Geometrická postupnosť

Mgr. Jana Králiková

U: V tejto téme sa budeme rozprávať o geometrickej postupnosti. Čo o nej vieš?

Ž: *Noooo, nie je toho veľa, ale pamätám si niečo z* **aritmetickej postupnosti** *a viem, že v geometrickej postupnosti platia podobné vzťahy.*

U: Tak to budeme musieť začať pekne od začiatku. Definíciou.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***sa nazýva geometrickou postupnosťou práve vtedy, ak sa dá vyjadriť rekurentne v tvare:***

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ pre každé } n \in \mathbb{N},$$

pričom $a,\ q$ sú dané reálne čísla.

Reálne číslo q ***sa nazýva kvocient geometrickej postupnosti***.

Ž: *Ak tomu rozumiem správne, tak každý nasledujúci člen dostaneme tak, že predchádzajúci člen vynásobíme číslom* q*. Pri aritmetickej postupnosti sme pripočítavali diferenciu, pri geometrickej postupnosti násobíme kvocientom.*

U: Presne tak. Čo myslíš, ako bude vyzerať geometrická postupnosť, ktorej prvý člen sa rovná nule?

Ž: *Ak je prvý člen nula a vynásobím ho nejakým kvocientom, tak aj druhý člen mi vyjde nula. A ak ten vynásobím kvocientom, tak aj tretí člen bude nula. A tak ďalej. Všetky členy budú nulové.*

U: Áno. ***Ak v geometrickej postupnosti*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je*** $a_1 = 0$***, tak pre každé*** $n \in \mathbb{N}$ ***bude*** $a_n = 0$***.*** A ako bude vyzerať geometrická postupnosť, ak sa nule nerovná jej prvý člen, ale kvocient q?

Ž: *Takže prvý člen je nenulový. Druhý dostanem tak, že ten prvý vynásobím qéčkom, teda vlastne nulou. Druhý člen mi vyjde nulový. A potom už to budú tiež len samé nuly.*

U: Správne. ***Ak v geometrickej postupnosti*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je*** $a_1 \neq 0$ ***a*** $q = 0$***, tak bude*** $a_n = 0$ ***pre každé*** $n \in \mathbb{N}, n \geqq 2$***.*** Ďalej sa budeme zaoberať už len geometrickými postupnosťami, v ktorých a_1 ani q nie sú rovné nule.

Ž: *Je mi jasné, že ak ani prvý člen* a_1 *ani* q *nie sú rovné nule, tak potom žiaden člen geometrickej postupnosti nebude mať nulovú hodnotu. Nula medzi členmi nebude.*

U: Áno. V takom prípade ale vieme urobiť podiel každých dvoch za sebou idúcich členov a tento podiel je konštantný. ***Ak v geometrickej postupnosti*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je*** $a_1 \neq 0$ ***a*** $q \neq 0$***, tak pre každé*** $n \in \mathbb{N}$ ***platí:***

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Ž: *V aritmetickej postupnosti je* **diferencia - rozdiel***.*
V geometrickej postupnosti je **kvocient -** *znamená to* **podiel***?*

U: Áno. Podiel alebo pomer dvoch veličín. Ale tento pojem sa nevyskytuje len pri postupnostiach.

Ž: *Ja viem, existuje napríklad inteligenčný kvocient – IQ.*

U: Pekný príklad. V tomto prípade ide o podiel mentálneho – rozumového veku a kalendárneho veku, vynásobený hodnotou 100. Ale poďme späť k matematike a k postupnostiam. Doplním ešte, že ***geometrická postupnosť je jednoznačne určená svojim prvým členom*** a_1 ***a kvocientom*** q.

Ž: *Rozumiem. Pomocou prvého člena a kvocientu viem vyrobiť práve jednu geometrickú postupnosť.*

U: Máme za sebou úvod do geometrickej postupnosti. Teraz si ukážeme, ako budeme zisťovať, či nejaká postupnosť je geometrická.

Zisti, či postupnosť $\left\{\dfrac{3^{2n+3}}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ***je geometrická.***

Ž: *Ak si urobím rozdiel dvoch za sebou idúcich členov a tento rozdiel bude konštantný, tak pôjde o aritmetickú postupnosť. V tomto príklade mám asi zistiť či bude konštantný podiel.*

U: Áno. ***Ak je podiel*** ľubovoľných dvoch za sebou idúcich členov postupnosti ***konštantný, tak je to geometrická postupnosť***.

Ž: *Musím si teda vyrobiť vzťahy pre ľubovoľné dva za sebou idúce členy. Vzťah pre člen* a_n *je v zadaní príkladu. Vzťah pre nasledujúci člen dostanem tak, že vo vzorci pre* a_n *nahradím premennú* n *výrazom* $n+1$*:*

$$a_n = \frac{3^{2n+3}}{4^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{2\cdot(n+1)+3}}{4^{n+1}} = \frac{3^{2n+2+3}}{4^{n+1}} = \frac{3^{2n+5}}{4^{n+1}}.$$

U: Dobre. Pokračuj.

Ž: *Teraz vytvorím podiel členov* a_{n+1} *a* a_n *a upravím ho:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3^{2n+5}}{4^{n+1}}}{\dfrac{3^{2n+3}}{4^n}} = \frac{3^{2n+5}\cdot 4^n}{4^{n+1}\cdot 3^{2n+3}} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}.$$

U: K čomu si sa dopracoval?

Ž: *Podiel mi vyšiel* $\dfrac{9}{4}$*. To je konštanta, lebo nezávisí od hodnoty premennej* n*.*

Postupnosť $\left\{\dfrac{3^{2n+3}}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je geometrická s kvocientom** $q = \dfrac{9}{4}$ **a s prvým členom** $a_1 = \dfrac{3^5}{4}$**.**

U: Správne. Ďalšie úlohy podobného typu nájdeš medzi riešenými príkladmi.

U: V aritmetickej postupnosti platia pre jej členy určité vzťahy. Spomenieš si na niektoré?

Ž: *Pokúsim sa. Napríklad – vzorec pre n-tý člen aritmetickej postupnosti vyzerá takto:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

U: Výborne. Podobný vzťah platí aj pre geometrickú postupnosť, s tým rozdielom, že nepripočítavaš diferenciu, ale násobíš kvocientom. Skús si odvodiť, ako by si dostal druhý, tretí, štvrtý a potom n-tý člen geometrickej postupnosti - pomocou prvého člena a kvocientu.

Ž: *Podľa definície geometrickej postupnosti sa $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Takže:*
– pre druhý člen platí: $a_2 = a_1 \cdot q$,
– pre tretí člen platí: $a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$,
– pre štvrtý člen platí: $a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$.

U: Už vidíš, ako dostaneš člen a_n?

Ž: *Áno. Prvý člen násobím mocninou qéčka. Stupeň mocniny je vždy o jeden menší než poradové číslo člena, ktorý chcem vypočítať. Takže ak budem chcieť člen a_n, tak prvý člen vynásobím qéčkom umocneným na $n-1$.*

U: Upresním to:

Veta o určení geometrickej postupnosti vzorcom pre n-tý člen:
V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s daným prvým členom a_1 a kvocientom q platí:

$$\text{pre každé } n \in \mathbb{N}: \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U: Prvý dôležitý vzťah máme za sebou. Teraz skús vyjadriť n-tý člen nie pomocou predchádzajúceho alebo prvého člena, ale pomocou ľubovoľného s-tého člena.

Ž: *To akože si mám ten vzťah odvodiť?*

U: Presne tak. Členy a_n a a_s si najprv vyjadri pomocou predchádzajúceho vzorca pre n-tý člen.

Ž: *Takže:*
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$.

U: Dobre. Teraz vytvor podiel $\frac{a_n}{a_s}$ a z neho vyjadri člen a_n.

Ž: *Vykonám.*

$$\frac{a_n}{a_s} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{a_1 \cdot q^{s-1}} = q^{n-1-(s-1)} = q^{n-s} \quad \textit{a odtiaľ} \quad a_n = a_s \cdot q^{n-s}.$$

U: Správne. Odvodil si vzorec, v ktorom člen a_n vieš vyjadriť aj pomocou ľubovoľného člena. Tento vzorec sa obyčajne používa s inou dvojicou písmen. Takto:

Veta o vzťahu medzi r-tým a s-tým členom geometrickej postupnosti:
V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s daným kvocientom q platí:

$$\text{pre každé } r, s \in \mathbb{N}: \quad a_r = a_s \cdot q^{r-s}.$$

U: Ďalší vzťah, ktorý si zavedieme, bude o tom, ako sa sčítavajú členy geometrickej postupnosti. Najprv sa ťa ale opýtam: je ***konštantná postupnosť*** aritmetickou?

