Transformácie grafu funkcie II

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: V tejto téme si povieme o ďalších transformáciách funkcií, teda o spôsoboch, ako pomocou grafov základných funkcií zostrojiť aj grafy tých zložitejších.
Ako prvý typ uvažujme funkcie s predpisom

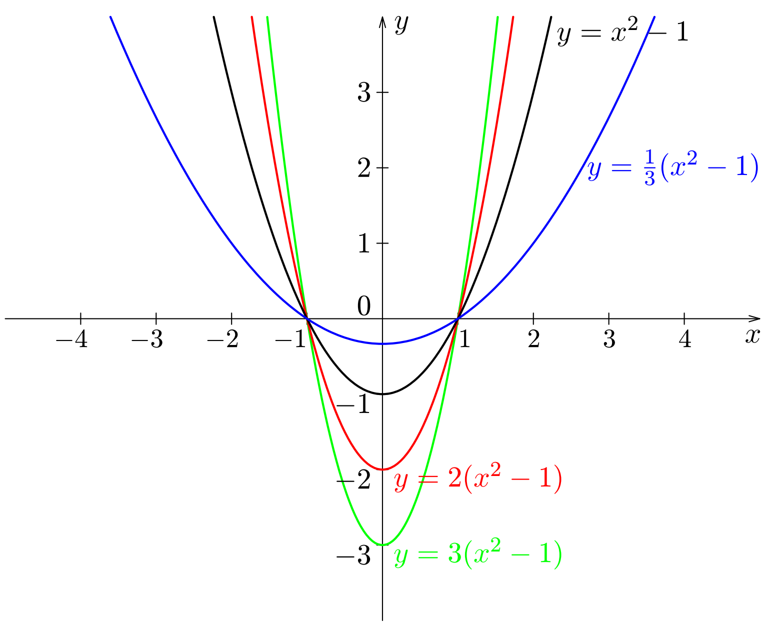
$$y = c \cdot f(x).$$

Ž: *Písmeno c predstavuje nejakú konštantu?*

U: Áno, zatiaľ uvažujme len $c > 0$. Na nasledujúcom obrázku sú znázornené grafy funkcií

$$f : y = x^2 - 1, \quad g : y = 2(x^2 - 1), \quad h : y = \frac{1}{3}(x^2 - 1), \quad i : y = 3(x^2 - 1)$$

Skús povedať, čím sa odlišujú a čo majú spoločné.



Ž: *Vo všetkých prípadoch ide o kvadratické funkcie, teda grafmi sú paraboly. Každá je však iná. Ak za základ vezmem čierny graf funkcie $f : y = x^2 - 1$, tak vidím, že graf funkcie $g : y = 2(x^2 - 1)$ je oproti tomu „užšia“ parabola a graf funkcie $i : y = 3(x^2 - 1)$ je ešte užší.*

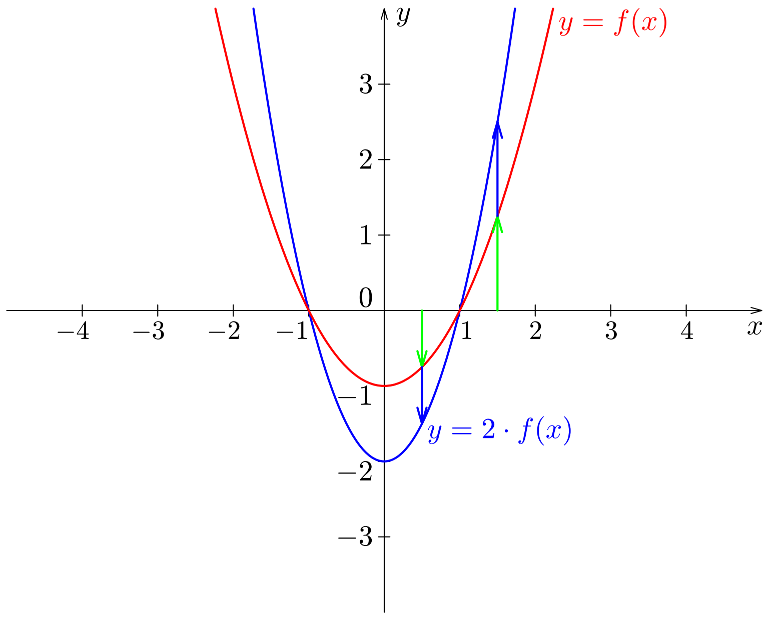
U: Zároveň vidíme, že sa paraboly „natiahli“, pretože pôvodný vrchol $[0; -1]$ sa posunul do bodu $[0; -2]$, resp. $[0; -3]$.

Ž: *Sú tam však aj body, ktoré sú spoločné pre všetky grafy, a to priesečníky s osou x.*

U: Sú to vlastne nulové body funkcie f. Vedel by si vysvetliť, prečo každý graf funkcie typu $y = c \cdot f(x)$ bude prechádzať týmito bodmi?

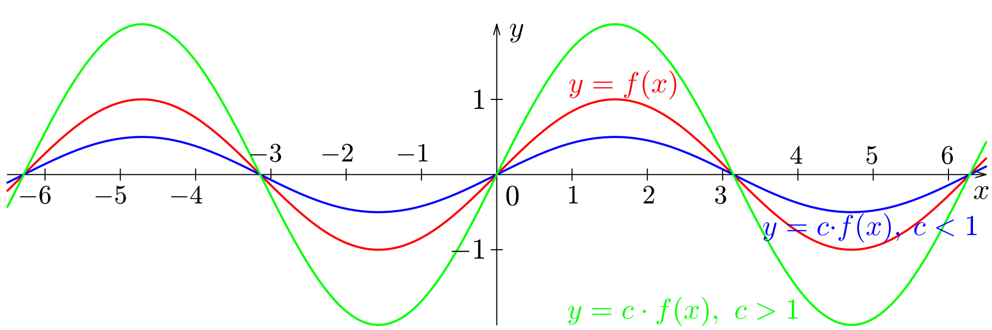
Ž: *To je jasné, v priesečníku s osou x nadobúda funkcia f hodnotu nula. No a nula vynásobená akýmkoľvek číslom c je zase len nula, preto to bude nulový bod aj pre funkciu $y = c \cdot f(x)$.*

U: Výborne, môžeme teda povedať, že dochádza k transformácii grafu funkcie pozdĺž osi y, k akémusi „rozšíreniu" grafu, ak $c > 1$. Na ďalšom obrázku máme naznačené, ako funkcia $g : y = 2f(x)$ v každom bode nadobúda dvojnásobnú hodnotu než funkcia f. Najprv zelená šípka ukazuje, ako ľubovoľnému bodu priradíme hodnotu $f(x)$ a potom modrá šípka ukazuje, ako túto hodnotu zdvojnásobíme.



Ž: *A ja som si všimol, že tam, kde sme mali predtým zostrojený graf funkcie $h : y = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$, došlo k opačnej zmene. Tam sa graf v smere osi y-ovej trojnásobne „sploštil". Je to preto, že koeficient c bol menší ako 1?*

U: Máš pravdu, ale pripomínam, že zároveň bol väčší ako nula. Teda zhrnieme to takto:
Graf funkcie $y = c \cdot f(x)$, $c > 0$ získame deformáciou grafu funkcie $y = f(x)$ pozdĺž osi y, pre $c > 1$ jeho c-násobným „rozšírením", pre $0 < c < 1$ jeho $\frac{1}{c}$-násobným „zúžením".
Na obrázku máme túto situáciu ilustrovanú:

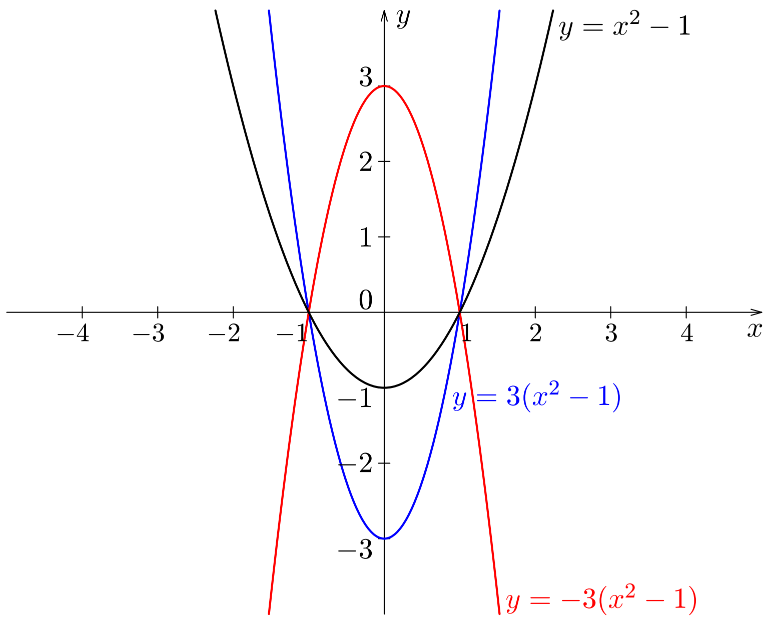


U: Zmenilo by sa niečo, ak by sme uvažovali o funkciách $y = c \cdot f(x)$, kde $c \leqq 0$?

Ž: *Pre $c = 0$ je situácia jednoduchá, pretože by vznikla konštantná funkcia $y = 0$. Jej grafom je os x a je to vlastne nezaujímavý prípad.*

U: Súhlasím s tebou.

