# Aritmetická postupnosť

***Mgr. Jana Králiková***

**U**: Vieš niečo o aritmetickej postupnosti?

**Ž**: *Myslím, že je to postupnosť, v ktorej sa každý nasledujúci člen líši od predchádzajúceho o nejakú hodnotu.*

**U**: Nie celkom. Presnejšie to vyjadrí definícia aritmetickej postupnosti:

***Postupnosť*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***sa nazýva aritmetickou práve vtedy, ak sa dá vyjadriť rekurentným vzťahom:***

$$a_1 = a,$$

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ pre každé } n \in \mathbb{N} \ ,$$

***pričom*** $a$***,*** $d$ ***sú dané reálne čísla.***

**Ž**: *Čo znamenajú čísla* $a$ *a* $d$*?*

**U**: Číslo $a$ predstavuje hodnotu prvého člena. Pri postupnosti danej ***rekurentným vzťahom*** musíme túto hodnotu poznať. Číslo $d$ je zaujímavejšie. Volá sa ***diferencia***. Je to hodnota, o ktorú sa líšia každé dva susedné členy aritmetickej postupnosti. Je to rozdiel susedných členov $a_{n+1}$ a $a_n$.

**Ž**: *V aute je zariadenie, ktoré sa volá diferenciál.*

**U**: Áno. Je to ***rozdeľovač*** hnacej sily na kolesá. V matematike slovo diferencia znamená ***rozdiel***. Ak máš nekonečné schody a na každom schode sedí jeden člen postupnosti, tak diferencia je vlastne konštantná výška schodu, ktorú musíš prekonať, aby si sa dostal od nejakého člena k členu, ktorý je na nasledujúcom schode.

**Ž**: *Rozumiem. A prečo sa aritmetická postupnosť volá práve aritmetická?*

**U**: Je to preto, lebo každý jej člen, okrem prvého, je ***aritmetickým priemerom*** svojich dvoch susedných členov. Ak máme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, mohli by sme to zapísať takto:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ \textit{kde } n \geqq 2.$$

Tento vzťah sa dá aj rozšíriť. Nemusí v ňom ísť len o najbližších susedov. Platí aj toto:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \ \textit{kde } n \geqq 2, \ k \in \mathbb{N}, \ k < n.$$

Znamená to, že ľubovoľný člen aritmetickej postupnosti, okrem prvého, sa rovná aritmetickému priemeru ktorejkoľvek dvojice od neho rovnako vzdialených členov.

**Ž**: *To je pekné. Prečo sa ale v definícii, ktorú ste uviedli, nikde vyskytuje aritmetický priemer?*

**U**: Ale vyskytuje. Len je trošku schovaný. Ľubovoľný člen $a_n$ sa od svojich susedných členov $a_{n-1}$ a $a_{n+1}$ líši o rovnakú hodnotu. Platí, že:

$$a_{n-1} + d \ = \ a_n \ = \ a_{n+1} - d.$$

Hodnota člena $a_n$ je presne v strede medzi hodnotami členov $a_{n-1}$ a $a_{n+1}$. Je teda ich aritmetickým priemerom.

**Ž**: *Áno, už to vidím.*

**U**: Dôležité je uvedomiť si, že ***aritmetická postupnosť*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***je jednoznačne určená svojím prvým členom*** $a_1$ ***a diferenciou d***.

---

**Ž**: *A čo ak nemám postupnosť danú prvým členom a diferenciou, ako zistím, či je aritmetická?*

**U**: Ukážeme si to na príklade:

***Zisti, či postupnosť*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***daná vzorcom pre*** $n$***-tý člen je aritmetická:***

***a)*** $a_n = 3n + 2$,

***b)*** $a_n = n^3 + 2$.

**Ž**: *Tak poďme na to. Vypočítal by som si hodnoty niekoľkých prvých členov a zistil by som, či sa susedné členy od seba líšia o konštantnú hodnotu.*

**U**: Lenže postupnosť je aritmetická vtedy, ak to platí pre každé dva susedné členy, nielen pre niekoľko prvých.

**Ž**: *Takže musím pracovať s všeobecnými predpismi členov.*

**U**: Áno, mal by si zistiť, či rozdiel členov $a_{n+1}$ a $a_n$ je konštantná hodnota.

**Ž**: **a)** *Dobre. Vzorec pre člen* $a_{n+1}$ *dostanem tak, že dosadím výraz* $n + 1$ *za premennú* $n$ *do vzorca pre* $a_n$*:*

$a_n = 3n + 2,$
$a_{n+1} = 3\cdot(n + 1) + 2 = 3n + 5.$

**U**: Teraz už len vyjadri rozdiel týchto členov.

**Ž**: *Rozdiel členov bude:*

$$a_{n+1} - a_n = 3n + 5 - (3n + 2) = 3n + 5 - 3n - 2 = \ 3.$$

*Rozdiel ľubovoľných dvoch susedných členov je konštantné číslo* 3*. Takže postupnosť je aritmetická?*

**U**: Áno. Aký je jej prvý člen a diferencia?

**Ž**: *Diferenciu už mám:* $d = a_{n+1} - a_n = 3$ *a prvý člen dopočítam hneď:* $a_1 = 3\cdot 1 + 2 = 5$.
**Postupnosť** $\{3n + 2\}_{n=1}^{\infty}$ **je aritmetická s prvým členom** $a_1 = 5$ **a diferenciou** $d = 3$**.**

**U**: Dobre. Teraz prejdi k príkladu b).

**Ž**: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom* $a_n = n^3 + 2$*. Tuším, že táto nebude aritmetická.*

**U**: Tušíš správne. Potrebujeme si ukázať aj takýto prípad.

**Ž**: *Takže si vyjadrím predpis pre člen $a_{n+1}$:*

$a_n = n^3 + 2,$
$a_{n+1} = (n+1)^3 + 2.$

**U**: Pri úprave tohto výrazu potrebuješ vedieť vzorec $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

**Ž**: *Ak $A = n$ a $B = 1$, tak po umocnení dostanem, že*
$a_{n+1} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2 = n^3 + 3n^2 + 3n + 3.$
*A teraz si vyjadrím ich rozdiel:*

$$a_{n+1} - a_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - (n^3 + 2) = 3n^2 + 3n + 1.$$

**U**: Výborne. Je rozdiel susedných dvoch členov aj v tomto prípade konštantný, teda – stále rovnaký?

**Ž**: *Nie, teraz to nie je konštanta. Výraz $3n^2 + 3n + 1$ obsahuje premennú $n$, takže jeho hodnota závisí od hodnoty tejto premennej. Pre každé prirodzené číslo bude iná.*

**U**: Presne tak. Výška schodu sa mení, nie je stále rovnaká.

**Ž**: *Rozumiem. Ak mi vyjde číslo, teda konštanta, tak postupnosť je aritmetická. A ak mi vyjde výraz, ktorý obsahuje premennú, tak postupnosť nie je aritmetická.*
**Postupnosť $\{n^3 + 2\}_{n=1}^{\infty}$ nie je aritmetická.**

---

**U**: Zaviedli sme si aritmetickú postupnosť a teraz si o nej rozšírime poznatky.

**Ž**: *Zatiaľ mi bolo všetko jasné. Dúfam, že to tak bude aj ďalej.*

**U**: To najzaujímavejšie ešte len príde. Pre aritmetickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, s prvým členom $a_1$ a diferenciou $d$, platia tri dôležité vety:

***Veta o určení aritmetickej postupnosti vzorcom pre $n$-tý člen:***

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Aritmetická postupnosť je definíciou zavedená pomocou rekurentného vzťahu. Ale môže byť daná aj vzorcom pre $n$-tý člen. Ako by si vyjadril niekoľko prvých členov tejto postupnosti pomocou prvého člena a diferencie?

**Ž**: *Ak sú prvý člen $a_1$ a diferencia $d$ dané, tak:*
$a_2 = a_1 + d,$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d, \ldots$

**U**: Matematickou indukciou sa dá dokázať, že vzorec pre $n$-tý člen bude $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

**Ž**: *Rozumiem. Aby som sa dostal na schodík s členom $a_n$ mám dve možnosti.* **Buď** *sa k nemu dostanem schodík po schodíku, teda vždy budem stúpať len na nasledujúci schod* **alebo** *na schod $a_n$ skočím veľkým skokom rovno z 1. schodu.*

**U**: Správne. Tá prvá možnosť, to je rekurentný vzťah. A tá druhá možnosť, to je vzorec pre $n$-tý člen. Ale na schodík s členom $a_n$ sa nemusíš dostať len z predchádzajúceho alebo z prvého schodu. O tom už hovorí nasledujúca veta.

