01$	*je*	$n > 93$	*a*	$n_0 = 94$,
pre	$\varepsilon = 0,001$	*je*	$n > 993$	*a*	$n_0 = 994$,
pre	$\varepsilon = 0,0001$	*je*	$n > 9\,993$	*a*	$n_0 = 9\,994, \ldots$

U: Ide ti to. Myslím, že môžeme prejsť na ďalší príklad.

Ž: **b)** *Druhá postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{1}{3^n}$*. Jej limitou má byť číslo nula. Pre ľubovoľné kladné* ε *vyriešim nerovnicu* $|a_n - 0| < \varepsilon$*. V absolútnej hodnote je výraz* $\dfrac{1}{3^n} - 0$ *a ten je vždy kladný, preto môžem odstrániť absolútnu hodnotu bez zmeny výrazu. Riešenie celej nerovnice je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\frac{1}{3^n} - 0\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{1}{3^n}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{3^n} &< \varepsilon \\ 3^n &> \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}}$$

Ako sa mám dopracovať k tvaru $n > V(\varepsilon)$*?*

U: Ponúkam ti pomôcku: $\log_3 3^n = n$.

Ž: *Ahá. Zlogaritmovaním nerovnice pri základe* 3 *dostanem premennú* n *z exponentu:*

$$n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$$

U: Keďže logaritmická funkcia so základom 3 je rastúca, tak sa nerovnosť nezmenila. Vyskúšaj si nájsť index n_0 pre $\varepsilon = 3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};$ a $\frac{1}{81}$.

Ž: *Dobre:*

$$\begin{array}{llllll} \textit{pre} & \varepsilon = 3 & \textit{je} & n > -1 & \textit{a} & n_0 = 1, \\ \textit{pre} & \varepsilon = 1 & \textit{je} & n > 0 & \textit{a} & n_0 = 1, \\ \textit{pre} & \varepsilon = \frac{1}{3} & \textit{je} & n > 1 & \textit{a} & n_0 = 2, \\ \textit{pre} & \varepsilon = \frac{1}{9} & \textit{je} & n > 2 & \textit{a} & n_0 = 3, \\ \textit{pre} & \varepsilon = \frac{1}{81} & \textit{je} & n > 4 & \textit{a} & n_0 = 5. \end{array}$$

U: Výborne. Môžeš prejsť na posledný príklad.

Ž: **c)** *Tretia postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \frac{(-1)^n + 5}{n^2}$. *Mám dokázať, že jej limitou je číslo* $a = 0$. *Nech* ε *je ľubovoľné dané kladné číslo. Vyriešim nerovnicu* $|a_n - 0| < \varepsilon$ *aj pre túto postupnosť:*

$$\boxed{\begin{array}{c} \left| \frac{(-1)^n + 5}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{(-1)^n + 5}{n^2} \right| < \varepsilon \\ \frac{(-1)^n + 5}{n^2} < \varepsilon \end{array}}$$

Opäť som využil, že výraz v absolútnej hodnote je kladný, takže som odstránil absolútnu hodnotu. A teraz čo?

U: Pre nepárne n dostaneš nerovnicu: $\frac{4}{n^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} < n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}$.

A pre párne n dostaneš nerovnicu: $\frac{6}{n^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{\varepsilon} < n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}$.

Keďže $n > \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}} > \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}}$, stačí ak budeme uvažovať o nerovnosti $n > \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}$.

Ž: *Uf. Zaujímavé. Takže* $V(\varepsilon) = \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}$. *Mohol by som si to opäť vyčísliť pre nejaké konkrétne hodnoty?*

U: Samozrejme. Urob to pre $\varepsilon = 6;\ 1;\ 0,01$ a $0,0001$.