Ž: *Pre $c < 0$ je to už zložitejšia situácia. Ale napríklad graf funkcie $y = -3(x^2 - 1)$ by som zostrojil tak, že najprv by som zostrojil graf funkcie $y = 3(x^2 - 1)$ tak, ako sme o tom hovorili pred chvíľou, teda trojnásobným rozšírením grafu $y = x^2 - 1$ pozdĺž osi y. A potom by som graf preklopil podľa osi x, pretože viem, že grafy funkcií $y = f(x)$ a $y = -f(x)$ sú osovo súmerné podľa osi x. Vyzeralo by to takto:*



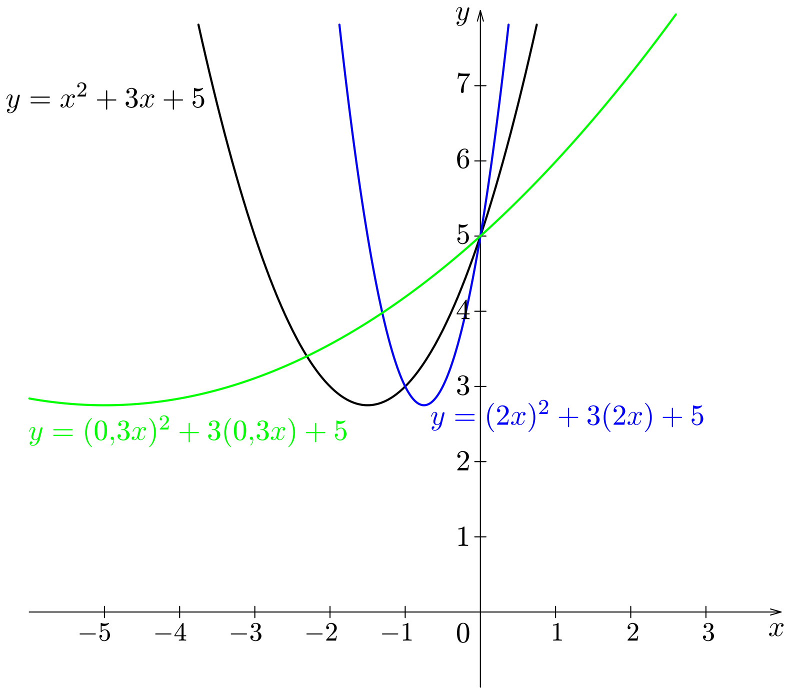
U: Teda grafy zložených funkcií budeme zostrojovať viacerými krokmi a použijeme pri tom postupne niekoľko transformácií.

U: Uvažujme teraz o ďalšom type, ktorým budú funkcie s predpisom

$$y = f(d \cdot x), \qquad d > 0.$$

Čo je pre ne charakteristické? Skús to odhaliť na základe nasledujúceho obrázka. Sú na ňom grafy funkcií

$$f : y = x^2 + 3x + 5, \quad g : y = (2x)^2 + 3 \cdot (2x) + 5, \quad h : y = (0{,}3x)^2 + 3 \cdot (0{,}3x) + 5.$$



Ž: *Prvé, čo som si všimol je to, že všetky grafy sa pretínajú v jednom bode na osi* y*.*

U: Áno, ak budeme vychádzať z čierneho grafu funkcie $y = f(x)$, tak tento priesečník s osou y má súradnice $[0; f(0)]$. Lenže pre všetky ostatné funkcie typu $y = f(d \cdot x)$ platí, že

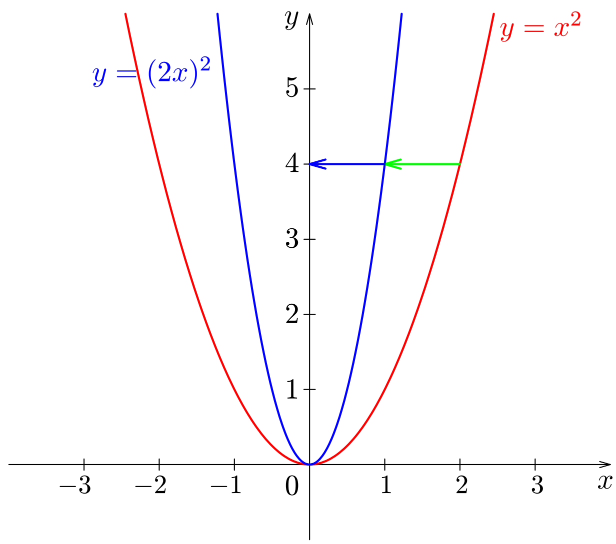
$$y(0) = f(d \cdot 0) = f(0),$$

teda pretnú os y-ovú v tom istom bode.

Ž: *Pokiaľ ide o tvar grafov, tak sa paraboly opäť natiahli alebo zúžili, ale tentoraz vzhľadom na os* x*-ovú.*

U: Pritom si treba všimnúť, že pre $d > 1$ dochádza k zúženiu grafu, pre $d < 1$ k jeho rozšíreniu. Môžeme to vidieť aj na nasledujúcom obrázku, kde máme grafy funkcií

$$f : y = x^2, \qquad g : y = (2x)^2.$$



Všimni si bod so súradnicami $[2; 4]$, ktorý leží na grafe funkcie f, pretože

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Ž: *Aha, a tento bod sa pri transformácii posunie do bodu* $[1; 4]$*, pretože*

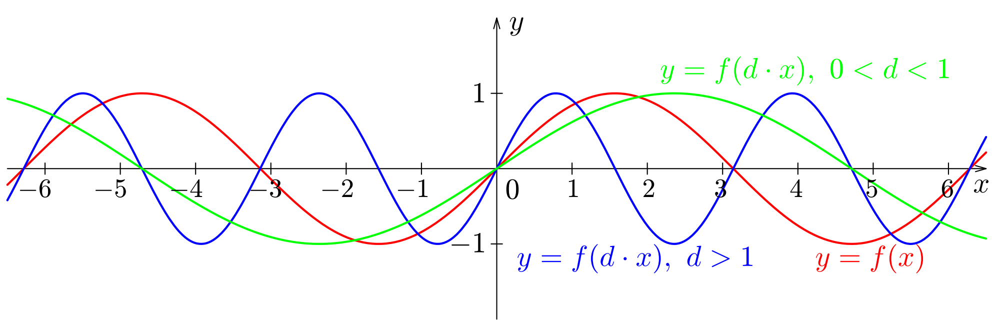
$$g(1) = (2 \cdot 1)^2 = 4.$$

Preto bude graf funkcie g užší než graf funkcie f.

U: Môžeme teda zhrnúť:

Graf funkcie $y = f(d \cdot x)$, $d > 0$ ***získame deformáciou grafu funkcie*** $y = f(x)$ ***pozdĺž osi*** x***, pre*** $d > 1$ ***jeho*** d ***- násobným „zúžením“, pre*** $0 < d < 1$ ***jeho*** $\frac{1}{d}$ ***- násobným „rozšírením“.***

Na ďalšom obrázku máme túto situáciu ilustrovanú:



Pôvodný graf $y = f(x)$ je nakreslený červenou farbou. Z neho získame modrý graf $y = f(d \cdot x)$, $d > 1$ zúžením, alebo tiež môžeme povedať, že „zhustením“ grafu pozdĺž osi x. Ale ak v predpise funnkcie $y = f(d \cdot x)$ bude $0 < d < 1$, tak sa graf rozšíri pozdĺž osi x, tak ako to vidíme na zelenom grafe.

U: Napokon nám ešte ostala posledná transformácia, a tou sú grafy funkcií s absolútnymi hodnotami. Najprv si zopakujme, čo to vlastne je absolútna hodnota čísla.

Ž: *Označujeme ju $|x|$ a funguje to tak, že ak je číslo x kladné, tak $|x| = x$ a ak je číslo x záporné, tak $|x| = -x$, teda číslo opačné.*

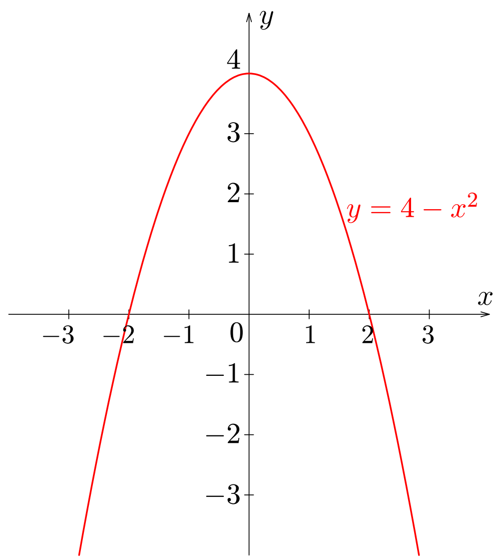
U: Pozabudol si na nulu.

Ž: *To je triviálne, absolútna hodnota nuly je nula.*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x \geqq 0 & \Rightarrow & |x| = x \\ x < 0 & \Rightarrow & |x| = -x \end{array}}$$

U: Dobre, ja len pripomeniem geometrický význam absolútnej hodnoty – určuje vzdialenosť obrazu čísla na číselnej osi od obrazu čísla nula.
Teraz by si mal vyriešiť takýto problém – na obrázku máš nakreslený graf funkcie

$$f : y = 4 - x^2.$$



Tvojou úlohou je dokresliť v ňom graf funkcie $g : y = |4 - x^2|$.