**Ž**: *Tak to som zvedavý, odkiaľ tam ešte budem skákať.*

**U**: ***Veta o vzťahu medzi $r$-tým a $s$-tým členom aritmetickej postupnosti:***

$$\forall r, s \in \mathbb{N}: \ a_s = a_r + (s-r)\cdot d.$$

V tejto vete sa hovorí, že k členu $a_s$ sa môžem dostať z ľubovoľného miesta. Nielen z predchádzajúceho alebo z prvého člena, ale z ktoréhokoľvek. Potrebujem len vedieť, koľko diferencií musím prekonať.

**Ž**: *A môžem skákať aj z vyššie postaveného schoda smerom dole?*

**U**: Áno. V tom prípade bude $s < r$ a $s-r < 0$. Príslušný počet diferencií sa bude odpočítavať.

**Ž**: *Táto veta je akýmsi rozšírením tej prvej, však? Na schod s členom $a_s$ môžem doskočiť z ľubovoľného schodu.*

**U**: Áno. A sme pri poslednej vete. Pamätáš sa na pojem Gaussov súčet?

**Ž**: *Myslíte ten príbeh o chlapcovi, ktorý mal vypočítať súčet prvých* 100 *prirodzených čísel?*

**U**: Presne ten. Vieš, ako tento súčet malý Gauss rýchlo vypočítal?

**Ž**: *Mal sčítať* 1+2+3+4+5+... +95+96+97+98+99+100. *Všimol si, že prvé číslo s posledným dáva rovnaký súčet ako druhé s predposledným alebo tretie s predpredposledným... atď. Každý takýto súčet bude mať hodnotu* 101. *A dá sa vytvoriť* 50 *takýchto súčtov. Takže:*

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

**U**: Výborne. Ak si si zapamätal toto, tak s nasledujúcou vetou nebudeš mať žiadne problémy.

**Ž**: *Super.*

**U**: ***Veta o súčte prvých $n$ členov aritmetickej postupnosti:***

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n).$$

Písmenom $s$ označíme súčet členov. Dolný index vyjadruje, koľko prvých členov sa spočítava. Takto:
$s_1 = a_1,$
$s_2 = a_1 + a_2,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
$\vdots$
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$

**Ž**: *Gauss sčítaval prvých* 100 *prirodzených čísel. To je vlastne prvých* 100 *členov aritmetickej postupnosti, v ktorej $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = 100$ a $n = 100$. Veta hovorí, že rovnaký vzorec môžem použiť, ak chcem sčítať $n$ čísel, ktoré tvoria prvých $n$ členov ľubovoľnej aritmetickej postupnosti. Na veľkosti diferencie teraz nezáleží?*

**U**: Nie. Na diferencii tentokrát naozaj nezáleží. Dôkazy platnosti všetkých troch viet nájdeš v riešenej dôkazovej časti tejto témy.

---

**U**: Porozprávajme sa ešte o vlastnostiach aritmetických postupností.

**Ž**: *O aké vlastnosti ide?*

**U**: Napríklad ***monotónnosť***, ***ohraničenosť***, či majú ***maximálny a minimálny prvok***.

**Ž**: *Presne ako pri funkciách.*

**U**: Áno, začneme s monotónnosťou. Aritmetická postupnosť je daná hodnotou svojho prvého člena a diferenciou, teda veľkosťou kroku, ktorým sa dostanem k ďalšiemu členu. Porozmýšľaj, ako súvisí diferencia s monotónnosťou.

**Ž**: *Myslím, že to viem. Keď je diferencia kladné číslo, tak každý nasledujúci člen je väčší ako predchádzajúci. Postupnosť je vtedy* **rastúca**. *A keď je diferencia záporné číslo, tak je postupnosť* **klesajúca**, *lebo od každého člena odpočítavam konštantnú hodnotu, takže sa mi hodnoty členov stále zmenšujú.*

**U**: Výborne. Zhrniem to:

***Aritmetická postupnosť je rastúca práve vtedy, ak*** $d > 0$.

***Aritmetická postupnosť je klesajúca práve vtedy, ak*** $d < 0$.

**Ž**: *Môže sa diferencia rovnať aj nule?*

**U**: Pravdaže. V takom prípade ide o ***konštantnú postupnosť***. Každá konštantná postupnosť je aritmetickou postupnosťou s nulovou diferenciou.

**Ž**: *Jasné, veď konštantná postupnosť má všetky členy sú rovnaké.*

---

**U**: S monotónnosťou súvisí aj ohraničenosť. Vieš ako?

**Ž**: *Ak je aritmetická postupnosť rastúca, tak zhora určite nie je ohraničená, lebo vďaka kladnej diferencii sú všetky ďalšie členy vždy väčšie a väčšie, až do nekonečna. Horné ohraničenie ani maximálny člen teda nebudú existovať.*

**U**: A čo ohraničenosť zdola?

**Ž**: *Zdola je ohraničená - napríklad hodnotou svojho prvého člena. A vlastne ten prvý člen je aj jej minimálnym prvkom.*

**U**: Dobre. A ako je to pri klesajúcej aritmetickej postupnosti?

**Ž**: *Ak je aritmetická postupnosť klesajúca, tak je ohraničená len zhora - napríklad hodnotou svojho prvého člena. A tento prvý člen je aj jej maximálnym prvkom. Vďaka zápornej diferencii, budú všetky ďalšie členy menšie a menšie, takže dolné ohraničenie ani minimálny člen takáto postupnosť nemá.*

**U**: Správne.

---

**Ž**: *A ako sa dajú prakticky využiť vedomosti o aritmetických postupnostiach?*

**U**: Ukážeme si aj to:

***Aká je teplota na dne bane hlbokej*** $1015$ ***metrov, ak v hĺbke*** $25$ ***m je teplota*** $9^\circ C$ ***a každých*** $33$ ***m sa teplota zvýši o*** $1^\circ C$***?***

**Ž**: *Tak ja uznávam, že keby som bol baník, tak by ma malo zaujímať, či si do práce mám vziať kožuch alebo plavky.*

**U**: Zaujímať by ťa to malo aj v prípade, ak by si bol banský inžinier, ktorý chce zabezpečiť pre svojich ľudí optimálne podmienky na prácu v takejto hĺbke.

**Ž**: *No dobre. Ako teda využijem aritmetickú postupnosť v bani?*

**U**: Teplota stúpa s rastúcou hĺbkou. Stúpne každých 33 metrov o 1°C. Predstav si, že stojíš na schodoch, kde prvý schod je v hĺbke 25 m a každý ďalší schod je o 33 metrov nižšie. Posledný schod je v hĺbke 1015 m. Koľko je tých schodov?

**Ž**: *Uf. Neviem. Na každom schode smerom dole mi bude teplejšie o* $1°C$*. Pýtate sa ma, o koľko stupňov sa zmení teplota, však?*

**U**: Áno. Označme si to takto:
$a_1 = 25$ m
$a_n = 1015$ m
$d = 33$ m
$n = ?$

**Ž**: *Keď to mám tak pekne zapísané, hneď je to jednoduchšie. Použijem vzorec pre* $n$*-tý člen aritmetickej postupnosti a dosadím si do neho všetko, čo poznám:*

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$1015 = 25 + (n-1)\cdot 33.$$

**U**: A teraz vyrieš rovnicu pre neznámu $n$.

**Ž**: *Vykonám. Aby som osamostatnil neznámu* $n$*, potrebujem najprv od oboch strán rovnice odpočítať* 25*, potom vydeliť rovnicu číslom* 33 *a ešte pripočítať číslo* 1*. To všetko sú jednoduché* **ekvivalentné úpravy***. Riešenie rovnice je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{array}{c} 1015 = 25 + (n-1)\cdot 33 \ \ / -25 \\ 990 = (n-1)\cdot 33 \ \ / : 33 \\ 30 = n - 1 \ \ / +1 \\ n = 31 \end{array}}$$

*Vyšlo mi, že takýchto schodov bude* 31*. Teda teplota sa zvýši o* $31°C$*?*

**U**: Nie celkom. Schodov je síce 31, ale na prvom už stojíš. Tých ďalších je už len 30. Teplota sa teda zvýši len o 30°C.

**Ž**: *Takže:*

$$9°C + 30°C = 39°C.$$

*Hotovo.* **V hĺbke 1015 m bude teplota 39°C.**

**U**: Dobre, zvládol si to. Tu je ešte jeden príklad:

***Vypočítaj súčet prvých* 1000 *prirodzených párnych čísel.***

**Ž**: *Mám sčítať čísla* $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots$ *Uf. Musím použiť spôsob malého Gaussa.*

**U**: Presne tak. Mimochodom, nie je isté, či je tá historka o učiteľovi, ktorý potreboval zamestnať svojich žiakov, aj pravdivá.