Ž: *Dobre:*

$$\begin{array}{llllll} \textit{pre} & \varepsilon = 6 & \textit{je} & n > 1 & \textit{a} & n_0 = 2, \\ \textit{pre} & \varepsilon = 1 & \textit{je} & n > 2,449 & \textit{a} & n_0 = 3, \\ \textit{pre} & \varepsilon = 0,01 & \textit{je} & n > 24,4948 & \textit{a} & n_0 = 25, \\ \textit{pre} & \varepsilon = 0,0001 & \textit{je} & n > 244,948 & \textit{a} & n_0 = 245. \end{array}$$

U: Áno. Vo všetkých troch príkladoch sme dokázali, že pre ľubovoľné epsilonové okolie nuly vieme nájsť taký index n_0, že všetky členy s indexom väčším alebo rovným ako n_0 už budú ležať vo vnútri toho okolia. ***Číslo 0 je limitou týchto postupností.***

Úloha :

Použitím definície limity postupnosti dokážte, že limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ danej vzorcom pre n-tý člen je nula:

a) $a_n = \dfrac{4}{5n+3}$,

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

c) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

Výsledok:

a) $n > \dfrac{4}{5\varepsilon} - \dfrac{3}{5}$,

b) $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$,

c) $n > \dfrac{4}{2\cdot\sqrt{\varepsilon}} + \dfrac{1}{2}$.

Príklad 4: *Použitím definície nevlastnej limity postupnosti dokážte, že platí:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (10-n) = -\infty,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-3}{5} = +\infty.$

U: V zadaní úlohy máme pojem ***nevlastná limita*** postupnosti. Spomenieš si čo to je?

Ž: *Limita je nevlastná vtedy, keď to nie je konkrétne číslo, ale plus alebo mínus nekonečno.*

U: Dobre. Uvediem to presnejšie:
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***má nevlastnú limitu plus nekonečno*** $(a=+\infty)$ ***práve vtedy, ak ku každému (ľubovoľne veľkému) reálnemu číslu*** $h>0$ ***existuje prirodzené číslo*** n_0 ***také, že pre všetky prirodzené čísla*** $n \geqq n_0$ ***platí:*** $a_n > h.$
Vieš prečo sa za h berie kladná hodnota, ľubovoľne veľká?

Ž: *Asi preto, že keď sa nekonečne veľa členov postupnosti blíži do plus nekonečna, tak sú to kladné a veľké čísla, preto má zmysel nastaviť aj hodnotu h kladnú a ľubovoľne veľkú.*

U: Dobre. Podobne zavediem nevlastnú limitu mínus nekonečno:
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***má nevlastnú limitu mínus nekonečno*** $(a=-\infty)$ ***práve vtedy, ak ku každému (ľubovoľne malému) reálnemu číslu*** $d<0$ ***existuje prirodzené číslo*** n_0 ***také, že pre všetky prirodzené čísla*** $n \geqq n_0$ ***platí:*** $a_n < d.$

Ž: *Teraz sa nekonečne veľa členov blíži do mínus nekonečna, takže sú záporné a stále menšie, preto nás bude zaujímať hodnota d len záporná, ľubovoľne malá.*

U: Poďme teda na konkrétne postupnosti.

Ž: **a)** *Mám dokázať, že postupnosť* $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ *má nevlastnú limitu plus nekonečno. Podľa definície by som teda mal vedieť k ľubovoľne veľkému číslu* h *nájsť taký index* n_0*, že všetky členy postupnosti s indexom rovným alebo väčším ako* n_0*, budú väčšie ako* h*.*

U: Znamená to, že máš nerovnicu $a_n > h$ upraviť na tvar $n > V(h)$, kde na pravej strane je výraz obsahujúci premennú h. Tým dokážeš, že pre ľubovoľne zvolené h existuje potrebné n_0.

Ž: *Skúsim. Nech* h *je ľubovoľné kladné reálne číslo. Keďže* $a_n = n^2$*, tak nerovnosť* $a_n > h$ *má tvar:*

$$n^2 > h, \quad \textit{odtiaľ} \quad n > \sqrt{h}.$$

U: Áno. Za n_0 teraz stačí vziať najmenšie prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako $\sqrt{h}$. Tým sme dokázali, že členy našej postupnosti idú do nekonečna. Nevieme ich ohraničiť zhora žiadnou hodnotou h, pretože sa vždy nájde taký index $n_0 > \sqrt{h}$, že členy s väčším indexom prekročia ohraničenie h. Vyskúšaj si to pre $h = 0,01$; 4; 25 a 100.

Ž: *Dobre:*

pre	$h = 0,01$	*je*	$n > 0,1$	*a*	$n_0 = 1,$
pre	$h = 4$	*je*	$n > 2$	*a*	$n_0 = 3,$
pre	$h = 25$	*je*	$n > 5$	*a*	$n_0 = 6,$
pre	$h = 100$	*je*	$n > 10$	*a*	$n_0 = 11.$

U: Išlo ti to dobre. Prejdime na druhú postupnosť.

Ž: **b)** *Mám dokázať, že postupnosť* $\{10-n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverguje do mínus nekonečnu. Definícia hovorí, že by som teda mal vedieť k ľubovoľne malému číslu* d *nájsť taký index* n_0*, že všetky členy postupnosti s indexom rovným alebo väčším ako* n_0*, budú menšie ako* d*.*

U: Pre ľubovoľné záporné číslo d máš nerovnicu $a_n < d$ upraviť na tvar $n > V(d)$. Ak sa ti to podarí, dôkaz je hotový.

Ž: *Keďže* $a_n = 10 - n$*, tak nerovnosť* $a_n < d$ *má tvar:*

$$10 - n < d, \quad \textit{odtiaľ} \quad n > 10 - d.$$

Je to v poriadku?

U: Áno. Číslo d je záporné, takže $-d$ je kladné. Ak ho ešte zväčšíš o 10, tak za n_0 môžeš vziať najmenšiu prirodzenú hodnotu väčšiu ako $10 - d$. Ku každému d teda existuje hodnota indexu n_0. Vyskúšaj si to pre $d = -5$; -10 a -1000.

Ž: *Dobre:*

$$\begin{array}{llllllll} \textit{pre} & d = -5 & \textit{je} & n > 15 & \textit{a} & n_0 = 16, \\ \textit{pre} & d = -10 & \textit{je} & n > 20 & \textit{a} & n_0 = 21, \\ \textit{pre} & d = -1000 & \textit{je} & n > 1010 & \textit{a} & n_0 = 1011. \end{array}$$

U: Dobre. Rovnako by si postupoval pri akejkoľvek hodnote d. Ostal nám už len posledný príklad.

Ž: **c)** *Tretia postupnosť je* $\left\{\dfrac{4n^2-3}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *a mám dokázať, že diverguje do plus nekonečna. K ľubovoľne veľkému číslu* h *by som teda mal nájsť taký index* n_0*, že všetky členy postupnosti* a_n *s indexom* n *rovným alebo väčším ako* n_0*, budú väčšie ako* h*. Čiže:*

$$\frac{4n^2-3}{5} > h, \quad \textit{odtiaľ} \quad n > \frac{\sqrt{5h+3}}{2}.$$

Hotovo.

U: Výborne. Použil si niekoľko ekvivalentných úprav a došiel si k tomu, že k ľubovoľnému kladnému h existuje potrebný index n_0. Ukáž mi to opäť pre niekoľko konkrétnych hodnôt h.

Ž: *Dobre. Tak napríklad:*

$$\begin{array}{llllllll} \textit{pre} & h = 10 & \textit{je} & n > 3,64 & \textit{a} & n_0 = 4, \\ \textit{pre} & h = 85 & \textit{je} & n > 10,344 & \textit{a} & n_0 = 11, \\ \textit{pre} & h = 523 & \textit{je} & n > 25,5832 & \textit{a} & n_0 = 26. \end{array}$$

U: Výborne. Dokázal si, že ***všetky tri postupnosti sú divergentné***. Dokazovanie nevlastných limít pomocou definície si môžeš precvičiť aj samostatne.

Úloha :

Použitím definície nevlastnej limity postupnosti dokážte, že platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2 - 5\sqrt{n}) = -\infty$.

Výsledok*:*

a) $n > h^2$,

b) $n > \left(\frac{2-d}{5}\right)^2$.