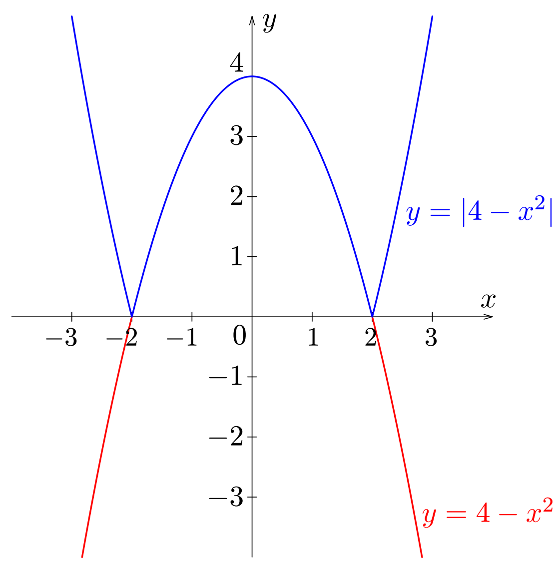
Ž: *Neviem si to celkom predstaviť, tak si najprv radšej urobím tabuľku s niekoľkými hodnotami:*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12
$g(x)$	12	5	0	3	4	3	0	5	12

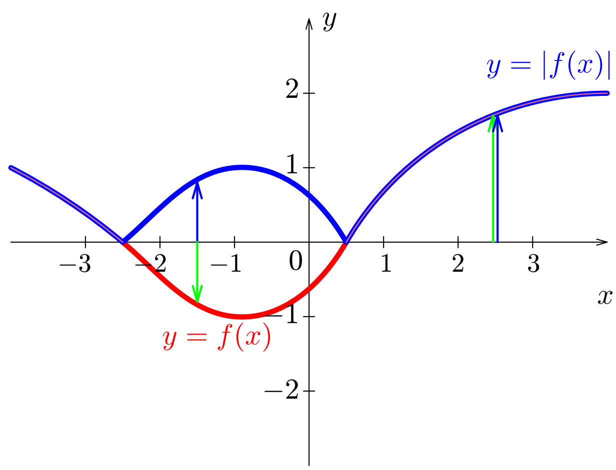
Už do toho začínam vidieť. Tam, kde funkcia f nadobúdala kladné hodnoty sa nič nezmení, pretože absolútna hodnota z kladného čísla je to isté číslo. Ale tam, kde $f(x)$ bolo záporné, bude $g(x)$ kladné, lebo absolútna hodnota vlastne zmení znamienko.

U: Dobre, ako to teda nakreslíš?

Ž: *Bude to vyzerať tak, že časť grafu, ktorá ležala nad osou x-ovou sa nezmení, ale tá časť, ktorá ležala pod osou x-ovou sa preklopí podľa osi x-ovej nahor. Výsledok je takýto:*



U: Výborne. Zhrnieme teda aj túto poslednú transformáciu:
Graf funkcie** $y = |f(x)|$ **splýva s tou časťou grafu funkcie** $y = f(x)$**, kde** $f(x) \geqq 0$**. Tam, kde** $f(x) < 0$**, je graf funkcie** $y = |f(x)|$ **osovo súmerný s grafom funkcie** $y = f(x)$ **podľa osi** x**-ovej.
Situáciu vidíme na ďalšom obrázku:



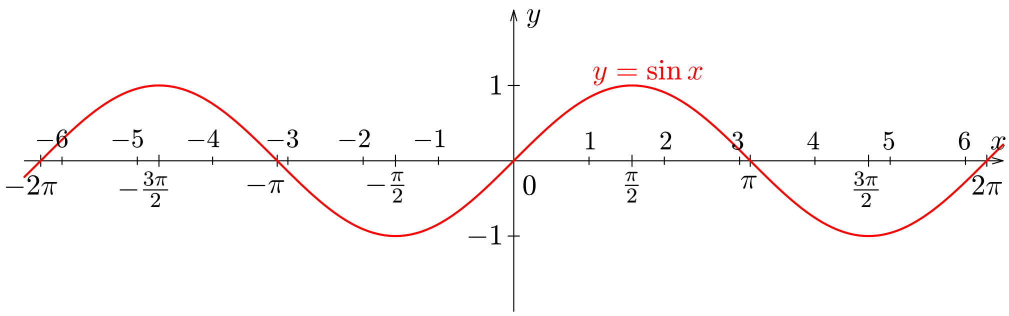
Zelená šípka naznačuje hodnotu pôvodnej funkcie v ľubovoľnom bode, modrá šípka ukazuje, ako situáciu zmení absolútna hodnota.

U: Na záver len dodám, že ak by sme mali zostrojiť grafy zložitejších funkcií s absolútnymi hodnotami, napríklad

$$y = x^2 - 2 \cdot |x| + 3, \quad y = \big|x - |x - 1|\big|, \quad y = |x + 3| - |x - 2|\,,$$

tak buď použijeme postupne niekoľko transformácií grafu, alebo rozdelíme úlohu na viacero častí podľa toho, či výrazy v absolútnych hodnotách sú nezáporné alebo záporné.

Príklad 1: *Daný je graf funkcie* $y = \sin x$.



Načrtnite pomocou neho grafy funkcií

$$y = \sin(2x), \quad y = 3\sin x, \quad y = |\sin x|\,.$$

U: Pri riešení tejto úlohy môžeme výhodne využiť naše vedomosti o transformáciách funkcií. Začni prvou funkciou

$$y = \sin(2x).$$

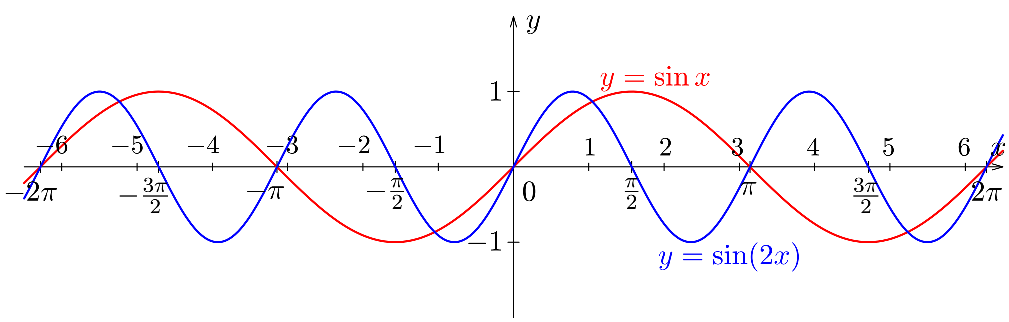
Ž: *Myslím, že dvojka v predpise funkcie spôsobí to, že graf bude dvakrát „hustejší“ ako pôvodný.*

U: Skúsme si to overiť na nejakých hodnotách.

Ž: *Tak napríklad na grafe funkcie* $y = \sin x$ *vidím, že v bode* $\frac{\pi}{2}$ *nadobúda hodnotu* 1. *Ale nová funkcia bude jednotku nadobúdať už v bode* $\frac{\pi}{4}$, *pretože* $\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$.

U: Máš pravdu, takže môžeš nakresliť graf funkcie $y = \sin(2x)$ do toho istého obrázka, aby sme videli rozdiel.

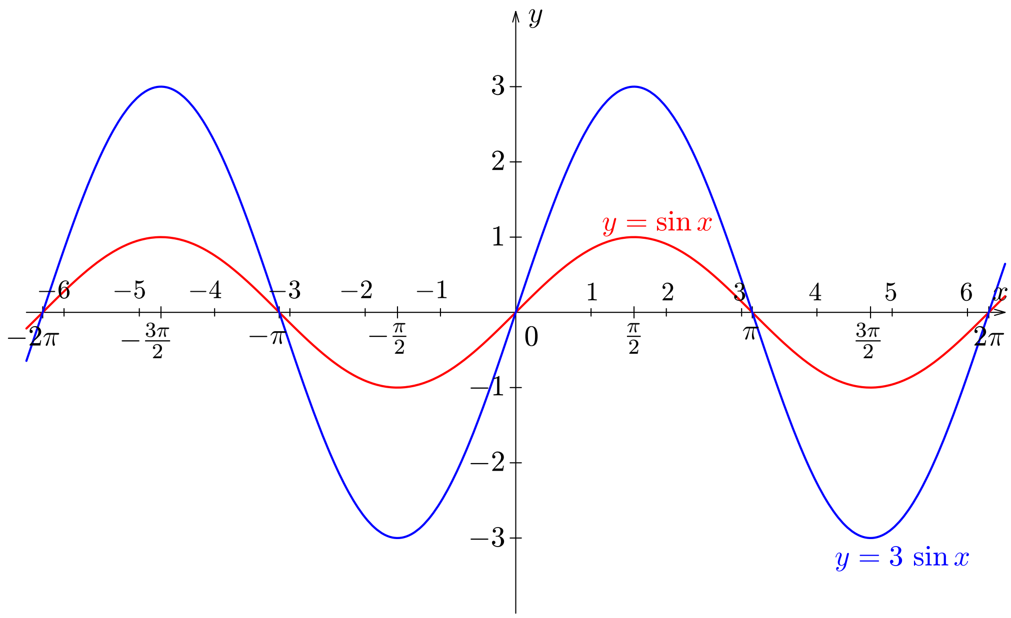
Ž: *Tu je to:*



U: Dobre, poďme na ďalšiu funkciu, tou je

$$y = 3\sin x.$$

Ž: *V tomto prípade platí, že v každom bode bude hodnota funkcie trikrát väčšia ako u pôvodnej funkcie, preto sa graf trojnásobne natiahne v smere osi y-ovej. Takže to vyzerá takto:*

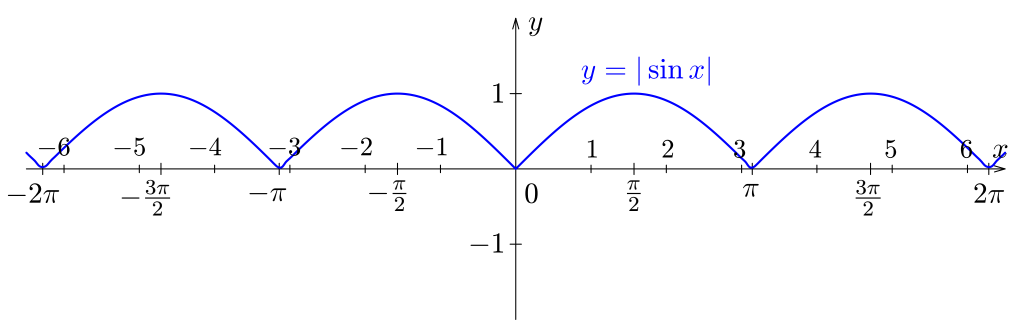


U: Ja len pripomeniem, že body, ktoré nezmenia pri tom svoju polohu sú priesečníky grafu s osou x.