**Ž**: *Ale keď práve vďaka tej historke si pamätám, čo treba urobiť.*

**U**: V tom prípade splnila svoje poslanie. Každé nasledujúce prirodzené párne číslo je od predchádzajúceho väčšie o 2. To by ti malo napovedať, že párne čísla tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou 2. Jej prvým členom bude prvé párne číslo, teda 2.

**Ž**: *Takže použijem vzorec pre súčet prvých* 1000 *členov aritmetickej postupnosti, v ktorej* $a_1 = 2$ *a* $d = 2$*:*

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_{1000} = \frac{1000}{2} \cdot (a_1 + a_{1000}).$$

**U**: Poznáš všetko, čo potrebuješ dosadiť do tohto vzorca?

**Ž**: *Nepoznám* $a_{1000}$*. Ale vypočítam ho pomocou vzorca pre* $n$*-tý člen postupnosti:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_{1000} = 2 + (1000 - 1) \cdot 2 = 2 + 999 \cdot 2 = 2 + 1998 = 2000.$$

*To mi vlastne mohlo aj napadnúť, že keď prvé párne číslo je* 2*, tak tisíce bude* 2000.

**U**: Teraz už súčet vypočítať môžeš.

**Ž**: *Vrátim sa k môjmu vzorcu:*

$$s_{1000} = \frac{1000}{2} \cdot (a_1 + a_{1000}) = \frac{1000}{2} \cdot (2 + 2000) = 500 \cdot 2002 = 1\,001\,000.$$

**Súčet prvých 1000 párnych čísel je 1 001 000.**

**U**: Správne.

---

**U**: Na záver už len zhrniem vzorce, ktoré sme si v tejto téme uviedli:

| ***Aritmetická postupnosť*** | | |
|---|---|---|
| vzorec pre $n$-tý člen | $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ | $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$ |
| vzťah medzi $r$-tým a $s$-tým členom | $a_r = a_s + (r-s) \cdot d$ | $r, s \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$ |
| súčet prvých $n$ členov | $s_n = \frac{(a_1+a_n) \cdot n}{2}$ | $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$ |
| aritmetický priemer | $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ | $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ |

**Príklad 1**: *Zistite, či postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná vzorcom pre $n$-tý člen je aritmetická:*

*a)* $a_n = 2n - 1$,

*b)* $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 2}$.

**U**: Akú postupnosť nazývame aritmetickou?

**Ž**: **Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická vtedy, ak je rozdiel $a_{n+1} - a_n$ konštantný**. *Tento* **konštantný rozdiel sa nazýva diferencia**.

**U**: Súhlasím. Ako zistíš, či daná postupnosť je aritmetická?

**Ž**: *Ak mám daný vzorec pre $n$-tý člen, tak si pomocou neho vytvorím vzorec pre nasledujúci člen, urobím ich rozdiel a zistím, či je tento rozdiel konštantný alebo nie.*

**U**: Dobre. Ukáž mi to na konkrétnych postupnostiach.

---

**Ž**: **a)** *Postupnosť je daná vzorcom pre $n$-tý člen: $a_n = 2n - 1$. Vzorec pre člen $a_{n+1}$ dostanem tak, že si dosadím za premennú $n$ do vzorca pre $a_n$ výraz $n + 1$:*
$a_n = 2n - 1$,
$a_{n+1} = 2 \cdot (n + 1) - 1 = 2n + 1$.

**U**: Správne, teraz vytvor ich rozdiel.

**Ž**: *Dobre:*

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2.$$

*Mám. Rozdiel je 2. To je konštanta. Rozdiel každých dvoch susedných členov nezávisí od premennej $n$, takže* **postupnosť $\{2n - 1\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická**.

**U**: To bol jednoduchší príklad, poďme na ďalší. Uvidíme, ako si s ním poradíš.

---

**Ž**: **b)** *Postupnosť je daná vzorcom pre $n$-tý člen: $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 2}$.*
*Pri vytváraní vzorca pre člen $a_{n+1}$ si musím spomenúť aj na vzorec $(A + B)^2$.*

**U**: Ak si nespomenieš, budeš musieť násobiť rovnaké zátvorky medzi sebou. Znalosť vzorca ti tento postup zjednoduší a urýchli.

**Ž**: *Takže: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.*
*Dosadím si do predpisu pre člen $a_n$ za premennú $n$ výraz $n + 1$:*

$a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 2}$,

$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n + 1) + 2} = \dfrac{(n^2 + 2n + 1) - 1}{n + 3} = \dfrac{n^2 + 2n}{n + 3}$.

**U**: Zatiaľ dobre. Pri vytváraní rozdielu dávaj pozor, aby si sa nepomýlil.

**Ž**: *Rozdiel dvoch zlomkov si upravím na spoločného menovateľa a zjednoduším:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+2n}{n+3} - \frac{n^2-1}{n+2} = \frac{(n^2+2n)\cdot(n+2)-(n^2-1)\cdot(n+3)}{(n+3)\cdot(n+2)} =$$

$$= \frac{n^3+2n^2+2n^2+4n-(n^3+3n^2-n-3)}{(n+3)\cdot(n+2)} = \frac{n^2+5n+3}{(n+3)\cdot(n+2)}.$$

*Dá sa urobiť ešte niečo?*

**U**: Nie. Kvadratický výraz v čitateli sa nedá vykrátiť žiadnou zátvorkou z menovateľa. Rozdiel je hotový.

**Ž**: *Takže rozdiel ľubovoľných dvoch susedných členov závisí od premennej $n$. Nie je to konštantná hodnota, pretože bude pre každé dva susedné členy iná.*

**Postupnosť** $\left\{\frac{n^2-2n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **nie je aritmetická.**

**U**: Výborne, ak si ešte chceš preriešiť podobné úlohy, tu sú:

**Úloha** :

*Zistite, či postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná vzorcom pre $n$-tý člen je aritmetická:*

*a)* $a_n = n\cdot(n-2)$,

*b)* $a_n = \dfrac{n^2-3n-4}{n+1}$.

**Výsledok**:

*a)* *nie*,

*b)* *áno*.

**Príklad 2**: *Presvedčte sa, že nasledujúce postupnosti sú aritmetické pre ľubovoľné reálne parametre $b$, $c$, $p$, $b \neq 0$. Určte ich prvé 4 členy, diferenciu a rekurentný vzťah. Za akých podmienok sú tieto postupnosti rastúce?*

*a)* $\left\{\dfrac{c+1-2n}{b}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $b \neq 0$,

*b)* $\{5+pn\}_{n=1}^{\infty}$.

**U**: Ako zistíš, či postupnosť je aritmetická?

**Ž**: *Ak mám daný vzorec pre $n$-tý člen, tak si pomocou neho vytvorím vzorec pre nasledujúci člen a urobím ich rozdiel. Ak je výsledok konštantný, tak postupnosť je aritmetická.*

**U**: A ako zistíš, či je aritmetická postupnosť ***rastúca*** alebo ***klesajúca***?

**Ž**: *Ak je diferencia kladná, postupnosť je rastúca. Ak je diferencia záporná, postupnosť je klesajúca.*

**U**: Áno. Môžme prejsť na konkrétne postupnosti.

---

**Ž**: **a)** *Mám postupnosť* $\left\{\dfrac{c+1-2n}{b}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Začnem jej prvými štyrmi členmi:*

$$\text{ak } n=1, \text{ tak } a_1 = \frac{c+1-2\cdot 1}{b} = \frac{c-1}{b},$$
$$\text{ak } n=2, \text{ tak } a_2 = \frac{c+1-2\cdot 2}{b} = \frac{c-3}{b},$$
$$\text{ak } n=3, \text{ tak } a_3 = \frac{c+1-2\cdot 3}{b} = \frac{c-5}{b},$$
$$\text{ak } n=4, \text{ tak } a_4 = \frac{c+1-2\cdot 4}{b} = \frac{c-7}{b}.$$

*Každý ďalší zlomok je o 2 menší než predchádzajúci. Diferencia je teda $(-2)$.*

**U**: Nemáš pravdu. Radšej pomocou rozdielu členov $a_n$ a $a_{n+1}$ dokáž, že postupnosť je aritmetická a odtiaľ ti už diferencia vyplynie. Je to istejšie ako hádanie.