Ž: *Ale áno. Ak sú všetky členy rovnaké, tak ide o aritmetickú postupnosť s diferenciou* 0. *Ďalší člen, ktorý je rovnaký ako predchádzajúci, dostanem len pripočítaním nuly. Takže* **konštantná postupnosť je aritmetickou postupnosťou**.

U: Dobre. A je konštantná postupnosť geometrickou postupnosťou?

Ž: *Teraz ste ma zmiatli. Veď je aritmetickou.*

U: Porozmýšľaj. Je aj geometrickou?

Ž: *V konštantnej postupnosti sú všetky členy rovnaké. Aký by musel byť kvocient, aby som po vynásobení kvocientom dostal zas rovnaké číslo? No jasné, kvocient bude* 1. *Takže* **konštantná postupnosť je geometrickou postupnosťou**.

U: Tento poznatok budeme potrebovať. Pri geometrických postupnostiach sa totiž inak počíta súčet ak ide o konštantnú postupnosť a inak, ak nejde o konštantnú postupnosť.

Ž: **Súčet prvých n členov konštantnej postupnosti** *vypočítať viem. Predsa, ak mám sčítať n rovnakých čísel, tak ich súčet je $n \cdot a_n$.*

U: Správne. Ostal nám prípad, že postupnosť nie je konštantná, teda kvocient $q \neq 1$. Súčet prvých n členov postupnosti si označíme s_n. Skús ho rozpísať.

Ž: *Dobre.*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \qquad (*)$$

U: Celú rovnicu teraz vynásob kvocientom q.

Ž: *To zvládnem.*

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad / \ \cdot q$$

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n \qquad (**)$$

U: Nasledujúca úprava bude takáto: od rovnice vynásobenej kvocientom q (rovnica je modrá a označená $**$), odčítaš rovnicu so súčtom členov (rovnica je červená a označená $*$). Mnohé výrazy sa ti potom podarí odčítať. Na záver už len osamostatni s_n.

Ž: *Skúsim, úpravy sú v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{array}{c}
s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} \\
\underline{s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n} \\
s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n - \\
- \left(a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}\right) \\
s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^n - \\
- a_1 - a_1 \cdot q - a_1 \cdot q^2 - \cdots - a_1 \cdot q^{n-1} \\
s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \\
s_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1) \\
s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}
\end{array}}$$

Hotovo. Šlo to celkom dobre.

U: Takže ja už len zhrniem, čo sme si to vlastne odvodili:

Veta o súčte s_n prvých n členov geometrickej postupnosti:
V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s daným prvým členom a_1 a s kvocientom q platí pre súčet prvých n členov tejto postupnosti vzorec:

$$s_n = \begin{cases} n \cdot a_1, & ak\ \ q = 1, \\ a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & ak\ \ q \neq 1. \end{cases}$$

U: A teraz sa porozprávame o tom, prečo sa geometrická postupnosť nazýva geometrická. Majme tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti: a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Ako by si vyjadril členy a_n a a_{n+1} pomocou ***rekurentného vzťahu***?

Ž: *Takto:*

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \qquad a \qquad a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

U: Dobre. A teraz z oboch rovníc vyjadri kvocient q.

Ž: *Takže:*

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad a \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

U: Opäť predpokladáme, že ani prvý člen postupnosti, ani kvocient nie sú rovné nule, takže žiadny člen postupnosti nie je nulový. Teraz porovnaj pravé strany oboch rovníc, ktoré si dostal a vyjadri člen a_n.

Ž: *Ak porovnám obe pravé strany rovníc, tak mi kvocient q úplne vypadne. Odstránim zlomky násobením menovateľmi a odtiaľ už rovno vyjadrím člen a_n. Úpravy sú v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \ \Big/ \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \ \big/ \sqrt{\ } \\ |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \end{gathered}}$$

U: Takýmto vzťahom je v ***štatistike*** definovaný ***geometrický priemer*** dvoch hodnôt.

V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľný jej člen, počnúc druhým, geometrickým priemerom svojich susedných členov:

$$\text{pre každé } n \in \mathbb{N}, n \geqq 2 \ \text{ platí:} \quad |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Ž: *Aha, takže odtiaľ názov. Aritmetický priemer – aritmetická postupnosť, geometrický priemer – geometrická postupnosť.*

U: Máme za sebou odvodenie štyroch dôležitých vzťahov týkajúcich sa geometrickej postupnosti. Ich zhrnutie si pozri v rámčeku:

V geometrickej postupnosti platí:

vzorec pre n-tý člen	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{R}$
vzťah medzi r-tým a s-tým členom	$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$	$r, s \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{R}$
súčet prvých n členov	$s_n = n \cdot a_1$	$n \in \mathbb{N},\ \ q = 1$
súčet prvých n členov	$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$	$n \in \mathbb{N},\ \ q \neq 1$
geometrický priemer	$\lvert a_n \rvert = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$	$n \in \mathbb{N},\ \ n \geqq 2$

Dôkazy ich platnosti nájdeš v riešenej dôkazovej časti.

U: Ostáva nám porozprávať sa o ***monotónnosti geometrickej postupnosti***. Čo myslíš, ako monotónnosť závisí od hodnoty kvocientu q?

Ž: *Už viem, že ak sa* $q = 1$, *tak sa všetky členy geometrickej postupnosti rovnajú prvému členu, takže* **postupnosť je konštantná**.

U: A vedel by si aj pre nejakú inú hodnotu kvocientu povedať, ako sa budú správať členy geometrickej postupnosti?

Ž: *Ak sa* $q = 0$, *tak od druhého člena sú v postupnosti samé nuly. Teda postupnosť je konštantná od druhého člena. Ak je aj prvý člen nula, tak celá postupnosť je konštantná.*

U: Ak prvý člen má kladnú hodnotu a za ním nasledujú už len členy s nulovou hodnotou, tak postupnosť je monotónna. Presnejšie aká?

Ž: *Takáto geometrická postupnosť je* **nerastúca**.

U: Dobre. A v opačnom prípade, ak je prvý člen záporný a za ním nasledujú už len nuly, tak ide o akú postupnosť?

Ž: *V takom prípade ide o* **neklesajúcu postupnosť**.

U: Dobre. Vyriešili sme si prípady, že $q = 0$ a $q = 1$. Rozoberme si teraz prípady, že $q > 0$ a $q < 0$.

Ž: *Už viem. Ak násobím kladným číslom, tak postupnosť bude rastúca. Ak budem násobiť záporným číslom, tak postupnosť bude klesajúca.*

U: Naozaj? Tak si to preveríme na príklade:

Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je geometrická, s prvým členom*** a_1 ***a kvocientom*** q***.***
Vypíš hodnoty prvých siedmych členov tejto postupnosti, ak:
a) $a_1 = 16,\ \ q = 2$,
b) $a_1 = 16,\ \ q = 0{,}5$,
c) $a_1 = 16,\ \ q = -2$.

Ž: a) *To je ľahké. Prvý člen má hodnotu* 16 *a každý ďalší člen bude* 2−*krát väčší ako predchádzajúci. Prvých sedem členov postupnosti bude mať hodnoty:*
16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
Veď som to vravel. Kladný kvocient, rastúca postupnosť.

U: Tak prejdime na príklad b).

Ž: b) *V druhom príklade má kvocient hodnotu jedna polovica. Každý nasledujúci člen postupnosti dostanem tak, že ten predchádzajúci vynásobím jednou polovicou. Vlastne delím dvoma. Členy tejto postupnosti budú mať hodnoty:*
16, 8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25.
Kvocient je kladný, ale postupnosť nie je rastúca ani zďaleka. Práve naopak. Je klesajúca. Asi som urobil nejakú chybu v úsudku.

U: Presne tak. Geometrická postupnosť sa správa inak ako aritmetická. Pri násobení kladnou hodnotou záleží aj na tom, či je tá hodnota väčšia ako 1 alebo menšia ako 1.

Ž: c) *Kvocient má hodnotu* -2. *Absolútna hodnota nasledujúceho člena bude stále* $2-$*krát väčšia než u predchádzajúceho, ale znamienka sa budú striedať.*

U: Áno. Ešte vypíš členy tejto postupnosti.

Ž: *Prvý člen je* 16, *kvocient je* -2, *takže prvých sedem členov bude:*
16, -32, $+64$, -128, $+256$, -512, $+1024$.
Takáto postupnosť nie je monotónna.

U: Dobre. Postupnosti, ktorej členy striedajú znamienka sa hovorí ***oscilujúca*** alebo ***kmitajúca***. Takúto postupnosť dostaneš aj v prípade, že prvý člen postupnosti aj kvocient majú zápornú hodnotu.

Ž: *Takže musím dávať pozor nielen na znamieno kvocientu, ale aj na znamieno prvého člena?*

U: Áno. Zhrnutie monotónnosti si pozri v nasledujúcom rámčeku:

prvý člen	***kvocient***	***geometrická postupnosť***
$a_1 > 0$	$q > 1$	rastúca
	$q = 1$	konštantná
	$q \in (0,\ 1)$	klesajúca
	$q = 0$	nerastúca
	$q < 0$	oscilujúca
$a_1 = 0$	$q \in \mathbb{R}$	konštantná
$a_1 < 0$	$q > 1$	klesajúca
	$q = 1$	konštantná
	$q \in (0,\ 1)$	rastúca
	$q = 0$	neklesajúca
	$q < 0$	oscilujúca

Ž: *Ďakujem, teraz to vidím pekne pohromade.*

U: Posledná vec, o ktorej sa porozprávame, bude graf geometrickej postupnosti. Mal by si vedieť, že ***graf postupnosti*** je množina izolovaných bodov. Pripomeňme si vzorec pre n-tý člen geometrickej postupnosti a ty mi povedz, čo je v tomto vzorci konštanta a čo premenná.

Ž: *Vzorec pre* n*-tý člen je*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},\ a_1, q \in \mathbb{R}.$$

Hodnoty a_1 *a* q *sú dané, teda konštanty. Premennou je* n.

U: Správne. Akú funkciu s premennou n by si dostal, keby si rozšíril definičný obor postupnosti na množinu všetkých reálnych čísel?

Ž: *Premenná n je v* **exponente** *mocniny so základom q, takže výsledná funkcia je* **exponenciálna**.

U: Nie vždy. V exponenciálnej funkcii musí byť základ mocniny kladný a rôzny od jednej. V tabuľke pre monotónnosť geometrickej postupnosti sme si zhrnuli, ako závisí monotónnosť od hodnoty kvocienta q.

Ž: *Aha, exponenciálnu krivku by sme dostali len v prípade, že $a_1 \neq 0$ a kvocient $q > 1$ alebo je z intervalu $(0,\ 1)$.*

U: Správne. Body tvoriace graf geometrickej postupnosti budú v takom prípade ležať na exponenciálnej krivke funkcie

$$y = a_1 \cdot q^{x-1},\ \textit{kde}\ x \in \mathbb{R},\, a_1 \in \mathbb{R} - \{0\},\, q \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

Ž: *A ak sa napríklad $q = 1$, tak je postupnosť konštantná a jej graf je množina bodov, ktoré ležia na priamke*

$$y = a_1.$$

U: A sme na konci. Povedali sme si všetko potrebné k teórii geometrickej postupnosti. Ak chceš vedieť o geometrickej postupnosti ešte viac, pozri si riešenú časť Príklady. V praxi sa geometrická postupnosť využíva napríklad vo ***finančnej matematike***, ale o tom sa už hovorí v inej téme.

Príklad 1: *Zistite, či postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je geometrická. Ak áno, určte jej kvocient, prvý člen a rekurentný vzťah.*

a) $a_n = \dfrac{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}{3^{2-n}}$,

b) $a_n = 2^{n-1} + 3^{2-n} + 5^{n+2}$.

U: Máš zistiť, či dané postupnosti sú ***geometrické***. Akú postupnosť nazývame geometrickou?

Ž: *Postupnosť je geometrická, ak podiel každých dvoch za sebou idúcich členov je konštantný. Len neviem, či mám vytvoriť podiel* $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ *alebo podiel* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

U: Aby si zistil, či postupnosť je geometrická, môžeš vytvoriť ktorýkoľvek z týchto dvoch navzájom si prevrátených pomerov. Ale máš určiť aj ***kvocient*** q a ten je definovaný ako podiel $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ž: **a)** *Dobre. Prvú postupnosť mám danú vzorcom* $a_n = \dfrac{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}{3^{2-n}}$. *Vyjadrenie pre člen* a_{n+1} *dostanem tak, že vo výraze pre člen* a_n *dosadím za premennú* n *výraz* $n+1$*:*

$$a_n = \frac{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}{3^{2-n}},$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1} \cdot 5^{(n+1)+2}}{3^{2-(n+1)}} = \frac{2^n \cdot 5^{n+3}}{3^{1-n}}.$$

Teraz vytvorím ich podiel a zjednoduším ho:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^n \cdot 5^{n+3}}{3^{1-n}}}{\dfrac{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}{3^{2-n}}} = \frac{2^n \cdot 5^{n+3} \cdot 3^{2-n}}{3^{1-n} \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n+2}} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Podiel je konštantný, nezávisí od premennej n. *Postupnosť je teda geometrická, jej kvocient* $q = 30$.

U: Dobre. Urč ešte prvý člen a pomocou neho a kvocientu ***rekurentný vzťah***.

Ž: *Prvý člen určím ľahko. Dosadím do vzorca pre* n*-tý člen za* n *hodnotu* 1*:*

$$a_n = \frac{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}{3^{2-n}},$$

$$a_1 = \frac{2^{1-1} \cdot 5^{1+2}}{3^{2-1}} = \frac{2^0 \cdot 5^3}{3^1} = \frac{1 \cdot 125}{3} = \frac{125}{3}.$$

Ešte si vypočítam člen a_{n+1} *pomocou člena* a_n. *Takže:*

$a_{n+1} = q \cdot a_n = 30 \cdot a_n$.

U: V rekurentnom predpise musíš mať aj hodnotu prvého člena aj tento vzťah. Aký bude teda záver tohto príkladu?

Ž: **Daná postupnosť je geometrická a jej rekurentný vzťah je:**

$$a_1 = \frac{125}{3}, \quad a_{n+1} = 30 \cdot a_n \quad pre \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

U: Dobre. Prejdime na príklad b).

Ž: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom pre n-tý člen:* $a_n = 2^{n-1} + 3^{2-n} + 5^{n+2}$. *Budem postupovať ako v predchádzajúcom príklade. Vytvorím najprv predpis pre člen* a_{n+1}*:*

$a_n = 2^{n-1} + 3^{2-n} + 5^{n+2}$,
$a_{n+1} = 2^{(n+1)-1} + 3^{2-(n+1)} + 5^{(n+1)+2} = 2^n + 3^{1-n} + 5^{n+3}$.
Ich podiel je:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n \quad + 3^{1-n} + 5^{n+3}}{2^{n-1} + 3^{2-n} + 5^{n+2}}.$$

A čo teraz?

U: Hodnota podielu závisí od hodnoty premennej n. Skús si vypočítať zopár prvých členov.

Ž: *Asi postačia prvé tri členy. Vypočítam ich a zapíšem do tabuľky:*

n	1	2	3	...
a_n	129	628	$3129,\overline{3}$	...

U: A teraz podiel $\frac{a_2}{a_1}$ porovnaj s podielom $\frac{a_3}{a_2}$.

Ž: *Takže:* $\frac{a_2}{a_1} = \frac{628}{129} \doteq 4,868$ *a* $\frac{a_3}{a_2} = \frac{3129,\overline{3}}{628} \doteq 4,983$.
Daná postupnosť nie je geometrická, pretože podiel $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie je konštantný.

U: Správne. Vyrieš si aj nasledujúce úlohy.

Úloha :
Zistite, či postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je geometrická. Ak áno, určte jej kvocient, prvý člen a rekurentný vzťah.*

a) $a_n = 2^{n-5} \cdot 3^{2-n}$,

b) $a_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-5}}$.

Výsledok:
Obe postupnosti sú geometrické.

a) $q = \frac{2}{3}$, *rekurentný vzťah:* $a_1 = \frac{3}{16}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n \quad pre \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

b) $q = \frac{3}{2}$, *rekurentný vzťah:* $a_1 = 16, \quad a_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot a_n \quad pre \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Príklad 2: *Zistite, či je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *geometrická a určte súčet jej prvých piatich členov, ak:*

$$a_n = \frac{7}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0.$$

U: Kedy sa postupnosť nazýva ***geometrickou***?

Ž: *Postupnosť je geometrická vtedy, ak podiel ľubovoľných dvoch za sebou idúcich členov je konštantný.*

U: Dobre. Ako zistíš, či postupnosť je geometrická?

Ž: *Vytvorím si predpis pre člen* a_{n+1} *a potom urobím podiel* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*. Ak je konštantný, postupnosť je geometrická.*

U: Môžeš sa pustiť do riešenia príkladov.

Ž: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = \dfrac{7}{x^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Predpis pre člen* a_{n+1} *dostanem tak, že vo výraze pre člen* a_n *dosadím za premennú* n *výraz* $n+1$*:*

$$a_n = \frac{7}{x^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{7}{x^{n+1}}.$$

Vytvorím ich podiel a zjednoduším ho:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{7}{x^{n+1}}}{\dfrac{7}{x^n}} = \frac{7 \cdot x^n}{x^{n+1} \cdot 7} = \frac{1}{x}.$$

A teraz neviem, to čo mi vyšlo je konštanta alebo nie?

U: Číslo x je reálny, nenulový parameter. Závisí podiel $\dfrac{1}{x}$ od premennej n?

Ž: *To nie. Žiadne* n *vo výsledku nie je.*

U: V tom prípade je podiel konštantný a udáva hodnotu kvocientu q.

Ž: *Takže daná* **postupnosť je geometrická a jej kvocient** $q = \dfrac{1}{x}$.

U: Správne. Ostáva určiť súčet prvých piatich členov tejto postupnosti.

Ž: *Päť členov nie je tak veľa, mohol by som si ich vypísať a potom spočítať.*

U: V tom prípade mením zadanie príkladu. Vypočítaj súčet prvých päťdesiatich členov.

Ž: *Aha, tak to si musím spomenúť na vzorec pre súčet. Lenže zapamätať si vzorec je niekedy veľmi ťažké.*

U: To je pravda. Tak si ho odvoď, keď si ho nepamätáš.

Ž: *Žartujete? To je ešte horšie, než si ho zapamätať.*

U: Pomôžem ti. Ak je postupnosť konštantná, tak všetky členy sú rovnako veľké ako prvý a teda súčet n rovnakých členov je $s_n = n \cdot a_1$. Ak postupnosť nie je konštantná, tak vzorec pre súčet má tvar $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Ž: *A naša postupnosť je konštantná alebo nie?*

U: Rozhodni to sám. Kvocient poznáš.

Ž: *Kvocient $q = \dfrac{1}{x}$ nemá konkrétnu číselnú hodnotu. Aha, už rozumiem, x je parameter, od ktorého závisí, aký bude kvocient aj celá postupnosť.*

U: Áno. Pokračuj.

Ž: *Takže:*
Postupnosť je konštantná práve vtedy, ak jej kvocient sa rovná 1.

$$q = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Do vzorca pre súčet budem potrebovať ešte hodnotu prvého člena:

$$a_1 = \frac{7}{x^1} = \frac{7}{x}, \quad \textit{ak } x = 1, \quad \textit{tak } a_1 = \frac{7}{1} = 7.$$

Mám teraz vypočítať súčet prvých piatich alebo prvých päťdesiatich členov?

U: Prvých piatich bude stačiť.

Ž: *Dobre. Takže:*

$$s_n = n \cdot a_1$$

$$s_5 = 5 \cdot 7 = 35$$

U: A teraz vypočítaj súčet, ak postupnosť nie je konštantná.

Ž: **Pre kvocient rôzny od 1 nie je postupnosť konštantná.**

$$q \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1.$$

V tomto prípade použijem ten druhý vzorec pre súčet členov.

U: Presne tak. Prvý člen a kvocient poznáš.

Ž: *Áno. Keďže $a_1 = \dfrac{7}{x}$ a $q = \dfrac{1}{x}$, tak dosadím do vzorca:*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{7}{x} \cdot \frac{(\frac{1}{x})^n - 1}{\frac{1}{x} - 1}$$

$$s_5 = \frac{7}{x} \cdot \frac{(\frac{1}{x})^5 - 1}{\frac{1}{x} - 1}$$

U: Dobre. Zjednoduš výraz, ktorý si dostal.

Ž: *Ak to zvládnem.*

$$s_5 = \frac{7}{x} \cdot \frac{(\frac{1}{x})^5 - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{7}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x^5} - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{7}{x} \cdot \frac{\frac{1-x^5}{x^5}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{7}{x} \cdot \frac{(1-x^5)\cdot x}{x^5 \cdot (1-x)} = \frac{7\cdot(1-x^5)}{x^5\cdot(1-x)}.$$

U: Výsledný výraz sa síce dá ďalej krátiť, ale pre nás bude stačiť v takomto tvare. Povedz mi už len odpoveď tohto príkladu.

Ž: **Postupnosť $\left\{\frac{7}{x^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, je geometrická.**
Ak parameter $x = 1$, tak je konštantná: $a_1 = 7$, $q = 1$ a $s_5 = 35$.
Ak parameter $x \neq 1 \wedge x \neq 0$, tak nie je konštantná: $a_1 = \frac{7}{x}$, $q = \frac{1}{x}$ a $s_5 = \frac{7\cdot(1-x^5)}{x^5\cdot(1-x)}$.

U: Pekne si to zhrnul. Skús si samostatne prepriešiť aj nasledujúce úlohy.

Úloha 1:
Zistite, či je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická a určte súčet prvých šiestich členov tejto postupnosti:

a) $a_n = \frac{5x^{n+2}}{4}$, $\quad x \in \mathbb{R}$,

b) $a_n = \frac{x^{n-1}}{y^{n+3}}$, $\quad x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

Výsledok:

a) Postupnosť je geometrická s kvocientom $q = x$ a prvým členom $a_1 = \frac{5}{4} \cdot x^3$.

- Ak $q = 1$, tak $a_1 = \frac{5}{4}$ a $s_6 = \frac{15}{2}$.

- Ak $q \neq 1$, tak $s_6 = \frac{5x^3}{4} \cdot \frac{x^6-1}{x-1} = \frac{5x^3}{4} \cdot (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

b) Postupnosť je geometrická.

- Ak $x = y$, tak postupnosť je konštantná: $a_1 = \frac{1}{y^4}$, $q = 1$ a $s_6 = \frac{6}{y^4}$.

- Ak $x \neq y$, tak postupnosť nie je konštantná: $a_1 = \frac{1}{y^4}$, $q = \frac{x}{y}$ a $s_6 = \frac{1}{y^9} \cdot \frac{x^6 - y^6}{x - y}$.

Príklad 3: *Určte všetky geometrické postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, pre ktoré platí:*

a)

$$a_1 + a_3 = 20$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 26,$$

b)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 21.$$

Ž: **a)** *Je daná sústava rovníc:*

$$a_1 + a_3 = 20$$
$$\underline{a_1 + a_2 + a_3 = 26.}$$

Všimol som si, že ak odpočítam prvú rovnicu od druhej, tak dostanem, že druhý člen má hodnotu 6*. Dá sa to využiť?*

U: Dobrý postreh. Keďže a_1, a_2, a_3 sú členy geometrickej postupnosti a $a_2 = 6$, tak platí:

$a_1 = \dfrac{a_2}{q} = \dfrac{6}{q}$,

$a_3 = a_2 \cdot q = 6q$.

Ž: *A čo ak je kvocient rovný nule? Nebudem ho môcť strčiť do menovateľa.*

U: Ak by kvocient bol rovný nule, tak všetky členy od druhého by boli tiež nuly. Ale potom by si z prvej rovnice dostal, že $a_1 = 20$ a z druhej rovnice $a_1 = 26$.

Ž: *Aha, takže kvocient je určite nenulový. Môžem teda vyjadrenia pre* a_1 *a* a_3 *dosadiť do prvej rovnice a vyriešiť ju.*

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1 + a_3 = 20 \\ \dfrac{6}{q} + 6q = 20 \quad / \cdot q \\ 6 + 6q^2 = 20q \quad / - 20q \\ 6q^2 - 20q + 6 = 0 \quad / : 2 \\ 3q^2 - 10q + 3 = 0 \end{array}}$$

U: Odstránením zlomku a prehádzaním členov na jednu stranu si teda dostal kvadratickú rovnicu pre neznámu q. Ako sa rieši?

Ž: *Pre* **korene kvadratickej rovnice** *platí vzťah:*

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \textit{pričom} \quad a = 3, \; b = -10, \; c = 3.$$

Po dosadení dostanem:

$$q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6},$$
$$q_1 = \frac{10 + 8}{6} = 3 \qquad a \qquad q_2 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}.$$

U: Výborne. Vyšli ti dve rôzne hodnoty kvocientu q. Zdá sa, že budeme mať dve rôzne geometrické postupnosti. Pre každú hodnotu kvocienta vypočítaj hodnotu prvého člena.

Ž:

$$Ak\ q = 3, \quad tak \quad a_1 = \frac{6}{q} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$Ak\ q = \frac{1}{3}, \quad tak \quad a_1 = \frac{6}{q} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18.$$

Úloha má dve riešenia, pretože danej sústave rovníc vyhovujú dve postupnosti:
Prvá postupnosť je daná kvocientom $q = 3$ a prvým členom $a_1 = 2$.
Druhá postupnosť je daná kvocientom $q = \frac{1}{3}$ a prvým členom $a_1 = 18$.

U: Správne. Prejdime na ďalší príklad.

Ž: b) *Je daná sústava rovníc:*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168$$
$$\underline{a_4 + a_5 + a_6 = 21.}$$

Žiadnu pomôcku tam nevidím. Mám dve rovnice a šesť neznámych. Ako to mám vypočítať?

U: Stačí si uvedomiť, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ž: *Aha. Pomocou tohto vzťahu si vyjadrím jednotlivé členy v oboch rovniciach sústavy.*

U: Presne tak. Zo sústavy dvoch rovníc s mnohými neznámymi dostaneš už len sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi – prvým členom a_1 a kvocientom q.

Ž: *Dobre. Každý člen okrem prvého si teda vyjadrím takto:*

$a_2 = a_1 \cdot q,$
$a_3 = a_1 \cdot q^2,$
$a_4 = a_1 \cdot q^3,$
$a_5 = a_1 \cdot q^4,$
$a_6 = a_1 \cdot q^5.$

U: Môžeš tieto vyjadrenia dosadiť do rovníc. Potom v každej rovnici vyber pred zátvorku všetko čo sa dá.

Ž: *Dobre:*

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 168 \\ \underline{a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 21} \\ a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 168 \\ \underline{a_1 \cdot q^3 \cdot (1 + q + q^2) = 21 \ / : q^3} \\ a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 168 \\ \underline{a_1 \cdot (1 + q + q^2) = \dfrac{21}{q^3}} \end{array}}$$

U: Výborne. Delil si kvocientom. Vieš určite, že je nenulový?

Ž: *Keby bol kvocient nula, tak od druhého člena by mala postupnosť už len nuly. Ale potom by sme v druhej rovnici dostali, že súčet troch núl je* 21*. To nie je pravda, takže* $q \neq 0$.

U: Máš pravdu. Na ľavých stranách rovníc máš rovnaké výrazy. Rovnať sa teda budú aj pravé strany. Využi to.

Ž: *Dostanem jednu rovnicu s neznámou* q*. Odstránim zlomok, osamostatním neznámu* q *a nakoniec ešte odmocním.*

$$\begin{aligned} 168 &= \frac{21}{q^3} \quad / \cdot q^3 \\ 168 \cdot q^3 &= 21 \quad / : 168 \\ q^3 &= \frac{21}{168} \\ q^3 &= \frac{1}{8} \quad / \sqrt[3]{} \\ q &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

U: Oceňujem správnosť riešenia. Pokračuj, príklad ešte nie je hotový.

Ž: *Vypočítam si ešte člen* a_1 *z prvej rovnice upravenej sústavy, dosadením za kvocient* q.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q + q^2) &= 168 \\ a_1 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] &= 168 \\ a_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) &= 168 \\ a_1 \cdot \frac{7}{4} &= 168 \quad / \cdot \frac{4}{7} \\ a_1 &= 96 \end{aligned}$$

U: Veľmi dobre. Ostáva ti už len odpoveď.

Ž: **Úloha má jedno riešenie, danej sústave rovníc vyhovuje len postupnosť s prvým členom $a_1 = 96$ a kvocientom $q = \frac{1}{2}$.**

U: Dobre. Nasledujúce úlohy sú podobného typu.

Úloha :

Určte všetky geometrické postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *pre ktoré platí:*

a)

$$a_1 - a_2 = 2$$

$$a_3 - a_4 = 8,$$

b)

$$a_1 + a_4 = 195$$

$$a_2 + a_3 = 60,$$

c)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 35$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 280.$$

Výsledok:

a) Úloha má dve riešenia:

1. *postupnosť má* $q = 2$ *a* $a_1 = -2$,
2. *postupnosť má* $q = -2$ *a* $a_1 = \dfrac{2}{3}$.

b) Úloha má dve riešenia:

1. *postupnosť má* $q = 4$ *a* $a_1 = 3$,
2. *postupnosť má* $q = \dfrac{1}{4}$ *a* $a_1 = 192$.

c) Úloha má jedno riešenie:

postupnosť má $q = 2$ *a* $a_1 = 5$.

Príklad 4: *Tri čísla sú tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Ich súčin je* 8 *a súčet je* $\frac{62}{5}$. *Nájdite tieto čísla.*

Ž: *Označím si hľadané čísla* a_1, a_2 *a* a_3.

U: Dobre. V zadaní máš uvedené vzťahy, ktoré medzi nimi platia. Zapíš ich rovnicami.

Ž: *Prvá rovnica je pre súčin:*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8.$$

V druhej rovnici je súčet jednotlivých členov. Teda:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{62}{5}.$$

U: Získal si dve rovnice, v ktorých máme zatiaľ tri neznáme. Ako by si riešil vzniknutú sústavu rovníc?

Ž: *Použijem vzťah pre* n*-tý člen geometrickej postupnosti:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Vyjadrím si členy a_2 *a* a_3 *pomocou tohto vzťahu a dosadím ich do sústavy. Dostanem sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi – prvým členom* a_1 *a kvocientom* q.

U: Áno, takto sa obyčajne postupuje. V tomto prípade to ale nie je až taký výhodný postup. Výhodnejšie je vyjadriť si prvý a tretí člen pomocou druhého člena.

Ž: *Nech je po vašom. Vyjadrím si prvý a tretí člen pomocou druhého:*

$$a_1 = \frac{a_2}{q} \qquad a \qquad a_3 = a_2 \cdot q.$$

U: Dobre. Teraz tieto vyjadrenia dosaď do sústavy a vyrieš ju.

Ž: *Pokúsim sa:*

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8 \\ a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{62}{5} \\ \hline \dfrac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot (a_2 \cdot q) = 8 \\ \dfrac{a_2}{q} + a_2 + a_2 \cdot q = \dfrac{62}{5} \\ \hline a_2^3 = 8 \ /\sqrt{\ } \\ a_2 \cdot \left(\dfrac{1}{q} + q + 1\right) = \dfrac{62}{5} \\ \hline \end{array}}$$

U: Dobre. Z prvej rovnice tejto upravenej sústavy po odmocnení dostaneš, že $a_2 = 2$. Dosaď si túto hodnotu do druhej rovnice a vyrieš ju.

Ž: *Urobím to:*

$$\boxed{\begin{gathered} 2\cdot\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=\frac{62}{5}\quad /:2 \\ \frac{1}{q}+1+q=\frac{31}{5}\quad /\cdot 5q \\ 5+5q^2+5q=31q\quad /-31q \\ 5q^2-26q+5=0 \end{gathered}}$$

U: Dobre. Dostal si ***kvadratickú rovnicu*** pre kvocient q. Ako ju vyriešiš?

Ž: *Pre* **korene kvadratickej rovnice** *platí vzťah:*

$$q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \textit{pričom}\quad a=5,\ b=-26,\ c=5.$$

Takže:

$$q_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{(-26)^2-4\cdot5\cdot5}}{2\cdot5}=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{10}=\frac{26\pm\sqrt{576}}{10}=\frac{26\pm24}{10},$$

$$q_1=\frac{26+24}{10}=5\qquad a\qquad q_2=\frac{26-24}{10}=\frac{1}{5}.$$

U: Výborne. Vyšli ti dve rôzne hodnoty kvocienta q. Budeme mať teda dve rôzne geometrické postupnosti. Pre každú hodnotu kvocienta vypočítaj hodnotu zvyšných členov.

Ž:

$$\textit{Ak}\ q=5,\quad \textit{tak}\quad a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{2}{5}\quad a\quad a_3=a_2\cdot q=2\cdot5=10.$$

$$\textit{Ak}\ q=\frac{1}{5},\quad \textit{tak}\quad a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{2}{\frac{1}{5}}=10\quad a\quad a_3=a_2\cdot q=2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$$

Veď to sú tie isté čísla.

U: Áno, zadaniu vyhovujú dve trojčlenné geometrické postupnosti. Jedna je rastúca s členmi $\left\{\frac{2}{5},2,10\right\}$ a druhá je klesajúca s členmi $\left\{10,2,\frac{2}{5}\right\}$. V príklade sa ale pýtajú, aké čísla vyhovujú zadaniu, nie aké postupnosti.

Ž: **Zadaniu úlohy vyhovujú čísla $\frac{2}{5}$, 2 a 10.**

U: Postup, v ktorom je výhodnejšie pomocou prostredného člena vyjadriť jeho predchádzajúci aj nasledujúci člen, si môžeš precvičiť aj v nasledujúcej úlohe.

Úloha :

Tri čísla sú tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Ich súčet je 7 a súčin je $\frac{64}{27}$. Nájdite tieto čísla.

Výsledok:

Ide o čísla $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ a $\frac{16}{3}$.

Príklad 5: *Tri kladné čísla sú tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Ich súčet je 21 a súčet ich prevrátených hodnôt je* $\frac{7}{12}$. *Nájdite tieto čísla.*

Ž: *Označím si hľadané čísla* a_1, a_2 *a* a_3.

U: Dobre. V zadaní máš uvedené vzťahy, ktoré medzi nimi platia. Zapíš ich rovnicmi.

Ž: *Prvá rovnica je jasná. Ich súčet je* 21. *Rovnica bude vyzerať takto:*

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21.$$

V druhej rovnici je súčet prevrátených hodnôt jednotlivých členov. Teda:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{12}.$$

U: Získal si dve rovnice, v ktorých máme zatiaľ tri neznáme. Ako by si riešil vzniknutú sústavu rovníc?

Ž: *Použijem vzťah pre* n*-tý člen geometrickej postupnosti:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Vyjadrím si členy a_2 *a* a_3 *pomocou tohto vzťahu a dosadím ich do sústavy. Dostanem sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi – prvým členom* a_1 *a kvocientom* q.

U: Áno, takto sa obyčajne postupuje. V tomto prípade to ale nie je až taký výhodný postup. Výhodnejšie je vyjadriť si prvý a tretí člen pomocou druhého člena.

Ž: *Nech je po vašom. Vyjadrím si prvý a tretí člen pomocou druhého:*

$$a_1 = \frac{a_2}{q} \qquad a \qquad a_3 = a_2 \cdot q.$$

U: Dobre. Teraz tieto vyjadrenia dosaď do sústavy a vyrieš ju.

Ž: *Pokúsim sa:*

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} = \dfrac{7}{12} \\ \hline \dfrac{a_2}{q} + a_2 + a_2 \cdot q = 21 \\ \dfrac{1}{\frac{a_2}{q}} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot q} = \dfrac{7}{12} \\ \hline a_2 \cdot \left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = 21 \\ \dfrac{1}{a_2} \cdot \left(q + 1 + \dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{7}{12} \\ \hline \end{array}}$$

U: Dobre. Na ľavej strane oboch rovníc je v zátvorkách rovnaký výraz $\frac{1}{q}+1+q$. Osamostatni ich a potom porovnaj pravé strany rovníc. Dostaneš jednoduchú rovnicu s neznámou a_2.

Ž: *Urobím to:*

$$\begin{array}{c}
a_2 \cdot \left(\frac{1}{q}+1+q\right) = 21 \quad / : a_2 \\
\frac{1}{a_2} \cdot \left(q+1+\frac{1}{q}\right) = \frac{7}{12} \quad / \cdot a_2 \\
\hline
\frac{1}{q}+1+q = \frac{21}{a_2} \\
q+1+\frac{1}{q} = \frac{7}{12} \cdot a_2 \\
\hline
\frac{21}{a_2} = \frac{7}{12} \cdot a_2 \quad / \cdot 12 \cdot a_2 \\
21 \cdot 12 = 7 \cdot a_2^2 \quad / : 7 \\
36 = a_2^2 \quad / \sqrt{} \\
|a_2| = 6 \\
a_2 = \pm 6
\end{array}$$

U: Vyriešil si to správne. V zadaní sa hovorí, že geometrickú postupnosť tvoria kladné čísla, preto hodnota -6 nevyhovuje.

Ž: *Takže príklad má len jedno riešenie, len jedna geometrická postupnosť vyhovuje zadaniu.*

U: Neponáhľaj sa tak so záverom úlohy. Nemáš ešte kvocient. Vypočítaj ho.

Ž: *Využijem jednu upravenú rovnicu zo sústavy.*

$$\begin{array}{c}
q+1+\frac{1}{q} = \frac{7}{12} \cdot a_2 \\
q+1+\frac{1}{q} = \frac{7}{12} \cdot 6 \\
q+1+\frac{1}{q} = \frac{7}{2} \quad / \cdot 2q \\
2q^2+2q+2 = 7q \quad / -7q \\
2q^2-5q+2 = 0
\end{array}$$

U: Dobre. Dostal si ***kvadratickú rovnicu*** pre kvocient q. Ako ju vyriešiš?

Ž: *Pre* **korene kvadratickej rovnice** *platí vzťah:*

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \textit{pričom} \quad a=2,\ b=-5,\ c=2.$$

Takže:

$$q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{5\pm 3}{4},$$

$$q_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \qquad a \qquad q_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}.$$

U: Výborne. Vyšli ti dve rôzne hodnoty kvocienta q. Budeme mať teda dve rôzne geometrické postupnosti. Pre každú hodnotu kvocienta vypočítaj hodnotu zvyšných členov.

Ž:

$$\text{Ak } q = 2, \quad \text{tak} \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{6}{2} = 3 \quad a \quad a_3 = a_2 \cdot q = 6\cdot 2 = 12.$$

$$\text{Ak } q = \frac{1}{2}, \quad \text{tak} \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \quad a \quad a_3 = a_2 \cdot q = 6\cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Veď to sú tie isté čísla.

U: Áno, zadaniu vyhovujú dve trojčlenné geometrické postupnosti. Jedna je rastúca s členmi $\{3, 6, 12\}$ a druhá je klesajúca s členmi $\{12, 6, 3\}$. V príklade sa ale pýtajú, aké čísla vyhovujú zadaniu, nie aké postupnosti.

Ž: *Budú to teda čísla* 3, 6 *a* 12.

U: Urob pre ne skúšku správnosti.

Ž: *Ach jaj. Podľa prvého vzťahu zo zadania súčet týchto čísel má byť* 21*:*

$$3 + 6 + 12 = 21. \qquad \textit{To mi vyšlo.}$$

Podľa druhého vzťahu súčet ich prevrátených hodnôt má byť $\frac{7}{12}$*:*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4+2+1}{12} = \frac{7}{12}. \qquad \textit{Aj to mi vyšlo.}$$

Zadaniu úlohy vyhovujú čísla 3, 6 a 12.

U: Postup, v ktorom je výhodnejšie pomocou prostredného člena vyjadriť jeho predchádzajúci aj nasledujúci člen, si môžeš precvičiť aj v nasledujúcej úlohe.

Úloha :

Tri kladné čísla tvoria trojčlennú geometrickú postupnosť. Ich súčet je 52 *a súčet ich prevrátených hodnôt je* $\frac{13}{36}$*. Nájdite tieto čísla.*

Výsledok*:*

Trojica čísel je 4, 12, 36*. Zadaniu vyhovujú dve geometrické postupnosti:*

Pre $q = +3$ *ide o rastúcu postupnosť s prvým členom* 4*.*

Pre $q = \frac{1}{3}$ *ide o klesajúcu postupnosť s prvým členom* 36*.*

Príklad 6: *Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je*

$$s_n = \frac{3^n - 2^n}{2^{n-2}}.$$

Určte vzorec pre n-tý člen tejto postupnosti.

Ž: *Do vzorca pre n-tý člen geometrickej postupnosti budem potrebovať hodnotu prvého člena a kvocientu. Ako ich získam?*

U: Pomôžem ti. Čomu sa rovná súčet prvých n členov v prípade, že $n = 1$?

Ž: *Súčet pozostávajúci len z jedného sčítanca? V tom prípade je súčet rovný hodnote len toho jedného – prvého člena: $s_1 = a_1$.*

U: Dobre. Hodnotu prvého člena našej postupnosti by si teda vypočítať vedel.

Ž: *Povedal by som si, že $n = 1$ a dosadil by som to do vzorca pre súčet zo zadania príkladu.*

$$s_n = \frac{3^n - 2^n}{2^{n-2}}.$$

$$\text{Ak } n = 1, \text{ tak } s_1 = \frac{3^1 - 2^1}{2^{1-2}} = \frac{3-2}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 1 \cdot 2^1 = 2.$$

$$\text{Keďže} \quad s_1 = a_1 \quad \text{a} \quad s_1 = 2, \quad \text{tak} \quad a_1 = 2.$$

U: Dobre, potrebujeme ešte kvocient. Ako ho získame?

Ž: *Kvocient je podiel dvoch za sebou idúcich členov. Ale ja mám zatiaľ len jeden člen – prvý. Potrebujem ešte a_2.*

U: Pre $n = 2$ vypočítaj súčet s_2 pomocou vzorca zo zadania príkladu. A potom si už len uvedomíš, že $s_2 = a_1 + a_2$. Odtiaľ si vyjadríš hodnotu druhého člena.

Ž: *To je dobre vymyslené! Takže idem na to:*

$$s_n = \frac{3^n - 2^n}{2^{n-2}}.$$

$$\text{Ak } n = 2, \text{ tak } s_2 = \frac{3^2 - 2^2}{2^{2-2}} = \frac{9-4}{2^0} = \frac{5}{1} = 5.$$

$$\text{Keďže} \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_2 = 5 \quad \text{a} \quad a_1 = 2, \quad \text{tak} \quad a_2 = 3.$$

U: Máš vyjadrené hodnoty prvých dvoch členov, hodnotu kvocientu už môžeš vypočítať.

Ž: *Áno, hneď to bude:*

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}.$$

U: Dobre. A už len posledná vec – ako pomocou kvocientu a prvého člena dostaneš vyjadrenie pre n-tý člen geometrickej postupnosti?

Ž: *Vzorec pre n-tý člen postupnosti, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo je:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ak do tohto vzorca dosadím hodnotu prvého člena a kvocientu, dostanem:

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

A to je vlastne vzorec pre n-tý člen našej geometrickej postupnosti.

U: Správne.

Úloha :

Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je

$$s_n = 10 \cdot (2^n - 1).$$

Určte hodnotu jej siedmeho člena.

Výsledok:

$a_1 = 10$, $a_2 = 30$, $q = 3$, $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 7290$.

Príklad 7: *Medzi korene rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dve čísla tak, aby vznikli štyri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Určte jej kvocient a hodnoty vložených členov.*

Ž: *Myslím, že najprv budem musieť vypočítať* **korene kvadratickej rovnice***.*

U: To určite áno. Pusť sa do toho.

Ž: *Korene rovnice dostanem zo vzorca:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \textit{pričom} \quad a = 1,\ b = -9,\ c = 8.$$

Ich vyčíslenie je jednoduché:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2},$$

takže:

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 1.$$

U: Teraz už korene rovnice vypočítané máš. Čo ďalej?

Ž: *Myslím si, že viem aké čísla mám vložiť medzi* 1 *a* 8*, aby vznikla geometrická postupnosť.*

U: Aké čísla to podľa teba budú?

Ž: *Budú to čísla* 2 *a* 4*. Pre všetky štyri čísla* 1, 2, 4 *a* 8 *platí, že každé ďalšie je dvojnásobkom predchádzajúceho. Sú to malé čísla, pekne blízko pri sebe, takže to nebolo ťažké.*

U: Pekná úvaha. Ale ak sú krajné čísla ďaleko od seba a máš medzi nich vkladať veľké množstvo čísel, tak to, čo treba vkladať, už nemusí byť tak pekne viditeľné. Popíšme si na tomto príklade postup platný pre akékoľvek čísla.

Ž: *Tak dobre. Ak je kvocient geometrickej postupnosti q, tak pôjde o čísla:* 1, $1 \cdot q$, $1 \cdot q^2$, $1 \cdot q^3 = 8$. *Z posledného vzťahu sa kvocient dá vypočítať:*

$$\boxed{\begin{aligned} 1 \cdot q^3 &= 8 \\ q^3 &= 8 \quad / \sqrt[3]{} \\ q &= \sqrt[3]{8} \\ q &= 2 \end{aligned}}$$

U: Dobre. Ak máme kvocient, ďalšie členy postupnosti vypočítaš ľahko.

Ž: *Áno, postupným násobením dostanem čísla* 1, 2, 4 *a* 8.
Čísla 1, 2, 4 a 8 sú členmi *rastúcej geometrickej postupnosti* s kvocientom $q = 2$.

U: A v prípade, že by si si za prvé číslo v poradí zvolil číslo 8?

Ž: *Tak pôjde o čísla:* 8, $8 \cdot q$, $8 \cdot q^2$, $8 \cdot q^3 = 1$. *Opäť sa kvocient q dá vypočítať z posledného vzťahu:*

$$\begin{aligned} 8\cdot q^3 &= 1 \quad / : 8 \\ q^3 &= \frac{1}{8} \quad / \sqrt[3]{} \\ q &= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\ q &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Kvocient by mal hodnotu $\frac{1}{2}$ a členy geometrickej postupnosti by boli 8, 4, 2 a 1.

Čísla 8, 4, 2 a 1 sú členmi *klesajúcej geometrickej postupnosti* s kvocientom $q = \frac{1}{2}$.

U: Tento príklad si zvládol veľmi dobre.

Úloha 1:

Medzi čísla a^8 a b^8, $a \neq 0$, $b \neq 0$, vložte sedem čísel tak, aby vznikla deväťčlenná geometrická postupnosť. Vypíšte jej členy.

Výsledok:

a^8, $\pm a^7b$, a^6b^2, $\pm a^5b^3$, a^4b^4, $\pm a^3b^5$, a^2b^6, $\pm ab^7$, b^8.

Úloha 2:

Medzi čísla 5 a 640 vložte toľko čísel, aby vznikla geometrická postupnosť, v ktorej súčet vložených členov je 630. Vypíšte ich.

Výsledok:

5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640.

Príklad D1: *Dokážte, že v geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom a_1 a kvocientom q sa dá n-tý člen vyjadriť vzorcom:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{R}.$$

U: Máme dokázať vetu o vyjadrení geometrickej postupnosti vzorcom pre n-tý člen. Máme to dokázať pre ľubovoľné prirodzené číslo. Aký typ dôkazu použiješ?

Ž: *Ak sa niečo dokazuje pre všetky prirodzené čísla, tak sa používa* **dôkaz matematickou indukciou**.

U: Dobre. Pusť sa do práce.

Ž: *Mám dokázať, že pre n-tý člen geometrickej postupnosti platí vzorec*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ \textit{kde } n \in \mathbb{N} \textit{ a } q \in \mathbb{R}.$$

1.krok:
Musím ukázať platnosť tvrdenia pre najmenšie možné n, teda pre $n = 1$:

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1.$$

A to platí. Prvý člen sa rovná sám sebe. Dokázal som, že vzorec platí pre $n = 1$.

U: Áno. Môžeš prejsť na druhý krok, v ktorom dokážeš, že z platnosti vzorca pre n vyplynie platnosť vzorca pre $n + 1$. Platnosť vzorca pre člen a_n je indukčným predpokladom a platnosť vzorca pre a_{n+1} je indukčným tvrdením.

Ž: **2.krok:**
Budem potrebovať vyjadrenia pre a_n a a_{n+1}:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
$a_{n+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1} = a_1 \cdot q^n$.

U: Dobre. Potrebuješ ešte vedieť, akým ***rekurentným vzťahom*** je definovaná geometrická postupnosť.

Ž: *Takto:*

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, q \in \mathbb{R}\ .$$

U: Výborne. Vyjdeme z tohto rekurentného vzťahu. Dosaď do neho vyjadrenie pre člen a_n a uprav vzťah, ktorý dostaneš.

Ž: *Dobre.*

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{n+1} = a_n \cdot q \\ a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \\ a_{n+1} = a_1 \cdot q^{(n-1)+1} \\ a_{n+1} = a_1 \cdot q^n \end{array}}$$

U: Správne. Vychádzal si z indukčného predpokladu (platnosť vzorca pre a_n) a ekvivalentnými úpravami si došiel k indukčnému tvrdeniu (platnosť vzorca pre a_{n+1}). Dôkaz je hotový.

Ž: *Nebolo to ani také ťažké.*

U: To rád počujem. Pomocou tohto, už dokázaného vzťahu, sa dokazuje aj napríklad platnosť vety o vzťahu medzi r-tým a s-tým členom geometrickej postupnosti. To si urobíš ako samostatnú prácu.

Ž: *Budeme dokazovať aj platnosť rekurentného vzťahu*

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, q \in \mathbb{R} \ ?$$

U: To nie. Týmto vzťahom sa predsa definuje geometrická postupnosť. Definíciu nedokazujeme, definíciou zavádzame nový pojem.

Úloha :

Dokážte, že v geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *s kvocientom* q *platí medzi* r*-tým a* s*-tým členom vzťah:*

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Návod: použite **priamy dôkaz** *a využite vzťahy:* $a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$, $a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$.

Príklad D2: *Dokážte, že v geometrickej postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *s prvým členom* a_1 *a kvocientom* q *platí pre súčet* s_n *jej prvých* n *členov vzorec:*

$$s_n = \begin{cases} n \cdot a_1, & ak\ q = 1, \\ a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & ak\ q \in \mathbb{R},\ q \neq 1. \end{cases}$$

U: Máme dokázať vzorce pre súčet prvých n členov ***geometrickej postupnosti***. Sám vidíš, že výber vzorca závisí od hodnoty ***kvocientu*** q. Dokazovať budeme každý vzťah zvlášť.

Ž: *Dôkaz prvého vzorca je jednoduchý. Ak kvocient* $q = 1$*, postupnosť je konštantná, takže všetky jej členy majú rovnakú hodnotu. Rovnajú sa prvému členu. Súčet prvých* n *členov zapíšem takto:*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ale keďže $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$*, tak*

$$s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n-krát}$$

a teda

$$s_n = n \cdot a_1$$

U: Dobre. Toto bol ***priamy dôkaz*** platnosti vzorca.

U: Pre druhý vzorec odporúčam ***matematickú indukciu***.

Ž: *Mám dokázať platnosť vzorca*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad ak\ q \neq 1,\ q \in \mathbb{R}.$$

1.krok:

Musím ukázať platnosť tvrdenia pre najmenšie možné n*, teda pre* $n = 1$*: Dokážem, že vzorec pre súčet platí pre* $n = 1$*:*

$$s_1 = a_1 \cdot \frac{q^{1-1}}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q - 1}{q - 1} = a_1 \cdot 1 = a_1.$$

To platí. Keď mám postupnosť len s jedným členom, tak v súčte bude len jeden sčítanec.

U: Správne. Dokázal si, že vzorec platí pre $n = 1$. Môžeš prejsť na druhý krok, v ktorom dokážeš, že z platnosti vzorca pre n vyplynie platnosť vzorca pre $n + 1$. Platnosť vzorca pre súčet s_n je indukčným predpokladom a platnosť vzorca pre súčet s_{n+1} je indukčným tvrdením.

Ž: **2.krok:**

Pripravím si najprv vyjadrenie pre s_{n+1}*:*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$s_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

U: Dobre. Vyjdi z toho, že $s_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ a využi, že pre súčet prvých n členov platí indukčný predpoklad.

Ž: *Skúsim:*

$$\boxed{\begin{aligned} s_{n+1} &= \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{s_n} + a_{n+1} \\ s_{n+1} &= \overbrace{a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} + a_{n+1} \end{aligned}}$$

Ešte by som mohol nahradiť člen a_{n+1} výrazom $a_1 \cdot q^n$.

U: Dobre. A potom už len vyber pred zátvorku člen a_1.

Ž: *Tieto úpravy sú v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 \cdot q^n \\ s_{n+1} &= a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n \right) \end{aligned}}$$

U: Zatiaľ dobre. Teraz už len potrebuješ upraviť výraz v zátvorke.

Ž: *Výraz v zátvorke dám na spoločného menovateľa a upravím čitateľa.*

$$\boxed{\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1 + q^n \cdot (q - 1)}{q - 1} \\ s_{n+1} &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} \\ s_{n+1} &= a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}}$$

U: Z ***indukčného predpokladu (platnosť vzorca pre s_n)*** si ekvivalentnými úpravami došiel k ***indukčnému tvrdeniu (platnosť vzorca pre s_{n+1})***. Dôkaz je hotový.

Úloha :

Odvoďte a dokážte platnosť vzorca pre súčin prvých n členov geometrickej postupnosti.

Výsledok:

Súčin $S_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$, dôkaz **matematickou indukciou**.

Príklad D3: *Dokážte, že v geometrickej postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí pre každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ *vzorec:*

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

U: Máme dokázať, že v každej ***geometrickej postupnosti*** platí, že absolútna hodnota ľubovoľného jej člena, okrem prvého, sa rovná geometrickému priemeru svojich susedných členov.

Ž: *Budeme to dokazovať matematickou indukciou?*

U: Nie. Dôkaz indukciou teraz nie je vhodný, pretože vo vzorci okrem člena a_n vystupujú aj členy a_{n-1} a a_{n+1}. Použijeme ***priamy dôkaz***.

Ž: *Nie je mi jasné ako to urobíme.*

U: Budeme vychádzať z nejakého ***pravdivého výroku***, napríklad z už dokázaného vzorca, a úpravami sa budeme snažiť dôjsť k tvrdeniu, ktoré máme dokázať.

Ž: *A z ktorého pravdivého výroku budeme vychádzať?*

U: Použijeme ***rekurentný vzťah***, ktorým je definovaná geometrická postupnosť:

$$a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad \textit{pre } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a, q \in \mathbb{R}.$$

Ž: *Asi by ste mi mali pomôcť ešte viac, lebo toto mi nestačí.*

U: Pomocou rekurentného vzťahu najprv zapíšeš, čo platí pre prvú dvojicu susedných členov a_{n-1} a a_n a potom pre druhú dvojicu a_n a a_{n+1}.

Ž: *Takže mám tri za sebou idúce členy:* a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. *Platí:*

$$a_n = a_{n-1} \cdot q,$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

U: Dobre. A teraz si z týchto vzťahov vyjadri členy a_{n-1} a a_{n+1}.

Ž: *Takže prvý vzťah si upravím delením rovnice kvocientom. A druhý vzťah nepotrebujem upraviť vôbec.*

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q},$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

U: Potrebuješ súčin týchto členov.

Ž: *Vynásobím ich:*

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q = a_n^2.$$

Aha, už to vidím.

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \ \Rightarrow \ |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

U: Dobre, dokázal si daný vzťah, ale len pre prípad, že kvocient $q \neq 0$, pretože si ním delil. Ako budeš dokazovať vzorec $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ v prípade, že kvocient $q = 0$?

Ž: *Ak kvocient je nulový, tak postupnosť vyzerá takto:*

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \ldots\}.$$

U: Správne. Ako to využiješ?

Ž: *Platí teda, že pre každé $n \geqq 2$ je $a_n = a_{n+1} = 0$ a po dosadení dostaneme:*

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$0 = \sqrt{a_{n-1} \cdot 0}$$

$$0 = \sqrt{0}$$

$$0 = 0$$

A to je pravda.

U: Áno. Aj v tomto prípade si síce využil priamy dôkaz, ale postupovať by si mal od konca, teda od pravdivého výroku $0 = 0$ k vzťahu, ktorý dokazuješ. Tento opačný postup sa v priamom dôkaze naznačuje zvislou šípkou smerujúcou od posledného riadku hore k prvému.

Ž: *Dokázali sme, že* **v každej geometrickej postupnosti sa absolútna hodnota ľubovoľného člena, okrem prvého, rovná geometrickému priemeru jeho susedných členov**.

U: Výborne. Platí aj silnejšie tvrdenie: ***Absolútna hodnota ľubovoľného člena geometrickej postupnosti, okrem prvého, sa rovná geometrickému priemeru ktorejkoľvek dvojice od neho rovnako vzdialených členov.***

Ž: *Uf. Ako?*

U: V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}, \ \textit{kde } k \in \mathbb{N}, \ k < n.$$

Ž: *Čiže nemusím robiť len geometrický priemer tých najbližších susedov k členu a_n, ale môžem si vziať aj inú dvojicu susedov?*

U: Ak sú ich indexy rovnako vzdialené od n, tak áno. Index n musí byť v prostriedku medzi nimi. A navyše platí aj obrátená veta:
Ak členy postupnosti spĺňajú rovnosť $|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$, *kde* $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, ***potom je táto postupnosť geometrická.***
Dôkazy týchto tvrdení už nechám na tvoju samostatnú prácu.

Úloha 1: *Dokážte, že v geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$:*

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}, \ \textit{kde } k \in \mathbb{N}, \ k < n.$$

Návod: Analogicky ako v riešenom príklade, ale s využitím vzorca $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$.

Úloha 2: *Dokážte, že ak členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňajú rovnosť*

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}, \ \textit{kde } k \in \mathbb{N}, \ k < n,$$

potom je táto postupnosť geometrická.
Návod: Ak vzťah platí pre každé $k \in \mathbb{N}$ tak platí aj špeciálne pre $k = 1$. Umocniť a upraviť na podiel za sebou idúcich členov.