Ž: *Ostáva mi ešte načtrnúť posledný graf, a to funkciu*

$$y = |\sin x|\,.$$

Viem, že absolútna hodnota z kladného čísla je to isté číslo, preto sa tie „polvlnky“ zo sínusoidy, ktoré ležia nad osou x, nemenia. Ale absolútna hodnota zo záporného čísla je číslo k nemu opačné, čiže „polvlnky“ ležiace pod osou x sa preklopia nahor podľa tejto osi. A vzniknú takéto „kopčeky“:

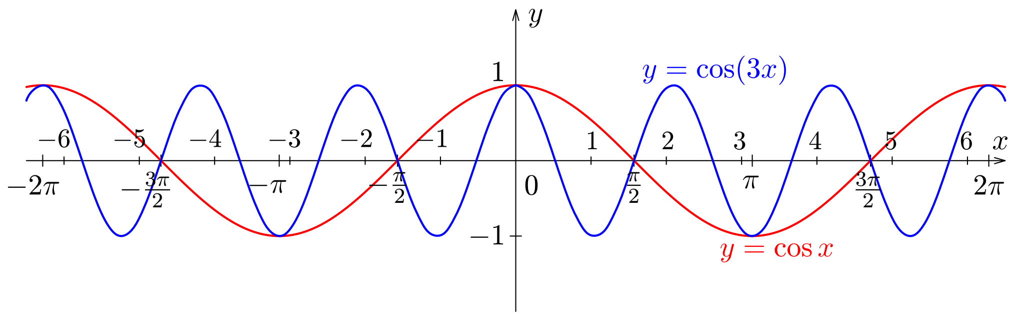


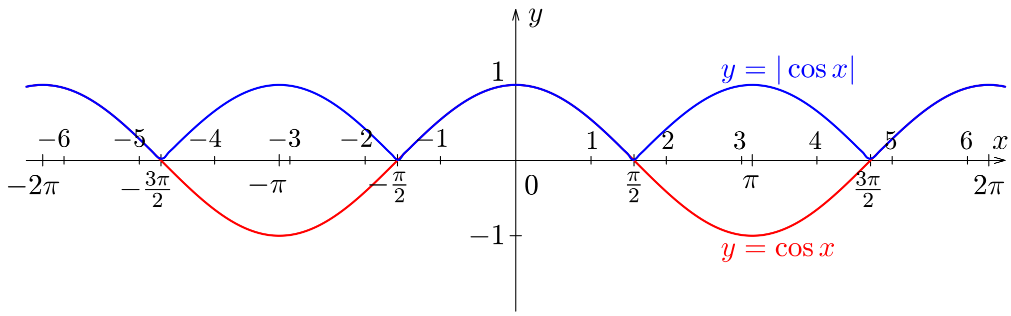
U: Výborne.

Úloha 1: *Zostrojte grafy funkcií $f_1 : y = \cos 3x$ a $f_2 : y = |\cos x|$ pomocou grafu funkcie $f : y = \cos x$.*

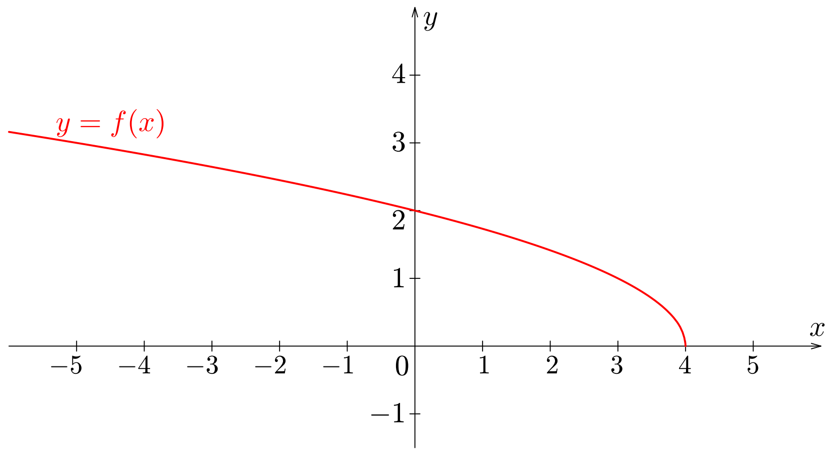
Výsledok:

VaFu11-1		List 10





Príklad 2: *Daný je graf funkcie f:*



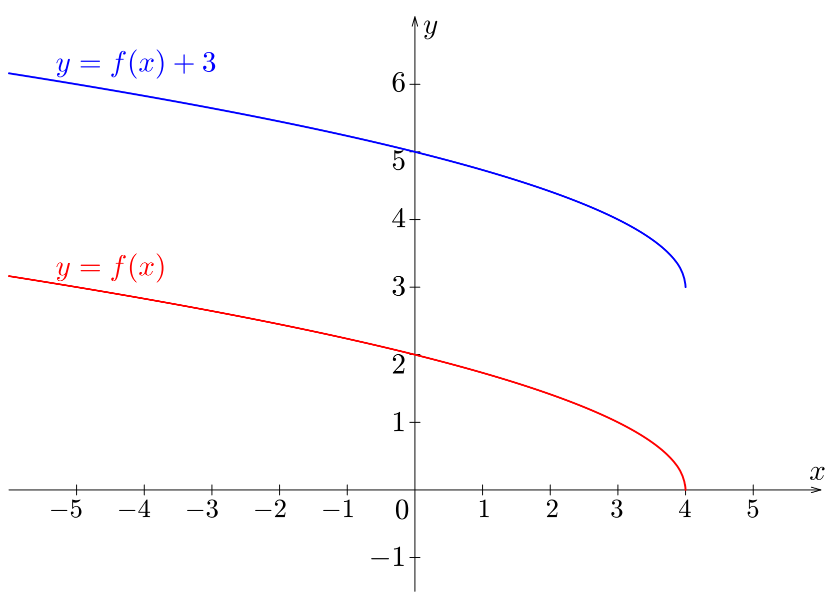
Zostrojte grafy funkcií $g: y = f(x) + 3,\ \ h: y = 2 \cdot f(x)$.

Ž: *Taký zvláštny graf, čo je to za funkciu?*

U: Vyzerá to ako polovica paraboly, otočená o 90°. Takže by to mohla byť funkcia s druhou odmocninou v predpise. To však teraz pre nás nie je podstatné, pretože budeme pracovať len s grafom. Máš rozhodnúť, ako bude vyzerať graf funkcie

$$y = f(x) + 3.$$

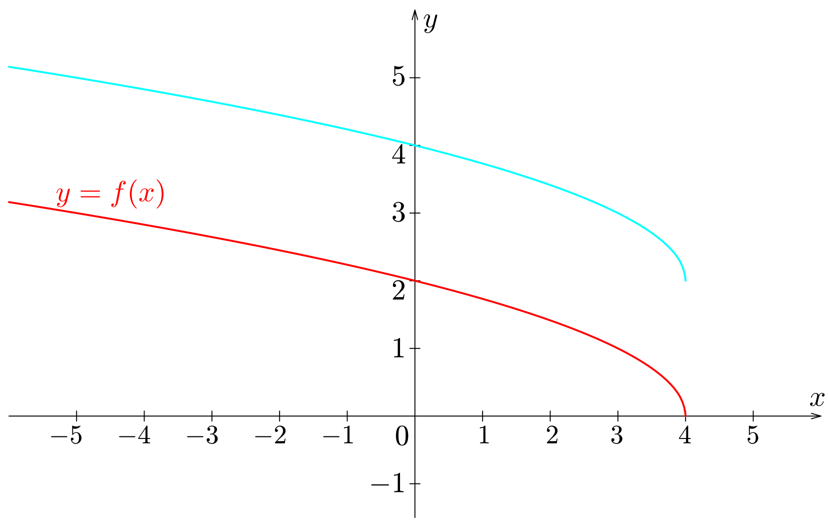
Ž: *To nie je také ťažké, pretože trojka na konci predpisu spôsobí to, že v každom bode bude mať funkcia hodnotu o* 3 *väčšiu ako pôvodná. Vlastne by sa dalo povedať, že sa každý bod na grafe posunie o tri dieliky nahor. Takže graf nebude začínať v bode* $[4; 0]$*, ale v bode* $[4; 3]$*. A os* y*-ovú nepretne v čísle* 2*, ale až v čísle* 5*. Celé to vyzerá takto:*



U: Máš pravdu, dôjde tu k posunutiu celého grafu o tri dieliky nahor v smere osi y-ovej.

U: Môžeš skúsiť druhú funkciu
$$y = 2 \cdot f(x).$$

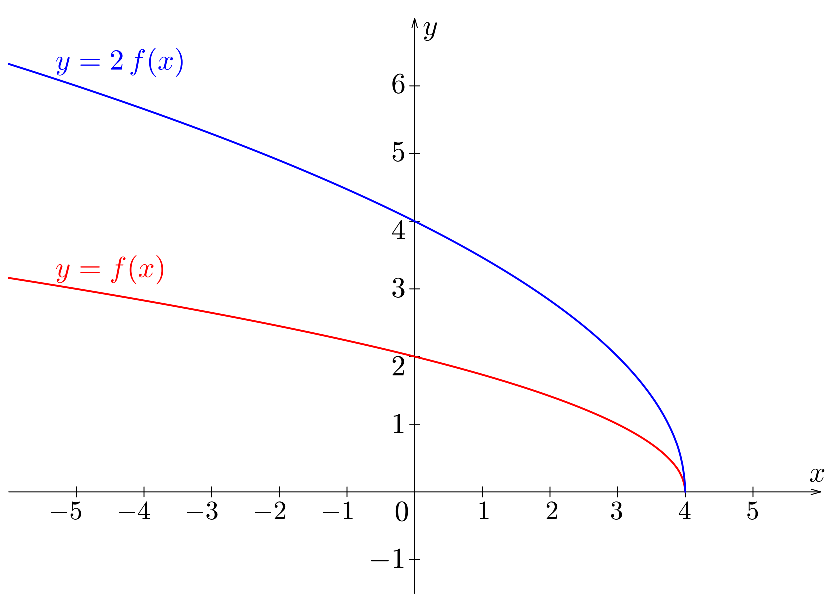
Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak mám vlastne hodnotu funkcie v každom bode vynásobiť dvomi. Takže napríklad v bode* 0 *nebude hodnota* 2*, ale až* 4*. Skúsim to nakresliť:*



U: Tak toto veru nebude dobre. Pozri sa na hodnotu funkcie v bode 4. Pôvodná funkcia tu mala hodnotu nula, čo po vynásobení dvomi dá opäť nulu.