**Ž**: *Dobre. Pripravím si teda predpisy pre členy $a_n$ a $a_{n+1}$:*

$$a_n = \frac{c+1-2n}{b},$$
$$a_{n+1} = \frac{c+1-2\cdot(n+1)}{b} = \frac{c+1-2n-2}{b} = \frac{c-1-2n}{b}.$$

**U**: Teraz môžeš vytvoriť ich rozdiel.

**Ž**:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c-1-2n}{b} - \frac{c+1-2n}{b} = \frac{c-1-2n-c-1+2n}{b} = -\frac{2}{b}.$$

*Už vidím, kde som urobil chybu. Zabudol som na menovateľa. Výraz $-\dfrac{2}{b}$ je konštantný, takže* **postupnosť** $\left\{\dfrac{c+1-2n}{b}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **je aritmetická s diferenciou** $d = -\dfrac{2}{b}$ **a s prvým**

**členom** $a_1 = \frac{c-1}{b}$.

**U**: Áno, je to tak. Máš ešte určiť, za akých podmienok je táto postupnosť rastúca a jej rekurentný vzťah.

**Ž**: *Začnem* **monotónnosťou**. *Aby postupnosť bola rastúca, tak jej diferencia musí byť kladná:*

$$d > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2}{b} > 0 \;\Leftrightarrow\; b < 0.$$

**Postupnosť je rastúca, ak je parameter** $b$ **záporný.** *Parameter* $c$ *môže byť ľubovoľný.*

**U**: Dobre. A nakoniec nám ostal ***rekurentný vzťah*** tejto postupnosti.

**Ž**: *Už sa nepamätám, ako sa vytvára.*

**U**: V rekurentnom vzťahu je člen $a_{n+1}$ vyjadrený pomocou predchádzajúceho člena $a_n$ alebo pomocou viacerých predchádzajúcich členov. Rekurentný predpis pre aritmetickú postupnosť je:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d, \qquad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

**Ž**: *Aha, veď v tomto vzorci už všetko poznám. Aj prvý člen, aj diferenciu. Takže len zapíšem rekurentný vzťah:*

$$a_1 = \frac{a-1}{b}, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{2}{b}.$$

*Hotovo.*

**U**: S príkladom b) si už iste poradíš samostatne, však?

---

**Ž**: **b)** *Opäť si najprv vypočítam hodnoty prvých štyroch členov postupnosti* $\{5+pn\}_{n=1}^{\infty}$*:*

*ak* $n = 1$, *tak* $a_1 = 5 + b \cdot 1 = 5 + p$,
*ak* $n = 2$, *tak* $a_2 = 5 + b \cdot 2 = 5 + 2p$,
*ak* $n = 3$, *tak* $a_3 = 5 + b \cdot 3 = 5 + 3p$,
*ak* $n = 4$, *tak* $a_4 = 5 + b \cdot 4 = 5 + 4p$.
*Myslím, že toto je jednoduché. Diferencia je* $p$.

**U**: Presvedč ma, že je to naozaj tak.

**Ž**: *Veď je to jasné!*

**U**: Aspoň si precvičíš postup.

**Ž**: *Tak si teda pripravím predpisy pre členy* $a_n$ *a* $a_{n+1}$*:*

$a_n = 5 + pn$,
$a_{n+1} = 5 + p \cdot (n+1) = 5 + pn + p$.
*Rozdiel týchto dvoch členov je:*

$$a_{n+1} - a_n = 5 + pn + p - (5 + pn) = 5 + pn + p - 5 - pn = p.$$

*Veď som to hovoril.*
**Postupnosť je aritmetická, lebo diferencia** $d = p$ *a to* **je konštanta**.

**U**: Nesťažuj sa, pokračuj v príklade.

**Ž**: *Rekurentný vzťah tejto postupnosti je:*

$$a_1 = 5 + p,\ \ a_{n+1} = a_n + p.$$

**U**: A ešte mi povedz, kedy je táto postupnosť rastúca.

**Ž**: *Keďže diferencia má hodnotu $p$, tak* **postupnosť $\{5 + pn\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, ak je $p > 0$.**

**U**: V poriadku.

**Úloha** :

*Presvedčte sa, že nasledujúce postupnosti sú aritmetické pre ľubovoľné reálne parametre $a$, $b$, $c$, $c \neq 0$. Určte ich prvých 5 členov a diferenciu. Za akých podmienok sú tieto postupnosti klesajúce?*

*a)* $\left\{\dfrac{a-n}{10}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

*b)* $\left\{\dfrac{a+bn}{c}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Výsledok***:*

*a)* $\left\{\dfrac{a-n}{10}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{a-1}{10}, \dfrac{a-2}{10}, \dfrac{a-3}{10}, \dfrac{a-4}{10}, \dfrac{a-5}{10}, \dots\right\}$, $d = \dfrac{-1}{10}$.

*Keďže $d < 0$, postupnosť je klesajúca.*

*b)* $\left\{\dfrac{a+bn}{c}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{a+b}{c}, \dfrac{a+2b}{c}, \dfrac{a+3b}{c}, \dfrac{a+4b}{c}, \dfrac{a+5b}{c}, \dots\right\}$, $d = \dfrac{b}{c}$.

*Postupnosť je klesajúca, ak konštanty $b$ a $c$ majú opačné znamienka, teda ak platí:*
$b > 0\ \wedge\ c < 0$ *alebo* $b < 0\ \wedge\ c > 0$.

**Príklad 3**: *Určte aritmetickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej platí:*

$$a_1 + a_5 = 16,$$

$$a_3 + a_4 = 19.$$

**U**: Ak sa v príklade hovorí, že máš určiť aritmetickú postupnosť, čo to znamená?

**Ž**: *Aby bolo jasné, o ktorú aritmetickú postupnosť ide, musím určiť prvý člen a diferenciu tejto postupnosti.*

**U**: Dobre. Prvým členom a diferenciou je aritmetická postupnosť jednoznačne daná.

**Ž**: *V danej sústave sa ale nenachádza diferencia. Zato tam mám až 4 neznáme. To nebudem vedieť vypočítať.*

**U**: Nevzdávaj sa hneď na začiatku. Bude to celkom jednoduché, keď si uvedomíš, že každý člen aritmetickej postupnosti vieš určiť pomocou prvého člena a diferencie.

**Ž**: *Každý člen aritmetickej postupnosti viem vyjadriť pomocou vzorca:*

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d,$$

*takže členy $a_3$, $a_4$ a $a_5$ si mám napísať pomocou tohto vzťahu?*

**U**: Áno. V zadaní príkladu je sústava dvoch rovníc, v ktorej zatiaľ vystupujú 4 neznáme: $a_1$, $a_3$, $a_4$ a $a_5$. Ale použitím tohto vzťahu, sa daná sústava rovníc zmení na sústavu, v ktorej ako neznáme vystupujú len $a_1$ a $d$. Dve rovnice, dve neznáme.

**Ž**: *To by šlo. Naozaj som si na začiatku nevedel predstaviť, ako by som vypočítal hodnoty štyroch neznámych z dvoch rovníc.*

**U**: Tak poďme riešiť príklad.

**Ž**: *Vyjadrím si teda potrebné členy pomocou $a_1$ a $d$:*

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + (4-1)\cdot d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d.$$

**U**: A teraz si tieto výrazy dosaď do sústavy rovníc.

**Ž**: *Dosadím a pokúsim sa sústavu vyriešiť:*

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1 + a_5 = 16 \\ \underline{a_3 + a_4 = 19} \\ a_1 + (a_1 + 4d) = 16 \\ \underline{(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 19} \\ 2a_1 + 4d = 16 \\ \underline{2a_1 + 5d = 19} \end{array}}$$

**U**: Zatiaľ si len zjednodušil výrazy na ľavých stranách rovnice odstránením zátvoriek a sčítaním rovnakých premenných. Pozri sa ešte raz na poslednú sústavu dvoch rovníc v rámčeku. Čo sa stane, ak odpočítaš prvú rovnicu od druhej?