Ž: *Takže nový graf bude začínať v tom istom bode? A ako potom bude vyzerať?*

U: Začal si dobrou úvahou o tom, že sa hodnota funkcie v každom bode zdvojnásobí. To ale znamená, že sa jej graf natiahne v smere osi y a to dvojnásobne. Preto výsledok bude takýto:



Príklad 3: *Načrtnite graf funkcie*

$$f : y = \Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|$$

využitím grafu funkcie $g : y = x - 1$.

Ž: *To teda vyzerá poriadne odstrašujúco, tri absolútne hodnoty v sebe!*

U: Neboj sa, výsledkom bude celkom pekný graf. Pri jeho zostrojovaní budeme postupovať pomaly, krok za krokom. Kde by si začal?

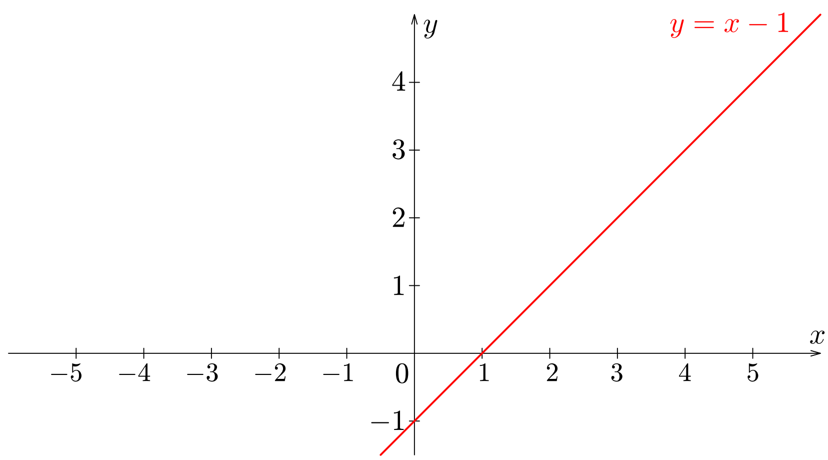
Ž: *Asi tam, kde mi káže zadanie, teda grafom funkcie*

$$g : y = x - 1.$$

To je jednoduchá lineárna funkcia, jej grafom je priamka a tak mi na jej zostrojenie stačia dva body. Napíšem si ich do tabuľky:

x	0	1
y	-1	0

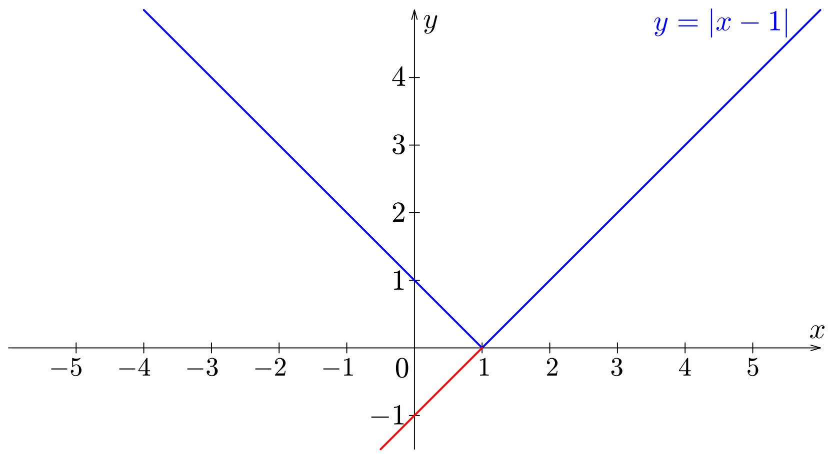
A môžem nakresliť graf:



U: Dobre, a teraz poďme ďalej. Ako druhý krok zostroj graf funkcie

$$y = |x - 1|\,.$$

Ž: *To je vlastne absolútna hodnota z predchádzajúcej funkcie. Teda tá časť grafu, ktorá bola pod osou x sa preklopí nahor podľa osi x a zvyšok ostane nezmenený. Vyzerá to takto:*



U: V ďalšom kroku odpočítame číslo 2, teda máme zostrojiť graf funkcie

$$y = |x-1| - 2.$$

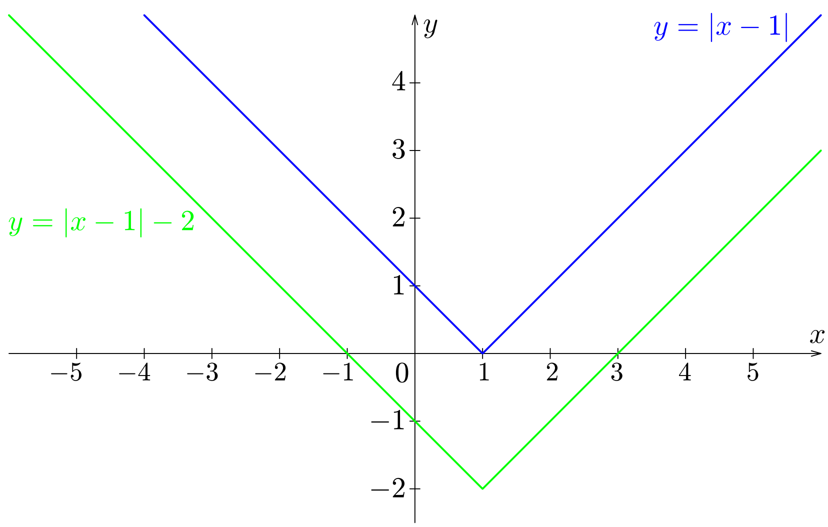
Ž: *Tak to už si neviem predstaviť. Urobím si tabuľku?*

U: Nemusíš, budeme pracovať len s grafmi, pričom využijeme šikovne transformácie grafov funkcií. Už máš zostrojený graf poslednej funkcie. Ako sa zmení tento graf, ak sme v predpise na koniec pridali mínus dva?

Ž: *Mohlo by to znamenať, že sa všetky hodnoty funkcie zmenšia o dva? Potom by sa vlastne celý graf posunul o dva dieliky!*

U: Máš pravdu, ja len upresním, že dôjde k posunutiu grafu funkcie v smere osi y o dva dieliky nadol.

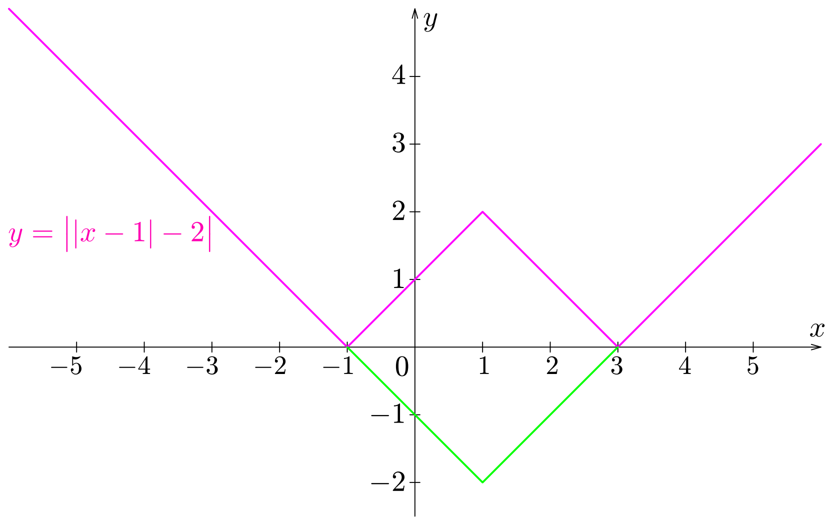
Ž: *Potom nový graf vyzerá takto:*



U: Vo štvrtom kroku opäť pridáme absolútnu hodnotu:

$$y = \big||x-1| - 2\big|.$$

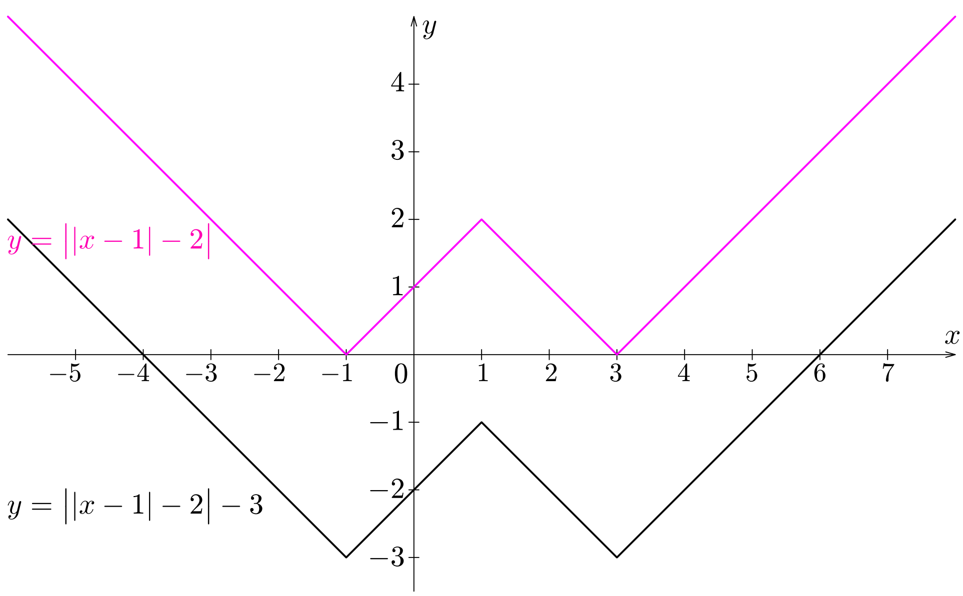
Ž: *To je ľahké, opäť preklopím tie časti posledného grafu, ktoré ležali pod osou x, vyzerá to takto:*



Ž: *Viete, že sa mi to začína celkom páčiť? Skúsim to dokončiť sám. Takže v piatom kroku pridám mínus trojku na koniec predpisu, teda budem mať funkciu*

$$y = \big||x-1|-2\big| - 3.$$

To ale znamená, že sa celý graf posunie o tri dieliky nadol pozdĺž osi y-ovej. Vyzerá to takto:

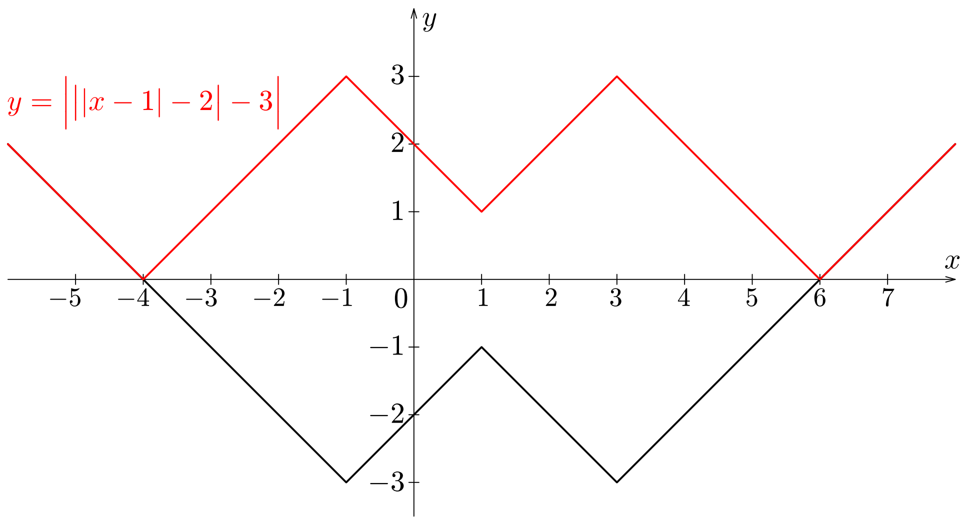


U: Dobre, pokračuj.

Ž: *No a v poslednom kroku to treba dať celé do absolútnej hodnoty, čiže*

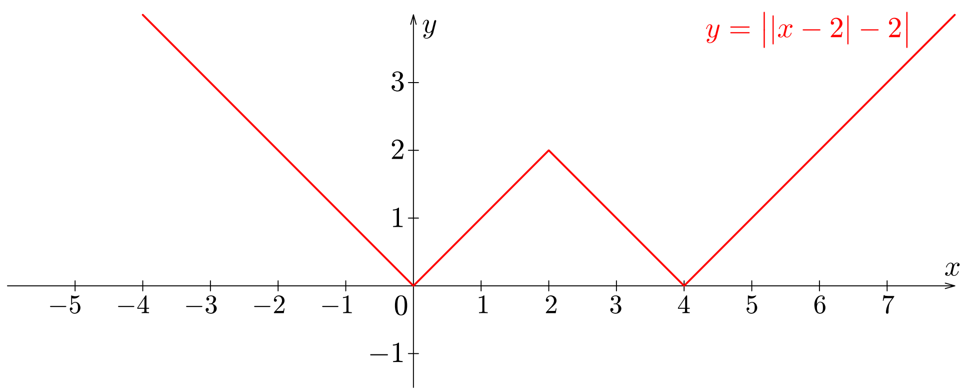
$$y = \Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|.$$

Ale to už tu bolo niekoľkokrát – preklopím „zápornú“ časť grafu osovo súmerne podľa osi x a tu je konečný výsledok:



Úloha 3: *Zostrojte graf funkcie $f : y = \big||x-2|-2\big|$.*

Výsledok:



Príklad 4: *Zostrojte grafy funkcií* $f : y = 3x - 5$ *a* $g : y = \log(x - 1)$. *Potom zostrojte grafy funkcií* $y = |f(x)|$ *a* $y = |g(x)|$.

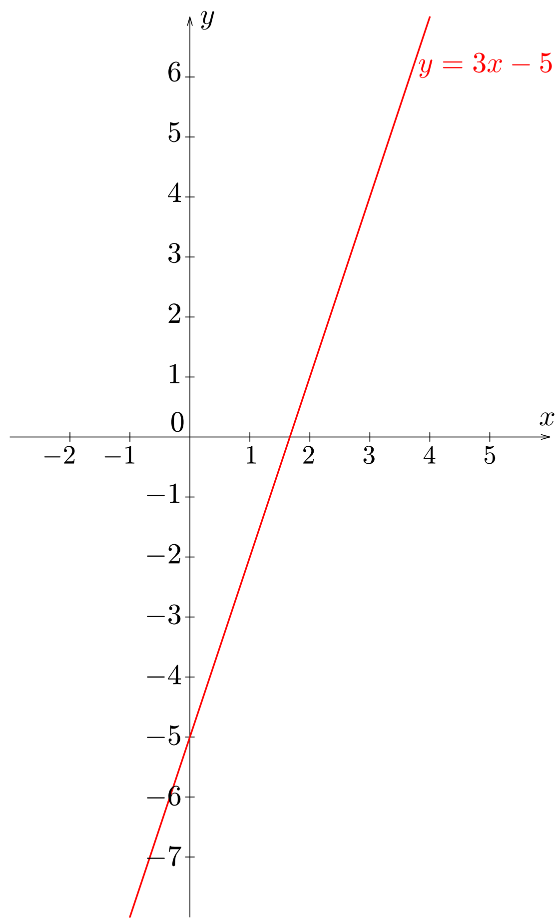
Ž: *S prvou funkciou*

$$f : y = 3x - 5$$

budem raz-dva hotový. Je to lineárna funkcia, jej grafom je priamka a na jej určenie mi stačia dva body. Pripravím si ich do tabuľky:

x	0	1
y	-5	-2

Potom môžem zostrojiť graf prechádzajúci bodmi $[0; -5]$ *a* $[1; -2]$*:*



U: Dobre, môžeš hneď pokračovať funkciou

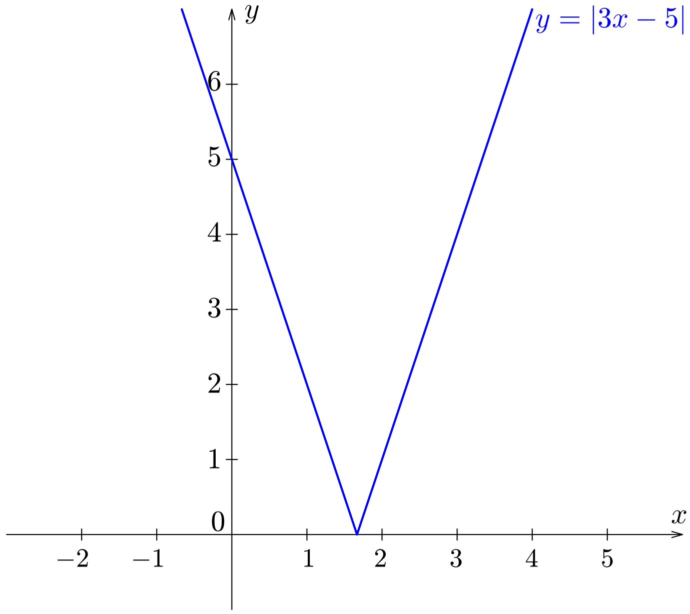
$$y = |f(x)| .$$

Ž: *To je vlastne funkcia* $y = |3x - 5|$ *a jej graf dostanem tak, že tú časť priamky, ktorá bola pod osou* x*-ovou zobrazím osovo súmerne podľa tejto osi.*

U: Vedel by si mi vysvetliť, prečo to treba takto urobiť?

Ž: *Súvisí to s absolútnou hodnotou. Tá všetkým kladným číslam priradí to isté číslo, ale všetkým záporným číslam priradí číslo k nim opačné. Preto sa napríklad bod* $[1; -2]$ *na našom prvom grafe zmení na bod* $[1; 2]$.

U: Presne tak, teda graf funkcie $y = |3x - 5|$ bude mať takýto tvar:



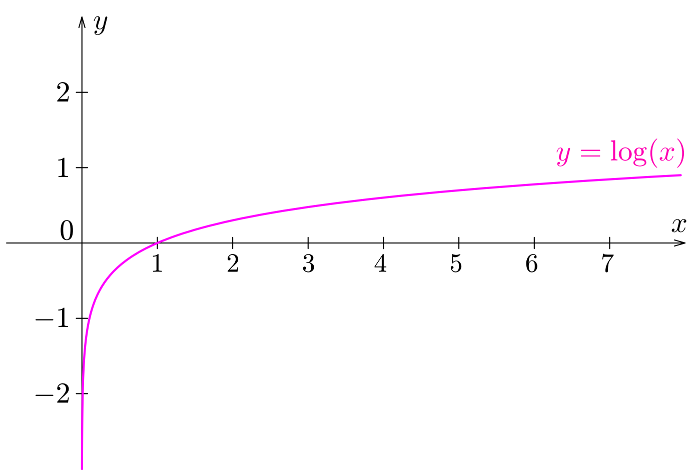
Ž: *Teraz by som mal prejsť na funkciu*

$$g : y = \log(x - 1),$$

to ale nebude také ľahké, lebo to nie je priamka.