**Ž**: *Ak odpočítam prvú rovnicu od druhej, členy s $a_1$ sa odpočítajú a vypadnú. Od piatich déčok odpočítam štyri déčka a dostanem, že*

$$d = 3.$$

**U**: Áno. Jednu neznámu už teda máme. Ako vypočítaš hodnotu člena $a_1$?

**Ž**: *Dosadím hodnotu d do niektorej rovnice v poslednej sústave. Asi je jedno do ktorej, vyzerajú takmer rovnako. Dosadím teda $d = 3$ do prvej rovnice. Dostanem rovnicu už len s jednou neznámou:*

$$\boxed{\begin{array}{c} 2a_1 + 4d = 16 \\ 2a_1 + 4\cdot 3 = 16 \\ 2a_1 + 12 = 16 \end{array}}$$

**U**: Aké ***ekvivalentné úpravy*** použiješ na jej vyriešenie?

**Ž**: *Aby som osamostatnil neznámu $a_1$, odpočítam najprv od oboch strán rovnice číslo 12. Potom vydelím celú rovnicu dvojkou. A to už asi bude všetko. Celé riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{array}{c} 2a_1 + 12 = 16 \;/ - 12 \\ 2a_1 = 4 \;/ : 2 \\ a_1 = 2 \end{array}}$$

**U**: Vyšlo ti, že prvý člen má hodnotu 2. Urob skúšku správnosti.

**Ž**: *Ach jaj. Takže si vypočítam hodnoty jednotlivých členov postupnosti a zistím, či dávajú potrebné súčty:*

$a_1 = 2,$
$a_3 = a_1 + 2d = 2 + 2\cdot 3 = 8,$
$a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3\cdot 3 = 11,$
$a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4\cdot 3 = 14.$

**Ž**: *To si vypočítal správne. Prever správnosť súčtov.*

**Ž**: $a_1 + a_5 = 2 + 14 = 16$, *to sedí.*
$a_3 + a_4 = 8 + 11 = 19$, *aj to sedí.*

**Riešením príkladu je aritmetická postupnosť, v ktorej $a_1 = 2$ a $d = 3$.**

**Úloha** :

*Určte aritmetickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej platí:*

*a)* $a_1 + a_7 = 22$, $a_3 \cdot a_4 = 88,$    *b)* $a_2 - a_3 + a_5 = 20$, $a_1 + a_6 = 38,$    *c)* $s_4 - a_5 = 100$, $s_2 + a_4 = 50.$

**Výsledok**:

*a)* $a_1 = 2,\quad d = 3,$
*b)* $a_1 = 14,\quad d = 2,$
*c)* $a_1 = 50,\quad d = -25.$

**Príklad 4**: *Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti. Obsah tohto trojuholníka je 24 cm$^2$. Aký veľký je jeho obvod?*

**Ž**: *Strany pravouhlého trojuholníka si označím tak, ako som zvyknutý: odvesny budú $a$ a $b$, prepona bude $c$. Poznám jeho obsah, vypočítať mám obvod.*

**U**: Zapíš si matematickými vzťahmi všetko, čo je dané a čo vieš využiť.

**Ž**: *Poznám obsah. Ak $a$ a $b$ sú odvesny pravouhlého trojuholníka, tak platí:*

$$\frac{a \cdot b}{2} = 24.$$

*Ešte viem, že v pravouhlom trojuholníku platí* **Pytagorova veta***:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**U**: To máš dve rovnice a tri neznáme. Potrebuješ ešte jednu rovnicu a tú získaš z informácie, že veľkosti strán tohto trojuholníka sú za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti.

**Ž**: *To akosi neviem využiť. Veď nepoznám ani prvý člen ani diferenciu tejto aritmetickej postupnosti.*

**U**: Nepotrebuješ vedieť prvý člen ani diferenciu. Stačí ti vedieť, že medzi stranami trojuholníka je taký istý vzťah ako medzi členmi aritmetickej postupnosti. Čo platí pre členy aritmetickej postupnosti, ktoré idú za sebou?

**Ž**: *No, napríklad, že prostredný člen je aritmetickým priemerom svojich susedov. Alebo, že rozdiel prvých dvoch je taký istý ako rozdiel druhých dvoch členov. Alebo ešte, že ak pri-rátam jednu diferenciu k prvému z členov, dostanem druhý člen v poradí, a ak k prvému členu prirátam dvojnásobok diferencie, tak dostanem tretí člen.*

**U**: No vidíš, koľko toho vieš. Ja ti odporúčam použiť to, že prostredná strana je od najmenšej o $d$ dlhšia a zároveň je o $d$ kratšia než najdlhšia strana. Číslo $d$ je samozrejme kladná diferencia aritmetickej postupnosti.

**Ž**: *Lenže ja neviem, ktorá zo strán $a,\ b,\ c$ je prostredná.*

**U**: Ale určite vieš, ktorá to nebude.

**Ž**: *Jasné. Prepona $c$ je najdlhšia strana v trojuholníku, takže nebude postredná.*

**U**: Ostali ti dve odvesny. Pre ne musíš rozhodnúť, ktorým písmenkom budeš označovať tú kratšiu a ktorým písmenkom tú dlhšiu odvesnu. Je len na tebe, ako sa rozhodneš.

**Ž**: *Tak nech je to ako v abecednom poradí, teda nech $a < b < c$.*

**U**: Takže pre strany $a,\ b,\ c$ platí:

$$a = b - d, \quad c = b + d.$$

Ak si za $a$ a $c$ dosadíš do predchádzajúcich dvoch rovníc tieto výrazy, dostaneš sústavu dvoch rovníc pre dve neznáme – prostrednú stranu $b$ a diferenciu $d$. Urob to.

**Ž**: *Uhm. Všetky štyri vzťahy si napíšem pekne pod seba a potom dosadím do vzorca pre obsah a do vzorca pre Pytagorovu vetu výrazy predstavujúce strany $a$ a $c$. Je to v rámčeku:*

$$\begin{array}{c} \dfrac{a\cdot b}{2}=24 \\ a^2+b^2=c^2 \\ a=b-d \\ c=b+d \\ \hline \dfrac{(b-d)\cdot b}{2}=24 \\ (b-d)^2+b^2=(b+d)^2 \\ \hline \end{array}$$

**U**: Dostal si sústavu už len dvoch rovníc s dvoma neznámymi $b$ a $d$. V prvej rovnici musíš odstrániť zlomok a v druhej potrebuješ umocniť rozdiel a súčet.

**Ž**: *Prvú rovnicu teda vynásobím dvojkou a v čitateli roznásobím zátvorku, v druhej rovnici využijem vzorec* $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$. *Viď rámček:*

$$\begin{array}{c} \dfrac{(b-d)\cdot b}{2}=24\ /\cdot 2 \\ b^2-2bd+d^2+b^2=b^2+2bd+d^2 \\ \hline b^2-bd=48 \\ b^2-4bd=0 \\ \hline \end{array}$$

**U**: Ak z prvej rovnice tejto sústavy osamostatníš súčin $bd$ a dosadíš ho do druhej rovnice, dostaneš už len jednu rovnicu s neznámou $b$.

**Ž**: *A tú by už nemal byť problém vyriešiť. Zlúčim členy obsahujúce premennú, absolútny člen prehodím na druhú stranu a vydelím koeficientom, ktorý je pri neznámej* $b^2$. *Aha, na záver ešte odmocním, aby som dostal neznámu* $b$. *Celé riešenie rovnice je v rámčeku:*

$$\begin{array}{c} bd=b^2-48 \\ b^2-4bd=0 \\ \hline b^2-4\cdot\left(b^2-48\right)=0 \\ b^2-4b^2+192=0\ /-192 \\ -3b^2=-192\ /:(-3) \\ b^2=64\ /\sqrt{\ } \\ b=8 \end{array}$$

**U**: Korene kvadratickej rovnice $b^2=64$ sú čísla $\pm 8$, ale keďže tieto hodnoty predstavujú dĺžku strany v cm, tak záporný koreň nevyhovuje. Riešením je len kladná hodnota $b=8$.

**Ž**: *Ešte musím vypočítať veľkosť diferencie. Vypočítanú hodnotu béčka dosadím do prvej rovnice sústavy a vyriešim jednoduchú rovnicu pre neznámu d.*

$$\boxed{\begin{array}{c} bd = b^2 - 48 \\ 8d = 64 - 48 \\ 8d = 16 \ / : 8 \\ d = 2 \end{array}}$$

**U**: Dobre. Pomocou diferencie $d$ a strany $b$ ľahko získaš veľkosti strán $a$ a $c$.

**Ž**: *Jasné:*
$a = b - d = 8 - 2 = 6,$
$c = b + d = 8 + 2 = 10.$
*Mám to. Strany trojuholníka sú:* $a = 6$ **cm**, $b = 8$ **cm** *a* $c = 10$ **cm**.

**U**: Správne. A ešte musíme vypočítať obvod tohto trojuholníka.

**Ž**: *To už bude ľahké. Obvod trojuholníka sa počíta ako súčet všetkých troch strán:*

$$o = a + b + c$$

$$o = 6 + 8 + 10$$

$$o = 24$$

**Pravouhlý trojuholník, ktorého obsah je $24\ cm^2$, a ktorého strany sú členy aritmetickej postupnosti, má obvod $o = 24\ cm$.**

**Úloha** :

*Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti. Dlhšia odvesna má dĺžku 24cm. Aký veľký je obvod a obsah tohto trojuholníka?*

**Výsledok**:

$a = 18\ cm,$
$c = 30\ cm,$
$o = 72\ cm,$
$S = 216\ cm^2.$

**Príklad 5**: *Na streche tvaru lichobežníka sú poukladané škridly do radov tak, že pri hrebeni je 85 škridiel a v každom nasledujúcom rade je o jednu škridlu viac než v predchádzajúcom rade. Koľkými škridlami je pokrytá strecha, ak najspodnejší rad má 100 škridiel?*

**U**: Rozumieš zadaniu?

**Ž**: *V podstate áno, len si chcem ujasniť, čo je hrebeň strechy.*

**U**: Vrchná vodorovná hrana.

**Ž**: *Dobre. Takže v najvrchnejšom rade je 85 škridiel. V každom nižšom rade je o jednu škridľu viac. Až nakoniec v spodnom rade je 100 škridiel. Mám vypočítať, koľko je tam spolu škridiel.*

**U**: Správne. Ako ti v tomto príklade môžu pomôcť poznatky o aritmetickej postupnosti?

**Ž**: *V každom nižšom rade je o jednu škridľu viac, takže by mohlo ísť o aritmetickú postupnosť s diferenciou $d = 1$. Prvý člen by mohol predstavovať počet škridiel v hornom rade a nejaký $n$-tý člen by predstavoval počet škridiel v spodnom rade. Len neviem, koľko je tých radov.*

**U**: Zapíš si všetko, čo je dané, pomocou symbolov aritmetickej postupnosti. Potom sa uvidí, čo poznáme a čo ešte potrebujeme vypočítať.

**Ž**: *Takže zatiaľ máme:*
$a_1 = 85$
$a_n = 100$
$d = 1$
$n = ?$
$s_n = ?$

**U**: Čo vypočítaš ako prvé?

**Ž**: *Keďže do vzorca pre súčet $s_n$ potrebujem aj počet radov $n$, tak najprv vypočítam $n$.*

**U**: A ako ho vypočítaš?

**Ž**: *Použijem vzťah pre $n$-tý člen aritmetickej postupnosti:*

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

*Dostanem jednoduchú rovnice pre neznámu $n$. Aby som osamostatnil neznámu, ktorá je v zátvorke, najprv odpočítam číslo 85, potom zátvorku vynásobím jednotkou, tým sa mi ale výraz v zátvorke nezmení. Nakoniec pripočítam jednotku. Celé riešenie rovnice je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \\ 100 = 85 + (n-1)\cdot 1 \quad / -85 \\ 15 = n - 1 \quad / +1 \\ n = 16 \end{gathered}}$$

**U**: Áno. Takže máme 16 radov. Koľko je v nich škridiel?

**Ž**: *To vypočítam pomocou vzorca pre súčet prvých 16 členov našej postupnosti. Dosadím do tohto vzorca hodnoty $n = 16$, $a_1 = 85$ a $a_n = 100$ a vyčíslim:*

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_{16} = \frac{16}{2} \cdot (85 + 100) = 8 \cdot 185 = 1480.$$

**Strechu pokrýva 1480 škridiel.**

**U**: Výborne.

**Úloha** :

*Železné rúry sa ukladajú do vrstiev tak, že rúry každej vrchnej vrstvy zapadajú do medzier spodnej vrstvy. Do koľkých vrstiev sa uloží 102 rúr, ak najvrchnejšia vrstva má 3 rúry? Koľko rúr má najspodnejšia vrstva?*

**Výsledok**:

*Je 12 vrstiev, v spodnej je 14 rúr.*

**Príklad 6**: *Medzi čísla* 4 *a* 37 *vložte čísla tak, aby s danými číslami tvorili aritmetickú postupnosť so súčtom* 246. *Určte počet vložených čísel a diferenciu takto vytvorenej aritmetickej postupnosti.*

**Ž**: *Nech je číslo* 4 *prvým členom postupnosti, potom bude niekoľko - neviem koľko - vložených čísel a číslo* 37 *nech je $n$-tým členom. Číslo* 246 *je súčtom všetkých čísel od* 4 *do* 37*, ktoré tvoria túto aritmetickú postupnosť.*

**U**: Zapíš si čo je dané a čo treba vypočítať.

**Ž**: *Dobre. Takže:*

$a_1 = 4$
$a_n = 37$
$s_n = 246$
$n = ?$
$d = ?$

**U**: Zapísané to máš správne, ale v zadaní úlohy sa hovorí, že máš určiť počet vložených čísel. Tvoja premenná $n$ označuje počet čísel od 4 do 37, vrátane nich.

**Ž**: *Takže vlastne by som mal vypočítať $n-2$. Pokúsim sa na to nezabudnúť.*

**U**: Aký vzorec platí pre súčet prvých $n$ členov aritmetickej postupnosti?

**Ž**: *Ak sa dobre pamätám, tak*

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

*V tomto vzťahu poznám $a_1$, $a_n$ a $s_n$. Neznámu $n$ vypočítam.*

**U**: Áno, Dostaneš jednoduchú rovnicu s neznámou $n$, vyrieš ju.

**Ž**: *Po dosadení známych hodnôt, vynásobím celú rovnicu dvojkou, aby som odstránil zlomok a vydelím ju hodnotou zátvorky. Tým by som mal mať $n$ vypočítané. Celé riešenie rovnice je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \\ 246 &= \frac{n}{2} \cdot (4 + 37) \quad / \cdot 2 \\ 492 &= n \cdot 41 \quad / : 41 \\ n &= 12 \end{aligned}}$$

**U**: Rovnicu si vyriešil správne. Koľko bude vložených čísel?

**Ž**: **Vkladať budem** *$n-2$ čísel, teda* 10 **čísel**.

**U**: Správne. A teraz ešte urči diferenciu.

**Ž**: *Diferenciu určím zo vzťahu pre $n$-tý člen aritmetickej postupnosti:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

*Aby som osamostatnil neznámu $d$, odpočítam od oboch strán rovnice hodnotu prvého člena a vydelím celú rovnicu hodnotou zátvorky. Je to v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \\ 37 = 4 + (12-1)\cdot d \ \ / -4 \\ 33 = 11\cdot d \ \ / : 11 \\ d = 3 \end{gathered}}$$

**Diferencia tejto aritmetickej postupnosti je** $d = 3$.

**U**: A ktoré čísla medzi 4 a 37 vložíš? V zadaní úlohy sa to síce nežiada, ale vymenuj mi ich.

**Ž**: *Prvé číslo* 4 *je dané. Každé ďalšie je o* 3 *väčšie.*
**Vloženými číslami budú:** 7**,** 10**,** 13**,** 16**,** 19**,** 22**,** 25**,** 28**,** 31 **a** 34. *Nasledujúce číslo je už* 37.

**U**: Dobre.

**Úloha** :

*Medzi čísla* 7 *a* 37 *vložte čísla tak, aby s danými číslami tvorili aritmetickú postupnosť so súčtom* 286. *Určte počet vložených čísel a diferenciu takto vzniknutej aritmetickej postupnosti.*

**Výsledok**:

*Vložíme* 11 *čísel,* $d = 2{,}5$.

**Príklad 7**: *Určte všetky konvexné $n$-uholníky, ktorých veľkosti vnútorných uhlov sú po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti, rozdiel každých dvoch po sebe idúcich členov je $10°$ a najmenší uhol má veľkosť $100°$.*

**U**: Pamätáš sa ešte čo znamená pojem konvexný $n$-uholník?

**Ž**: *Myslím, že je to $n$-uholník, v ktorom sa nedá hrať na skrývačku, lebo všade odvšadiaľ vidieť. Vo vnútri nie je žiaden roh, za ktorý by sa dalo skryť.*

**U**: Pekne povedané. Ale v matematike hovoríme, že ***konvexný $n$-uholník je taký $n$-uholník, ktorého veľkosti všetkých vnútorných uhlov sú menšie ako*** $180°$.

**Ž**: *Rozumiem. Viac ako $180°$ žiaden konvexný uhol mať nemôže, lebo už by tam vznikol ten roh a presne $180°$ tiež nemôže byť, lebo by nešlo o vrchol $n$-uholníka.*

**U**: Veľkosti všetkých vnútorných uhlov konvexného $n$-uholníka sú teda zhora aj zdola ohraničené. Majú tvoriť aritmetickú postupnosť.

**Ž**: *Poznám veľkosť najmenšieho uhla, to by mohol byť prvý člen aritmetickej postupnosti. Rozdiel susedných členov, to je diferencia. Najväčší uhol nepoznám, ani neviem, koľko ich bude. Teda vlastne neviem o aký $n$-uholník pôjde.*

**U**: Zaveď si označenie pre to čo je dané a čo máš vypočítať. Symbol pre stupeň neuvádzaj. Pracuj len s číselnými hodnotami.

**Ž**: $a_1 = 100$
$d = 10$
$\underline{n = ?\quad}$

*To som to ale dopadol. Veď pomocou týchto dvoch vecí nebudem vedieť vypočítať $n$.*

**U**: Aritmetická postupnosť je jednoznačne určená svojim prvým členom a diferenciou. A tie dané máš. Členy tejto postupnosti by si teda mal vedieť zaradom vymenovať. Ak ti nenapadne lepšie riešenie, budeš to musieť urobiť takto.

**Ž**: *Vymenovávať členy sa mi nechce. Musím zmobilizovať svoje schopnosti. Posledný člen, ktorý ma zaujíma, je menší ako $180°$. Bude to člen $a_n$. Ešte neviem, akú bude mať hodnotu, ale keď využijem vzorec na jeho výpočet, tak dostanem:*

$$a_n < 180, \quad \textit{takže} \quad a_1 + (n-1)\cdot d < 180.$$

**U**: Výborne. Budeš teda riešiť nerovnicu a nie rovnicu.

**Ž**: *Dosadím si do nej všetko, čo poznám. Neznáma $n$ je v zátvorke, takže najprv od oboch strán nerovnice odpočítm číslo $100$, potom nerovnicu vydelím desiatkou. Tým osamostatním výraz v zátvorke. Nakoniec ešte pripočítam jednotku. Celé riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered} a_1 + (n-1)\cdot d < 180 \\ 100 + (n-1)\cdot 10 < 180 \ \ / - 100 \\ (n-1)\cdot 10 < 80 \ \ / : 10 \\ n - 1 < 8 \ \ / + 1 \\ n < 9 \end{gathered}}$$

*Veľmi mi to nepomohlo. Môj konvexný $n$-uholník môže byť trojuholník až osemuholník.*

**U**: Musíme si pomôcť ešte niečím. Vieš aký je súčet vnútorných uhlov v konvexnom $n$-uholníku?

**Ž**: *Viem len, že v trojuholníku je to* $180°$. *V štvorci a obdĺžniku je to* $360°$. *Ale v nejakom všeobecnom $n$-uholníku, to neviem.*

**U**: Súčet vnútorných uhlov v konvexnom $n$-uholníku je $(n-2)\cdot 180$. Tento vzťah a vzťah pre súčet prvých $n$ členov aritmetickej postupnosti ti pomôžu vypočítať počet vrcholov $n$.

**Ž**: *Aha. Zapíšem si to takto:*

$$s_n = (n-2)\cdot 180$$
$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

*Obe rovnice sústavy majú rovnaké ľavé strany, takže aj ich pravé strany sa rovnajú:*

$$(n-2)\cdot 180 = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n).$$

**U**: Dobre. Na pravej strane rovnice si nahradíme premennú $a_n$ pomocou vzorca pre $n$-tý člen a dostaneme rovnicu už len pre neznámu $n$:

$$\boxed{\begin{gathered}(n-2)\cdot 180 = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)\\ (n-2)\cdot 180 = \frac{n}{2}\cdot[a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d]\end{gathered}}$$

**Ž**: *Dosadím si do tejto rovnice všetko, čo poznám. Na ľavej aj pravej strane potom roznásobím zátvorky a zlúčim čo sa dá. Riešenie je v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{gathered}(n-2)\cdot 180 = \frac{n}{2}\cdot[100 + 100 + (n-1)\cdot 10]\\ 180n - 360 = 50n + 50n + (n-1)\cdot 5n\\ 180n - 360 = 100n + 5n^2 - 5n \;/ - 180n + 360\\ 0 = 5n^2 - 85n + 360 \;/ : 5\\ 0 = n^2 - 17n + 72\end{gathered}}$$

**U**: Po týchto úpravách ti vyšla ***kvadratická rovnica*** $n^2 - 17n + 72 = 0$. Vieš ju rozložiť na súčin ***koreňových činiteľov***?

**Ž**: *Myslím, že áno. Pomocou* **Vietových vzťahov***:*
*absolútny člen* $72$ *sa dá rozložiť na súčin* $8\cdot 9$ *a lineárny člen* $-17 = -8 - 9$, *takže zapíšem:*

$$0 = (n-8)\cdot(n-9).$$

*Kvadratická rovnica má dva korene:* $n_1 = 8$ *a* $n_2 = 9$.

**U**: To áno, ale koreň $n_2$ nevyhovuje podmienke, ktorú si na začiatku príkladu vytvoril.

**Ž**: *Aha,* $n < 9$. *Takže jediným riešením je len* $n = 8$. **Konvexný $n$-uholník v našej úlohe môže byť teda len osemuholníkom.**

**U**: Správne. Viem, že sa ti do toho nechcelo, ale aké sú veľkosti vnútorných uhlov v tomto osemuholníku?

**Ž**: *Začnem najmenším uhlom a pripočítavaním diferencie vypočítam ďalšie. Veľkosti vnútorných uhlov sú:* $100°$, $110°$, $120°$, $130°$, $140°$, $150°$, $160°$, $170°$. *To som mohol vymenovať hneď na začiatku a nemusel som sa toľko trápiť s riešením rovníc.*

**U**: A čo keby riešením bol miliónuholník? Pri ktorom uhle by ťa už omrzelo vymenovávanie?

**Ž**: *Dobre, uznávam.*

**Úloha** :

*Určte taký konvexný n-uholník, ktorého veľkosti vnútorných uhlov sú po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti, najmenší vnútorný uhol má veľkosť* $126°$ *a každý nasledujúci uhol má veľkosť o* $4°$ *väčšiu než predchádzajúci uhol.*

**Výsledok**:

*Riešením je desaťuholník. (*$n = 18$ *nevyhovuje podmienke.)*

**Príklad 8**: *Súčin troch za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti sa rovná ich súčtu. Určte tieto členy, ak diferencia postupnosti je* $\frac{13}{3}$.

**Ž**: *Označím si prvý z tých troch členov ako* $x$. *Keďže ide o* **aritmetickú postupnosť**, *tak za ním bude nasledovať člen* $x+d$ *a za ním* $x+2d$, *kde* $d$ *je diferencia tejto postupnosti.*

**U**: Rozbehol si sa pekne. Ako budeš pokračovať?

**Ž**: *Súčet týchto členov je*

$$x + (x + d) + (x + 2d) = 3x + 3d.$$

*Ich súčin je*

$$x\cdot(x + d)\cdot(x + 2d) = \cdots$$

*Ajaj. To bude riadna fuška.*

**U**: Tak ja ti niečo poradím. Neznámou $x$ si označ prostredný z trojice členov a nie prvý.

**Ž**: *Dobre. Som zvedavý, či to bude na niečo dobré. Ak prostredné z tých troch čísel bude* $x$, *tak pred ním bude číslo* $x-d$ *a za ním* $x+d$.

**U**: Pokračuj tak, ako predtým. Vyjadri si ich súčet a súčin.

**Ž**: *Takže súčet je*

$$(x - d) + x + (x + d) = 3x$$

*a ich súčin*

$$(x - d)\cdot x\cdot(x + d) = x\cdot(x^2 - d^2).$$

**U**: Dobre. Súčet sa má rovnať súčinu, takže dostaneme rovnicu:

$$3x = x\cdot(x^2 - d^2).$$

Vedel by si ju vyriešiť?

**Ž**: *Neznámu* $x$ *mám na oboch stranách rovnice, tak ňou vydelím. Potom osamostatním* $x^2$ *na jednej strane rovnice. Je to v rámčeku:*

$$\boxed{\begin{aligned} 3x &= x\cdot(x^2 - d^2) \ /:x \\ 3 &= x^2 - d^2 \ / + d^2 \\ x^2 &= 3 + d^2 \end{aligned}}$$

**U**: Delil si neznámou $x$, takže si predpokladal, že je nenulová. Po vyriešení rovnice budeš musieť preveriť možnosť, že $x = 0$. Pokračuj.

**Ž**: *Dosadím za diferenciu hodnotu* $\frac{13}{3}$, *vyčíslim* $x^2$ *a nakoniec odmocním:*

$$x^2 = 3 + \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{27}{9} + \frac{169}{9} = \frac{196}{9},$$

$$x^2 = \frac{196}{9} \qquad \Rightarrow \qquad |x| = \frac{14}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\frac{14}{3}.$$

*Vyšlo mi, že zadaniu vyhovujú dve rôzne hodnoty pre prostredný člen:* $\frac{14}{3}$ *alebo* $-\frac{14}{3}$.

**U**: A vyčerpal si všetky možnosti? Nezabudni, že si pri úprave rovnice delil premennou $x$. Ale čo ak je $x = 0$?

**Ž**: *Tak by som $x$-kom nemohol deliť.*

**U**: To je pravda. Ale $x = 0$ je tiež riešením. Ak prostredný člen je 0 a diferencia je $\frac{13}{3}$, tak vypočítať jeho predchádzajúci a nasledujúci člen nie je ťažké.

**Ž**: *Naozaj. Skúsim to zhrnúť:*

- *ak* $x = 0$ *tak* $x - d = -\frac{13}{3}$ *a* $x + d = +\frac{13}{3}$,
- *ak* $x = \frac{14}{3}$ *tak* $x - d = \frac{14}{3} - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}$ *a* $x + d = \frac{14}{3} + \frac{13}{3} = \frac{27}{3} = 9$,
- *ak* $x = -\frac{14}{3}$ *tak* $x - d = -\frac{14}{3} - \frac{13}{3} = -\frac{27}{3} = -9$ *a* $x + d = -\frac{14}{3} + \frac{13}{3} = -\frac{1}{3}$.

**Úloha má 3 riešenia.** *Zadaniu vyhovujú aritmetické postupnosti s členmi:*
$\left\{-\frac{13}{3}, 0, +\frac{13}{3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, 9\right\}$ *a* $\left\{-9, -\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}, \right\}$.

**U**: Dobre. V príkladoch, v ktorých je daná informácia o súčte nepárneho počtu za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti, je jednoduchšie označiť si neznámou prostredný z týchto členov.

**Úloha** :

*Pre ktoré tri za sebou idúce celé čísla platí, že ich súčin sa rovná ich súčtu?*

**Výsledok**:

*Môžu to byť čísla:* $\{1, 2, 3\}$, $\{-3, -2, -1\}$ *alebo* $\{-1, 0, 1\}$.

**Príklad D1**: *Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *s prvým členom* $a_1$ *a diferenciou* $d$ *platí pre jej* $n$*-tý člen vzorec*

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

**U**: Vzorec pre $n$-tý člen aritmetickej postupnosti sa využíva v mnohých príkladoch. Jeho platnosť dokážeme ***matematickou indukciou***.

**Ž**: *Dobre.* **1.krok:** *Overíme, či vzorec platí pre prvý člen postupnosti:*
*Pre* $n = 1$ *bude vzťah* $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ *vyzerať takto:*

$$a_1 = a_1 + (1-1)\cdot d = a_1 + 0\cdot d = a_1.$$

*A to je pravda.*

**U**: Áno. V druhom kroku predpokladáme, že vzorec platí pre nejaké $n$ a preveríme jeho platnosť aj pre $n+1$. Ukážeme, že z platnosti vzorca pre člen $a_n$ vyplýva platnosť vzorca pre nasledujúci člen $a_{n+1}$.

**Ž**: **2.krok:** *Pripravím si teda vzorce pre členy* $a_n$ *a* $a_{n+1}$*:*

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ ... *platnosť tohto vzťahu je indukčným predpokladom,*
$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)\cdot d = a_1 + n\cdot d$ ... *to je indukčné tvrdenie.*

**U**: Dobre. Vieme, že v aritmetickej postupnosti sa každý nasledujúci člen líši od predchádzajúceho o jednu diferenciu. Využi to, že člen $a_{n+1}$ dostaneme ako súčet diferencie $d$ a člena $a_n$. Potom dosaď za člen $a_n$ vyjadrený predpis.

**Ž**: *Takže:*

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)\cdot d + d = a_1 + n\cdot d - d + d = a_1 + n\cdot d.$$

**U**: Výborne. Využil si indukčný predpoklad a dokázal si platnosť indukčného tvrdenia. Dôkaz je hotový. Dokázal si, že ak vzorec platí pre nejaké prirodzené číslo $n$, tak bude platiť aj pre $n+1$.

**Úloha 1**:
*Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí medzi jej* $r$*-tým a* $s$*-tým členom vzťah:*

$$a_s = a_r + (s-r)\cdot d.$$

*(návod: dôkaz priamy – členy* $a_s$ *a* $a_r$ *pomocou vzťahu pre* $n$*-tý člen nahradíte výrazmi obsahujúcimi* $a_1$ *a príslušné násobky diferencie.)*

**Úloha 2**:
*Dokážte, že od druhého člena je každý člen aritmetickej postupnosti aritmetickým priemerom svojich susedných členov. (návod: dôkaz priamy – členy* $a_{n-1}$ *a* $a_{n+1}$ *pomocou vzťahu pre* $n$*-tý člen nahradíte výrazmi obsahujúcimi* $a_1$ *a príslušné násobky diferencie.)*

**Príklad D2**: *Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí pre súčet prvých* $n$ *členov vzorec*

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n).$$

**U**: Platnosť tohto vzorca dokážeme ***matematickou indukciou***.

**Ž**: *Prvý krok zvládnem urobiť sám, nie je náročný.*

**1.krok:** *Ak* $n = 1$, *tak vzorec pre súčet* $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$ *vyzerá takto:*

$$s_1 = \frac{1}{2}\cdot(a_1 + a_1) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot a_1 = a_1.$$

*A to je pravda, lebo ak mám len jeden člen, tak súčet bude pozostávať len z toho jedného sčítanca.*

**U**: V poriadku. Prejdeme na druhý krok. Dokážeme, že z platnosti vzorca pre $s_n$ vyplynie platnosť vzorca pre $s_{n+1}$.

**Ž**: **2.krok:** *Dobre, pripravím si predpisy pre* $s_n$ *a* $s_{n+1}$*:*

$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$, ... *indukčný predpoklad,*

$s_{n+1} = \frac{n+1}{2}\cdot(a_1 + a_{n+1})$ ... *indukčné tvrdenie.*

**U**: Aký je vzťah medzi týmito dvoma súčtami?

**Ž**: *Líšia sa o člen* $a_{n+1}$. *Súčet* $s_{n+1}$ *dostaneme tak, že k súčtu* $s_n$ *pripočítame* $a_{n+1}$*:*

**U**: A z toho budeme vychádzať. Pre súčet $s_n$ využijeme platnosť indukčného predpokladu:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) + a_{n+1} = \cdots$$

Člen $a_{n+1}$ si napíšeme ako súčet jeho dvoch polovíc. Pre jednu z týchto dvoch polovíc využijeme vzorec pre $n$-tý člen aritmetickej postupnosti:

$$\cdots = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) + \frac{1}{2}\cdot a_{n+1} + \frac{1}{2}\cdot a_{n+1} = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) + \frac{1}{2}\cdot(a_1 + n\cdot d) + \frac{1}{2}\cdot a_{n+1} = \cdots$$

Máš nejaký nápad ako by sme mohli pokračovať?

**Ž**: *Nie, nechám čarovať vás.*

**U**: Tak ja roznásobím druhú zátvorku jednou polovicou a potom ešte vyberiem pred zátvorku násobok $\frac{n}{2}$:

$$\cdots = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) + \frac{1}{2}\cdot a_1 + \frac{n}{2}\cdot d + \frac{1}{2}\cdot a_{n+1} = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n + d) + \frac{1}{2}\cdot a_1 + \frac{1}{2}\cdot a_{n+1} = \cdots$$

Pozri sa na zátvorku v poslednom výraze. Čo tam vzniklo?

**Ž**: *Súčet* $a_n + d$ *je predsa* $a_{n+1}$. *A ešte sa dá vybrať pred zátvorku* $\frac{1}{2}$ *z prostredného a posledného člena celého výrazu.*

**U**: Výborne. Tak to aj urobíme:

$$\cdots = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_{n+1}) + \frac{1}{2}\cdot(a_1 + a_{n+1}) = \cdots$$

**Ž**: *Mohli by sme ešte vybrať pred zátvorku súčet* $a_1 + a_{n+1}$*:*

$$\cdots = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot(a_1 + a_{n+1}) = \frac{n+1}{2}\cdot(a_1 + a_{n+1}).$$

*Sláva. Hotovo. Dokázali sme, síce pracne, ale predsa, že z platnosti vzorca pre súčet* $s_n$ *vyplynie platnosť vzorca pre súčet* $s_{n+1}$.

**U**: Áno. Využil si indukčný predpoklad a dokázal si platnosť indukčného tvrdenia. Dôkaz platnosti vzorca pre súčet prvých $n$ členov aritmetickej postupnosti je hotový.