U: Máš pravdu, nie je to priamka, ale krivka, hovorí sa jej aj logaritmická. Vedel by si ju načrtnúť pre prípad základnej funkcie $y = \log x$?

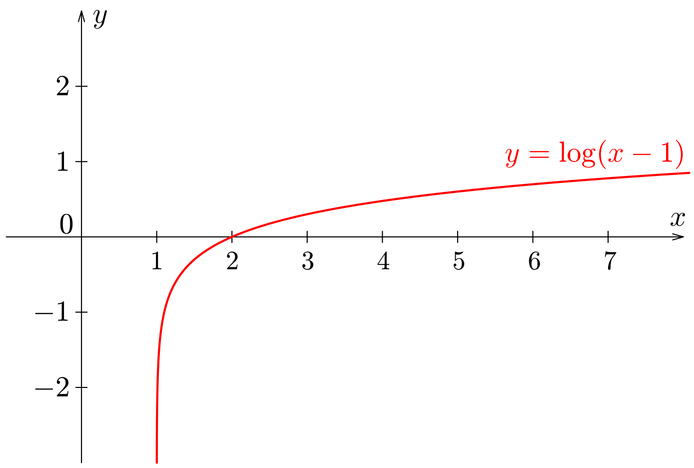
Ž: *Ak sa dobre pamätám, tak prechádza bodom* $[1; 0]$ *a má takýto priebeh:*



U: Áno, os y-ová je jej asymptotou, teda sa k nej graf približuje, ale nikdy sa jej nedotkne. Vráťme sa teraz k našej funkcii $g : y = \log(x-1)$. Jej graf bude posunutý o jeden dielik doprava v smere osi x-ovej. To preto, lebo hodnota funkcie g napríklad v bode 3 bude taká istá ako hodnota funkcie $y = \log x$ v bode 2. Hodnota funkcie g v bode 7 bude taká istá ako hodnota funkcie $y = \log x$ v bode 6.
Ukážeme si to na priesečníku s osou x. Už si povedal, že pre funkciu $y = \log x$ je to bod $[1; 0]$. No a pre funkciu g je to bod $[2; 0]$, pretože

$$g(2) = \log(2-1) = \log 1 = 0.$$

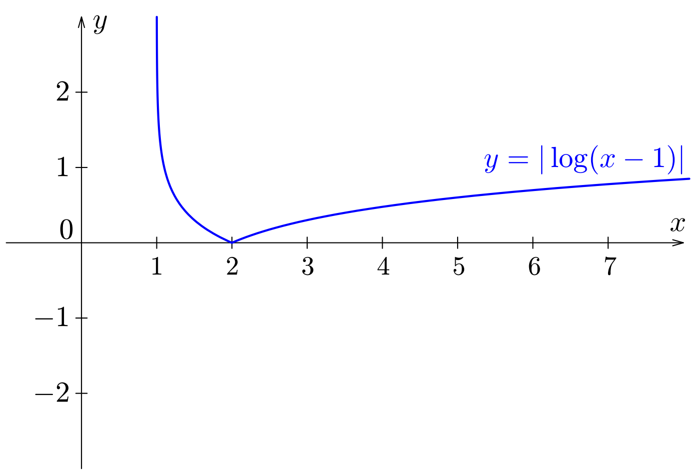
Teda graf funkcie g má takýto tvar:



Napokon ešte zostroj graf funkcie

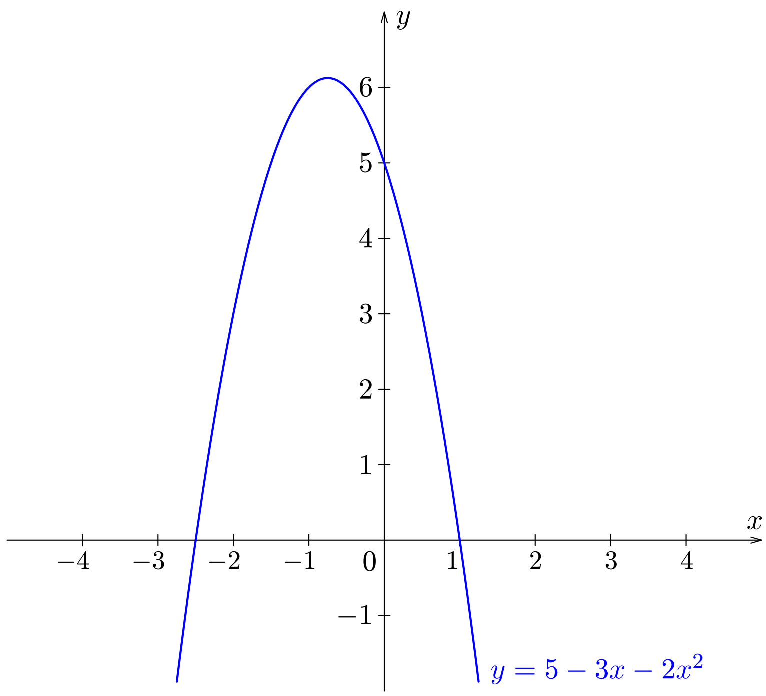
$$y = |g(x)|\,.$$

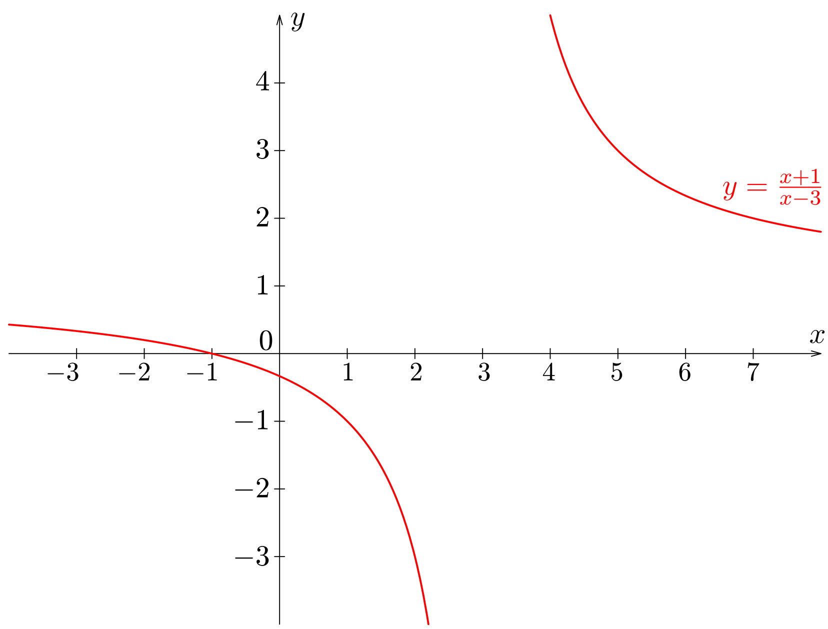
Ž: *To už nie je zložité, len musím dávať pozor na zakrivenie krivky. Tú časť, ktorá je pod osou x sa zobrazí osovo súmerne nahor a výsledok bude takáto zaujímavá krivka:*



U: V poriadku.

Príklad 5: *Na obrázkoch sú grafy funkcií* $f : y = 5 - x - 2x^2$ *a* $g : y = \dfrac{x+1}{x-3}$. *Zostrojte grafy funkcií* $f_1 : y = |f(x)|$ *a* $g_1 : y = |g(x)|$.





U: Najprv si zopakujme, čo je to absolútna hodnota čísla.

Ž: *Označujeme ju* $|x|$ *a má ten význam, že ak je číslo* x *nezáporné, tak* $|x| = x$ *a ak je číslo* x *záporné, tak* $|x| = -x$, *teda číslo opačné.*

U: Výborne. Ako sa na základe toho zmení graf funkcie f, ak dáme predpis funkcie do absolútnej hodnoty?

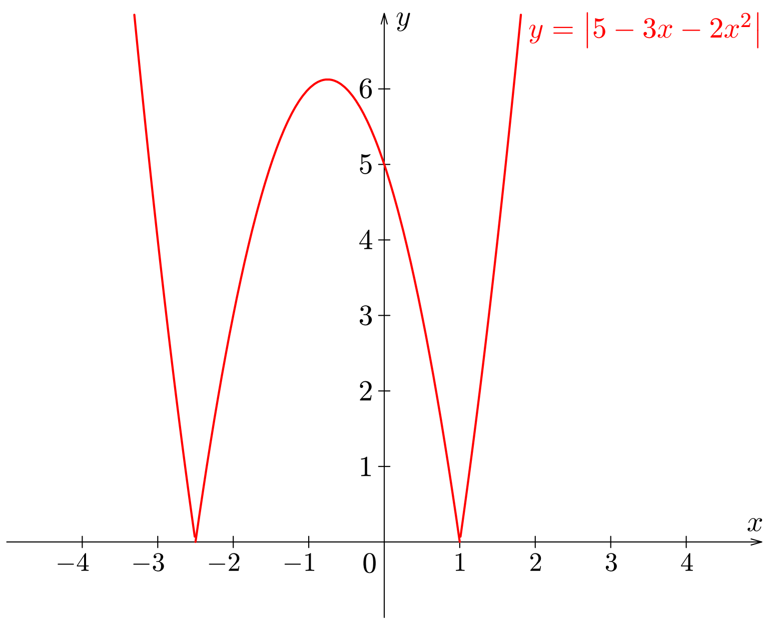
Ž: *Potom všetky body, ktoré mali zápornú druhú súradnicu, tu budú mať v tejto súradnici zmenené znamienko. A to sa prejaví tak, že sa zobrazia podľa osi x osovo súmerne.*

U: Teda celý graf sa zobrazí osovo súmerne?

Ž: *Nie celý, len tá časť, ktorá ležala pod osou x-ovou sa preklopí nahor. Tie body, ktoré ležali nad ňou, a teda mali kladnú druhú súradnicu, tie ostanú na mieste.*

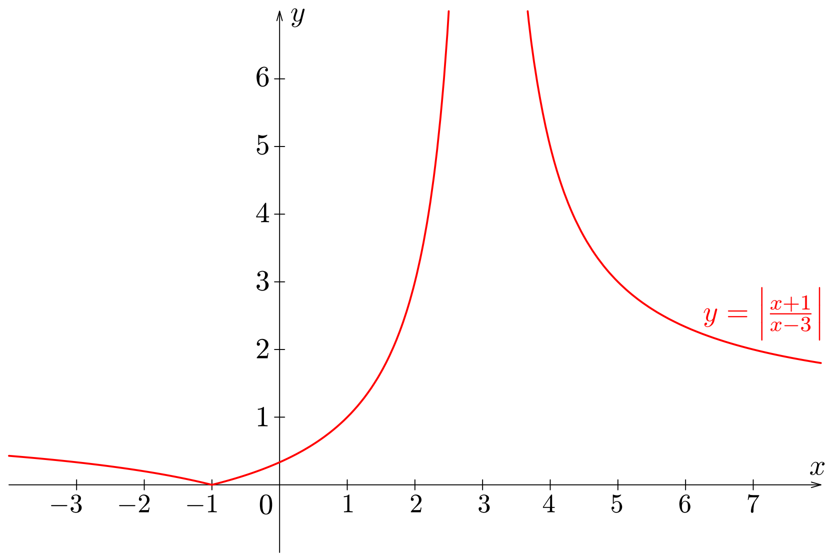
U: Výborne, teda môžeš nakresliť odpovedajúci graf funkcie f_1.

Ž: *Tu je:*



U: Dobre, teraz ešte druhá časť.

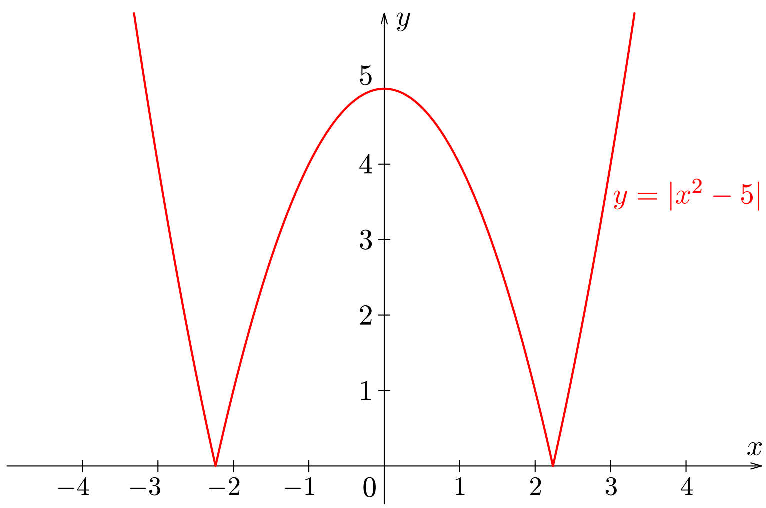
Ž: *Princíp je však ten istý. Mám graf funkcie g a mám z neho urobiť graf funkcie $g_1 : y = |g(x)|$. Čiže zase zobrazím osovo súmerne podľa osi x tú časť grafu, ktorá ležala pod ňou:*



U: Výborne, vidím, že z absolútnych hodnôt sa blížiš k absolútnej dokonalosti.

Úloha 5: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = |x^2 - 5|$.

Výsledok:



Príklad 6: *Zostrojte graf funkcie* $f: y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ž: *Vyzerá to veľmi zložito, zrejme si to musím rozdeliť na menšie kroky.*

U: Presne tak, odkiaľ by si začal?

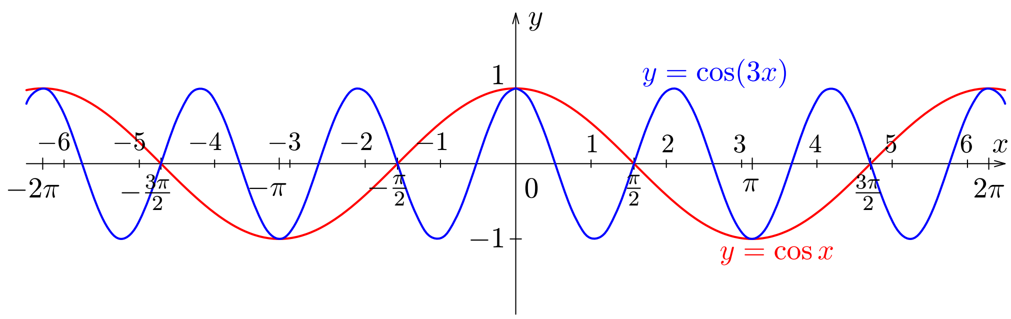
Ž: *Asi funkciou* $y = \cos x$, *jej graf poznám, je to kosínusoida.*

U: Dobre, označme si ju ako funkciu f_1. Ktorá by bola ďalšia?

Ž: *Ďalšia by mohla byť funkcia*

$$f_2 : y = \cos(3x).$$

Jej graf by bol v porovnaní s grafom funkcie f_1 *trikrát zúžený v smere osi* x*-ovej. Vyzeralo by to takto:*



U: Zatiaľ ti to ide výborne, pokračuj.

Ž: *V tretej funkcii*

$$f_3 : y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

som pridal mínus $\frac{\pi}{2}$ *do zátvorky. To spôsobí, že sa celý graf posunie v smere osi* x*-ovej o* $\frac{\pi}{2}$ *doprava.*

U: Tak tu ťa musím zastaviť, pretože toto nie je dobrá úvaha. Máš síce pravdu, že budeme graf posúvať vsmere osi x doprava, ale nie o $\frac{\pi}{2}$. Najprv vyberieme v prepise funkcie trojku pred zátvorku, teda

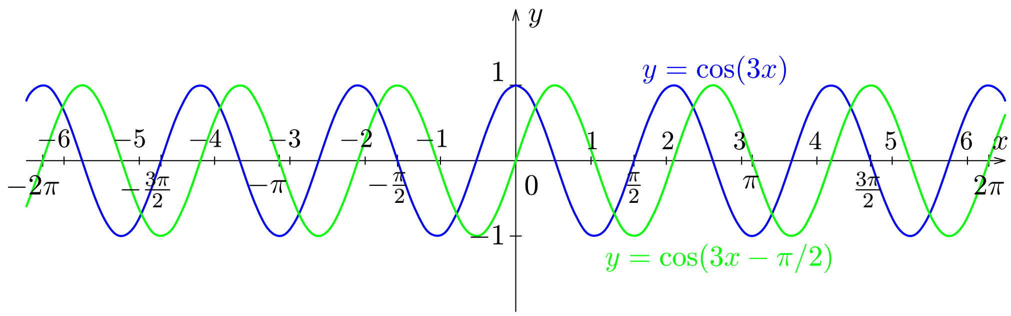
$$f : y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Potom už môžeme použiť transformáciu grafu $y = f(x - a)$.

Ž: *Teda graf posunieme v smere osi* x*-ovej doprava len o* $\frac{\pi}{6}$*?*

U: Áno, nakresli do jedného obrázka grafy funkcií f_2 aj f_3, aby sme videli ten rozdiel.

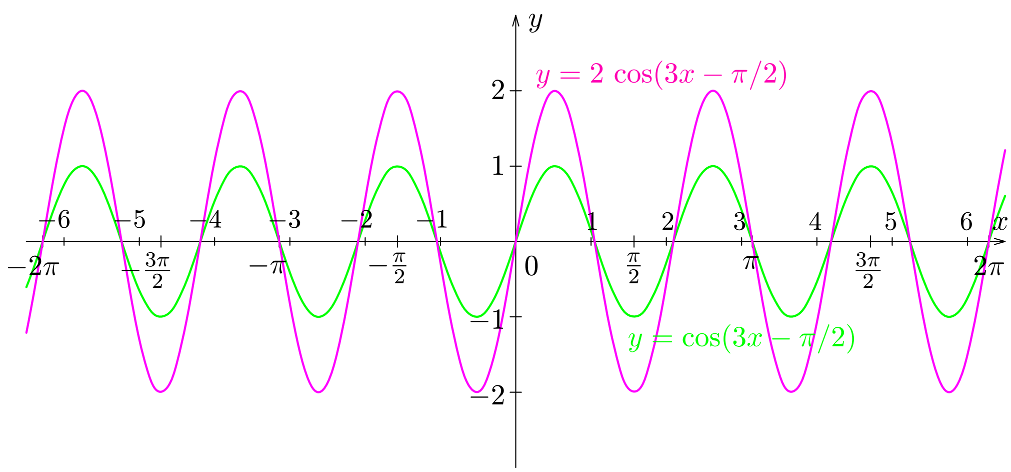
Ž: *Tu je to:*



U: Výborne, ostala napokon samotná funkcia

$$f : y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ž: *Teda k tomu, čo bolo predtým, treba ešte pridať dvojku na začiatku predpisu. To ale spôsobí, že všetky hodnoty funkcie budú dvojnásobné, teda graf funkcie f bude v porovnaní s grafom funkcie f_3 dvojnásobne natiahnutý v smere osi y.*



Úloha 6: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Výsledok: