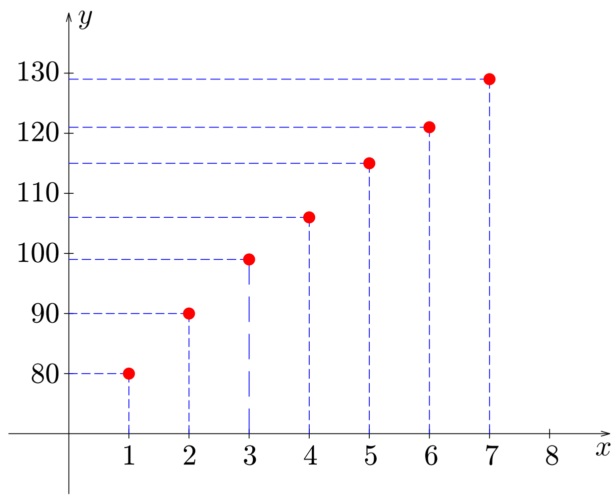
Monotónnosť funkcie

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Keď bol Samko malý, rodičia mu v izbe nakreslili na stenu tzv. výškomer a každý rok na narodeniny zakreslili, aký je vysoký. Z nameraných hodnôt sme zostavili takúto tabuľku:

x – vek v rokoch	1	2	3	4	5	6	7
y – výška v cm	80	90	99	106	115	121	129

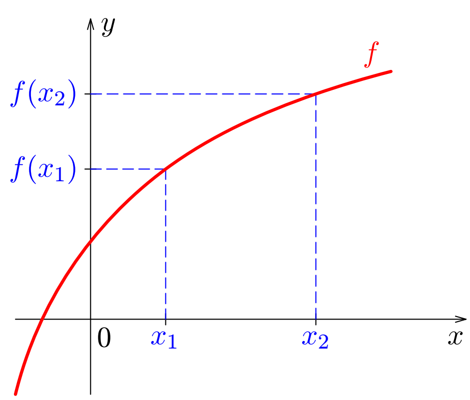
Môžeme zostrojiť aj graf závislosti Samkovej výšky od jeho veku a bude vyzerať takto:



Skús popísať, čo je charakteristické pre túto funkciu.

Ž: *Samko bol z roka na rok vyšší a vyšší, preto vždy každá nasledujúca hodnota funkcie je väčšia ako tie predchádzajúce.*

U: Výborne, no a takejto funkcii budeme hovoriť, že je rastúca na určitej časti definičného oboru $\mathcal{D}$. Na obrázku máme vystihnutú podstatu – ak $x_1 < x_2$, tak potom musí byť $f(x_1) < f(x_2)$.

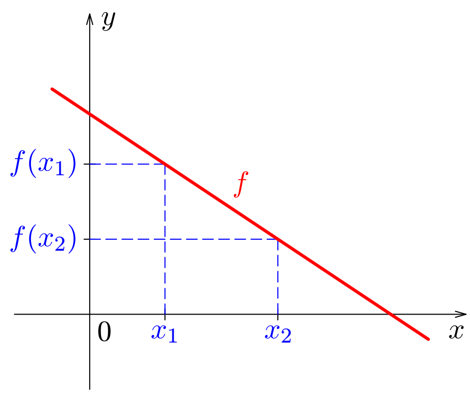


U: Presná definícia nášho nového pojmu znie takto:
Nech M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru.

Funkcia f sa nazýva rastúca funkcia na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$.
Ak niektorá funkcia je rastúca na celom svojom definičnom obore, tak jednoducho len povieme, že funkcia je rastúca.

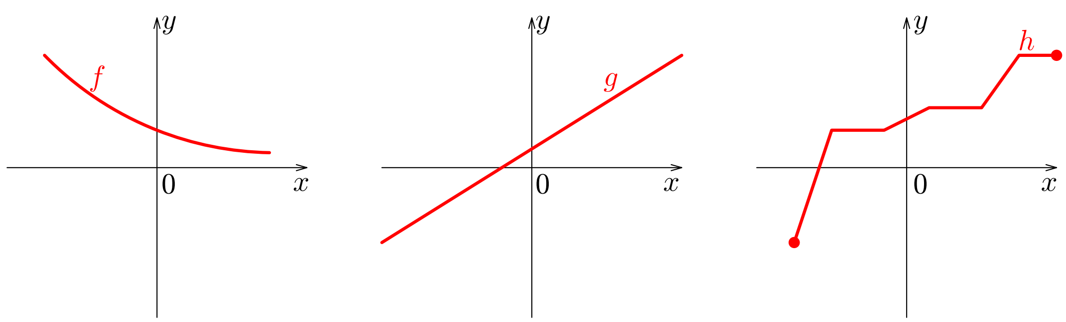
Ž: *Keď máme rastúcu funkciu, mohli by sme mať aj klesajúcu. Napríklad, ak si kúpim kreditnú kartu na mobil a telefonujem, tak každú chvíľu registrujem, že mi klesol kredit.*

U: Máš pravdu, funkcia môže byť na určitej časti definičného oboru aj klesajúca. Vtedy bude platiť, že ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) > f(x_2)$, ako to vidíme na obrázku:



U: Definícia:

Funkcia f sa nazýva klesajúca funkcia na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$.
Teraz sa pozri na nasledujúce obrázky a posúď, či sú tu zakreslené funkcie, ktoré by boli rastúce alebo klesajúce na svojom definičnom obore.



Ž: *Na tomto prvom obrázku je podľa mňa klesajúca funkcia, na druhom je jasne rastúca. No a ten tretí obrázok je taký zvláštny, pretože chvíľami aj rastie, ale nie všade.*

U: Ak sa však dobre pozrieš, zistíš, že táto funkcia nikde neklesá, preto sa aj nazýva neklesajúca.
Definícia:
Funkcia f sa nazýva neklesajúca funkcia na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) \leqq f(x_2)$.
Analogicky vieme definovať nerastúcu funkciu, skús to.

Ž: **Funkcia f sa nazýva nerastúca funkcia na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) \geqq f(x_2)$.**

U: Výborne. Čo myslíš, mohla by byť funkcia súčasne nerastúca aj neklesajúca?

Ž: *Ani rásť, ani klesať? To by musela mať všade rovnaké hodnoty, teda by musela byť konštantná.*

U: Presne tak. ***Funkciu nazývame konštantnou na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, ak $\forall x_1, x_2 \in M$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.***

Ž: *Jej graf by bol potom ale veľmi jednoduchý, bola by to priamka alebo jej časť, rovnobežná s osou x.*

U: Máš pravdu. Na záver ešte dodám, že pod pojem ***monotónne funkcie*** na množine M zaraďujeme všetkých 5 typov – rastúcu, klesajúcu, nerastúcu, neklesajúcu a konštantnú funkciu. Cudzie slovo monotónne totiž znamená v určitom zmysle rovnaké, jednotné. A naše funkcie boli jednotné vzhľadom na rast resp. klesanie.

Príklad 1: *Rozhodnite, či sú funkcie, dané tabuľkami, rastúce alebo klesajúce:*

a)

x	1	−2	3	−1	2
$f(x)$	2	3	4	1	−2

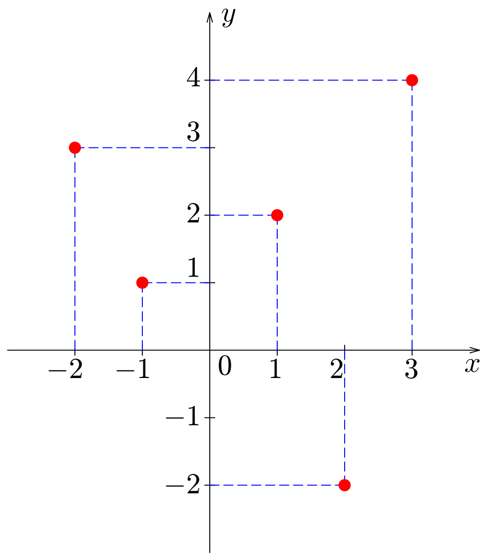
b)

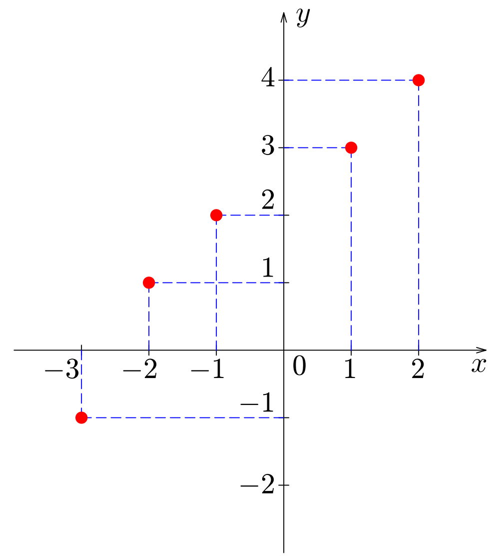
x	−1	−2	1	−3	2
$g(x)$	2	1	3	−1	4

Ž: *Napadlo mi, že by som mohol zostrojiť grafy týchto funkcií a z toho zistiť, či sú rastúce.*

U: Je to jeden zo spôsobov, ako túto úlohu vyriešiť. Môžeš to urobiť a potom si ukážeme aj iný spôsob.

Ž: *Dobre. Takže si jednoducho do súradnicovej sústavy zakreslím všetky body z tabuľky. Dostanem takéto grafy:*





U: V oboch prípadoch sú grafmi množiny piatich izolovaných bodov.

Ž: *V prvom prípade vidím, že tie body všelijako skáču, takže f nebude ani rastúca ani klesajúca funkcia. V druhom prípade hodnoty pekne narastajú, takže g bude rastúca funkcia.*

U: Dobre, a teraz skúsme túto úlohu vyriešiť bez pomoci grafu, len z tabuliek, za pomoci definície.

Ž: *V definícii sa hovorí, že mám zobrať také $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, aby $x_1 < x_2$ a porovnávať $f(x_1)$ s $f(x_2)$.*

U: Aby sme nemuseli porovnávať úplne všetky dvojice, môžeme urobiť jeden šikovný krok a totiž rozumne usporiadať hodnoty v tabuľkách.

Ž: *Takže prvý riadok usporiadam podľa veľkosti a dostanem nové tabuľky:*

a)

x	−2	−1	1	2	3
$f(x)$	3	1	2	−2	4

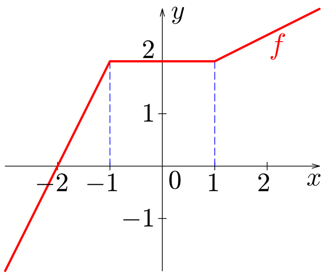
b)

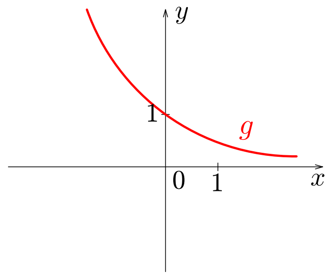
x	−3	−2	−1	1	2
$g(x)$	−1	1	2	3	4

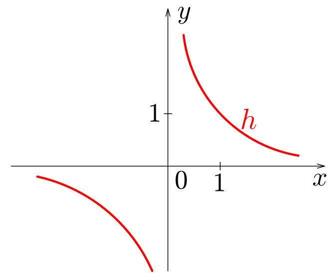
U: Teraz pekne vidíme, že funkcia f je najprv klesajúca, potom však vzrastie na hodnotu 2, opäť klesne na hodnotu −2, teda funkcia f nie je na svojom definičnom obore ani rastúca, ani klesajúca.

Ž: *Naproti tomu s funkciou g je to jednoznačné. Postupne ako sa zväčšujú hodnoty premennej x, zväčšujú sa aj funkčné hodnoty, teda je to rastúca funkcia.*

Príklad 2: *Rozhodnite o monotónnosti funkcií daných grafmi:*







Ž: *Začnem prvou funkciou. Tá najprv rastie na intervale* $(-\infty; -1\rangle$*, potom je chvíľu konštantná na intervale* $\langle -1; 1\rangle$ *a potom zase rastie na intervale* $\langle 1; \infty)$.

U: Dala by sa jej monotónnosť na celom definičnom obore vyjadriť jedným slovom?

Ž: *Je to neklesajúca funkcia, pretože vždy iba rastie alebo je konštantná.*

U: Výborne, môžeme prejsť k druhému grafu.

Ž: *Tak toto je podľa mňa jasne klesajúca funkcia na celom definičnom obore.*

U: Dobre, a teraz sa pozri na tretí graf, či to bude tiež také jednoznačné.

Ž: *Zdá sa mi, že áno, je to tiež klesajúca funkcia.*

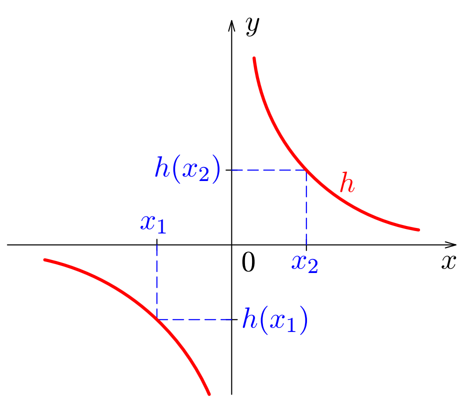
U: Na celom definičnom obore?

Ž: *Keď sa takto pýtate, tak asi nie, ale neviem prečo, veď pekne klesá.*

U: Je tu jeden malý detail, ktorý si hneď vysvetlíme. Najprv mi však povedz, aký je definičný obor tejto funkcie.

Ž: *Keďže graf sa blíži z oboch strán k osi y-ovej, ale nikdy sa jej nedotkne, tak táto funkcia nie je definovaná v bode* 0*. Teda* $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

U: Výborne. Vráťme sa teraz k monotónnosti. Ak by sme povedali, že naša funkcia h je klesajúca na celom $\mathcal{D}$, tvrdili by sme, že pre každú dvojicu čísel $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, takých, že $x_1 < x_2$ platí $h(x_1) > h(x_2)$. Lenže čo ak si vyberiem takúto dvojicu ako na obrázku?

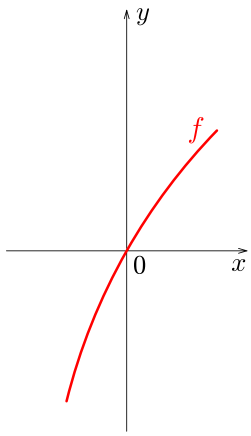


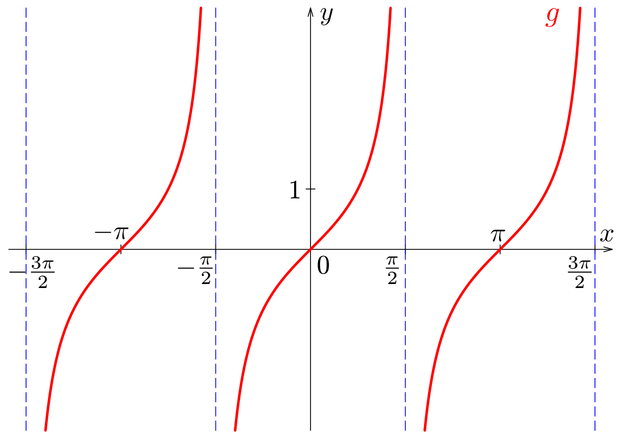
U: Platí $x_1 < x_2$, ale $h(x_1) < h(x_2)$, čo odporuje definícii klesajúcej funkcie.

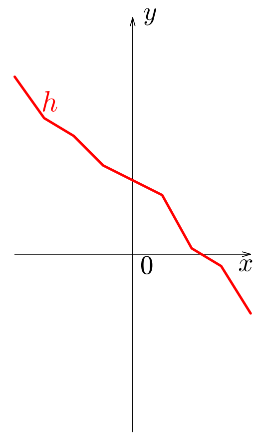
Ž: *Tak ako to je potom s tou monotónnosťou?*

U: Správne bude povedať, že funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty; 0)$ aj na intervale $(0; \infty)$. Ale ešte raz zopakujem, nepovedz, že funkcia je klesajúca na zjednotení týchto dvoch intervalov. Môj obrázok nech ti slúži ako protipríklad.

Úloha 2: *Rozhodnite o monotónnosti funkcií daných grafmi:*

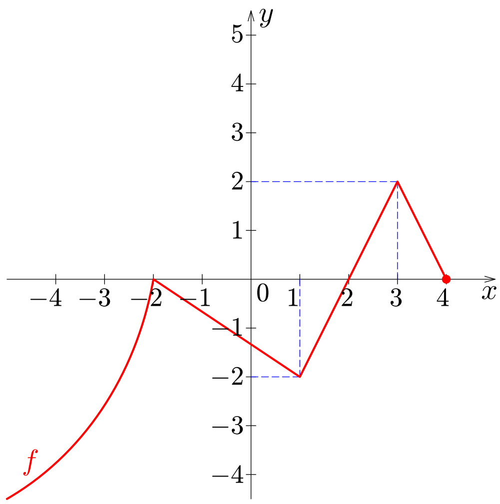


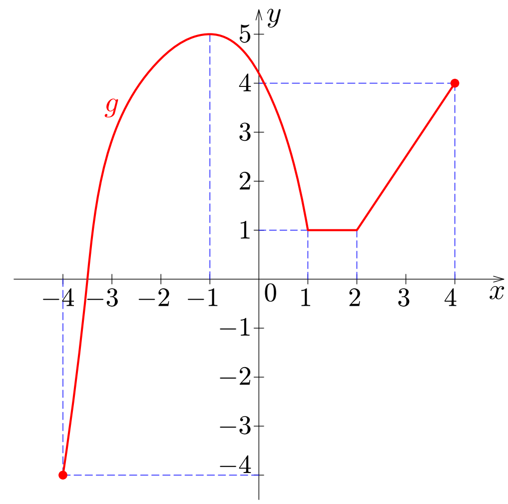




Výsledok: f – rastúca na $\mathcal{D}$; g – rastúca na každom intervale $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; h – klesajúca na $\mathcal{D}$

Príklad 3: *Určte intervaly monotónnosti funkcií, ktorých grafy sú na obrázku:*





U: Určiť intervaly monotónnosti znamená určiť také podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, prípadne je konštantná.

Ž: *Tak to vôbec nie je ťažké. Hneď v prvom grafe sa to pekne strieda – funkcia je rastúca na intervaloch* $(-\infty; -2\rangle$ *a* $\langle 1; 3\rangle$, *klesajúca je na intervaloch* $\langle -2; 1\rangle$ *a* $\langle 3; 4\rangle$.

U: Výborne, ja len pripomeniem, že medzi tieto intervaly nedávame zjednotenie.

U: Môžeš prejsť na druhú funkciu.

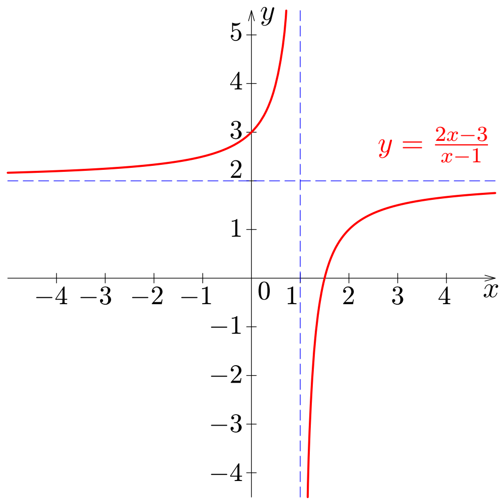
Ž: *Najprv na intervale* $\langle -4; -1\rangle$ *táto funkcia rastie, potom na intervale* $\langle -1; 1\rangle$ *klesá, chvíľu je konštantná na intervale* $\langle 1; 2\rangle$ *a napokon zase rastie na intervale* $\langle 2; 4\rangle$.

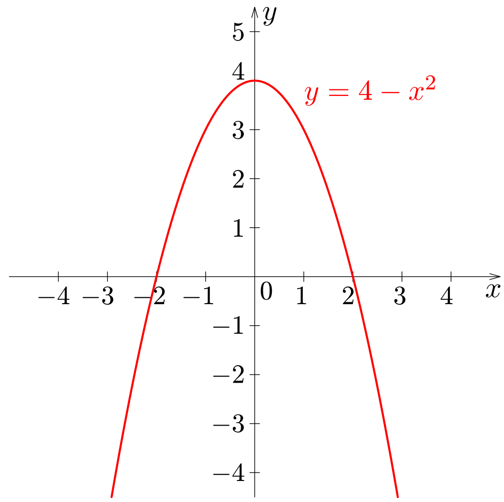
U: Výborne. Ako by si jedným slovom vystihol monotónnosť tejto funkcie na intervale $\langle -1; 2\rangle$?

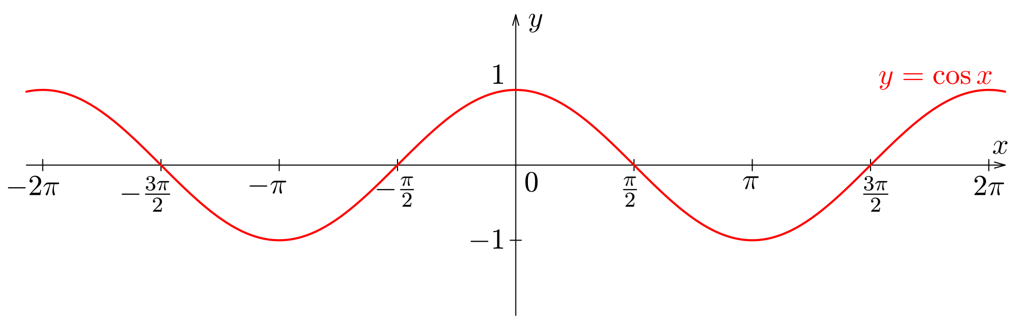
Ž: *Nerastúca.*

U: Som rád, že tomu rozumieš.

Úloha 3: *Určte intervaly monotónnosti funkcií, ktorých grafy vidíte na obrázku:*







Výsledok: a) rastúca na $(-\infty; 1)$ a $(1; \infty)$

b) rastúca na $(-\infty; 0\rangle$, klesajúca na $\langle 0; \infty)$

c) klesajúca na každom intervale $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle$,
rastúca na každom intervale $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

Príklad 4: *Dokážte na základe definície, že funkcia $f : y = -4x + 3$ je klesajúca.*

Ž: *Dôkazové úlohy nemám veľmi rád, nikdy neviem, odkiaľ začať.*

U: Tak si najprv zopakujme definíciu funkcie klesajúcej na $\mathcal{D}$.

Ž: *Funkcia f sa nazýva klesajúca práve vtedy, keď pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$.*

U: Definícia má tvar implikácie: pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí:

$$\text{ak } x_1 < x_2, \text{ potom } f(x_1) > f(x_2).$$

To ti hovorí, že predpoklad, z ktorého začneš je $x_1 < x_2$ a to, k čomu chceš na konci dospieť je tvrdenie $f(x_1) > f(x_2)$. Čo bude definičný obor v našom prípade?

Ž: *Množina všetkých reálnych čísel, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.*

U: Takže môžeš začať s dôkazom – zvolíme ľubovoľné dve reálne čísla také, že

$$x_1 < x_2$$

Ž: *Na konci chcem dostať $-4x+3$, takže by som túto nerovnosť mohol vynásobiť mínus štyrmi.*

U: Áno, a keďže číslo -4 je záporné, znak nerovnosti sa obráti.

Ž: *Teda zatiaľ mám*

$$-4x_1 > -4x_2.$$

K obom stranám môžem pripočítať trojku, to je ekvivalentná úprava, znak nerovnosti sa neobráti, takže

$$-4x_1 + 3 > -4x_2 + 3$$

U: A teraz si stačí uvedomiť, že $-4x_1 + 3$ je hodnota funkcia v bode x_1, podobne $-4x_2 + 3$ je hodnota funkcia v bode x_2, takže máme posledný krok

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ž: *To je všetko? Veď to vôbec nebolo ťažké.*

Úloha 4: *Dokážte na základe definície, že funkcia $f : y = 3x - 2$ je rastúca.*

Príklad 5: *Dokážte, že funkcia* $f : y = 2x^2 - 1$ *je rastúca na* $\langle 10; 100 \rangle$.

Ž: *Ak má byť funkcia rastúca, musím dokázať, že pre všetky* $x_1, x_2 \in \langle 10; 100 \rangle$ *platí: ak* $x_1 < x_2$, *tak* $f(x_1) < f(x_2)$.

U: Presne tak, môžeš začať.

Ž: *Takže začnem tým, že si zvolím ľubovoľné dve hodnoty* x_1, x_2 *od* 10 *do* 100, *pre ktoré platí*

$$x_1 < x_2.$$

Teraz by som potreboval umocniť obe strany.

U: Umocňovanie vo všeobecnosti nie je ekvivalentná úprava, ale keďže obe strany nerovnosti sú v našom prípade kladné čísla, môžeme umocniť a znak nerovnosti sa nezmení.

Ž: *Dostávam*

$$x_1^2 < x_2^2,$$

vynásobím to kladným číslom 2 *a od oboch strán odčítam jednotku*

$$2x_1^2 - 1 < 2x_2^2 - 1,$$

čo znamená, že

$$f(x_1) < f(x_2).$$

U: Výborne, tým je dôkaz ukončený.

Úloha 5: *Dokážte, že funkcia* $f : y = -2x^2 + 1$ *je klesajúca na* $\langle 10; 100 \rangle$.

Príklad 6: *Ukážte, že funkcia $f: y = x^3 - 4x$ nie je ani rastúca, ani klesajúca na $\mathbb{R}$.*

Ž: *Ak by som vedel, ako vyzerá graf tejto funkcie, hneď by to bolo jasné.*

U: To je pravda, ale graf ti ukážem až na koniec. Skúsme na to ísť priamo.

Ž: *Čo to znamená ukázať bez grafu, že funkcia nie je rastúca?*

U: Znamená to ukázať, že naša funkcia odporuje definícii rastúcej funkcie. V tej sa hovorí, že má pre všetky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ niečo platiť.

Ž: *Teda nám stačí nájsť jeden protipríklad?*

U: Áno, stačí nám nájsť jednu dvojicu čísel $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ takú, aby platilo $x_1 < x_2$ a zároveň $f(x_1) \geqq f(x_2)$ a už funkcia nebude rastúca.

Ž: *Tak potom zrejme na ukázanie, že funkcia nie je klesajúca, stačí nájsť jednu dvojicu čísel $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ takú, aby platilo $x_1 < x_2$ a zároveň $f(x_1) \leqq (x_2)$.*

U: Presne tak.

Ž: *To by nemalo byť až také ťažké, vypíšem si do tabuľky niekoľko hodnôt a potom sa uvidí.*

x	-2	-1	0	1	2
$x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

To mi aj stačí, prvé dve hodnoty ukazujú, že funkcia nemôže byť klesajúca, lebo

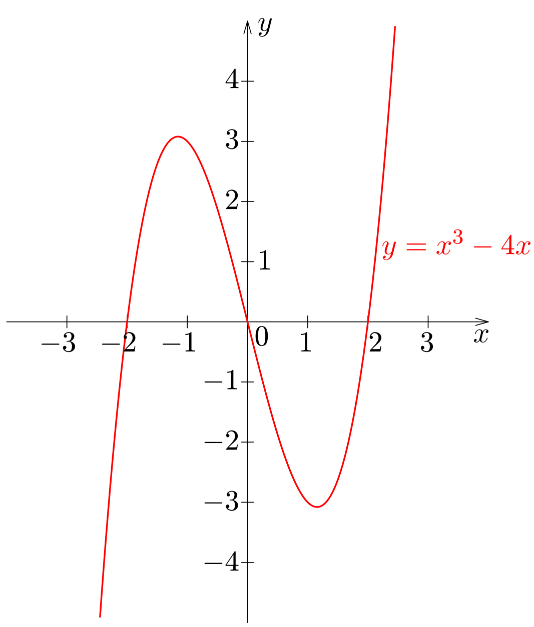
$$-2 < -1, \text{ ale } f(-2) < f(-1).$$

A ak si vezmem dvojicu -1 a 0, tu platí

$$-1 < 0 \text{ a súčasne } f(-1) > f(0),$$

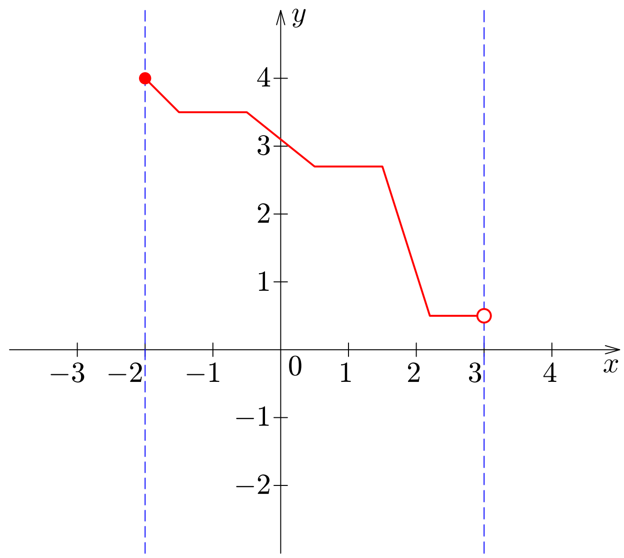
čiže funkcia nemôže byť ani rastúca na $\mathbb{R}$.

U: Výborne, a ako odmenu ti ukážem graf tejto funkcie, ktorý len potvrdí tvoje slová:



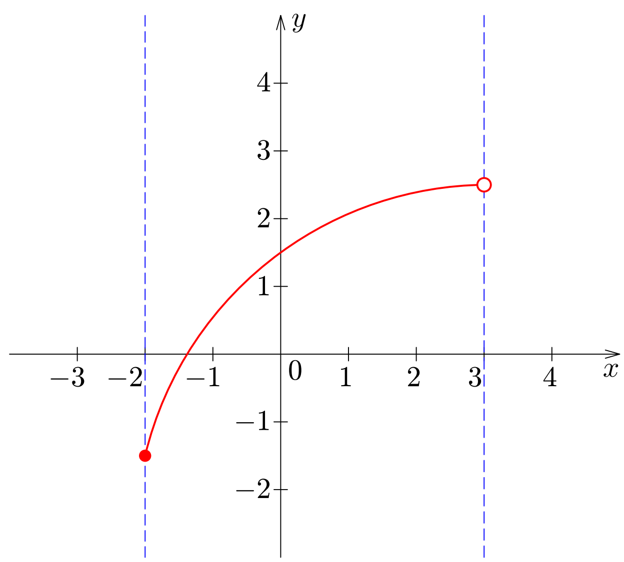
Príklad 7: *Načrtnite graf ľubovoľnej funkcie, ktorej $\mathcal{D} = \langle -2; 3)$ a ktorá je a) nerastúca; b) rastúca; c) nie je monotónna; d) načrtnite graf ľubovoľnej funkcie, ktorej $\mathcal{D} = \langle -2; 2\rangle$ a ktorá je párna a súčasne rastúca.*

Ž: *Toto nie je ťažká úloha. Najprv si na x-ovej osi vyznačím čísla -2 a 3, ktoré mi budú ohraničovať definičný obor.*
V prvom prípade má byť funkcia nerastúca, teda klesá alebo je konštantná, čo môže vyzerať hoci aj takto:



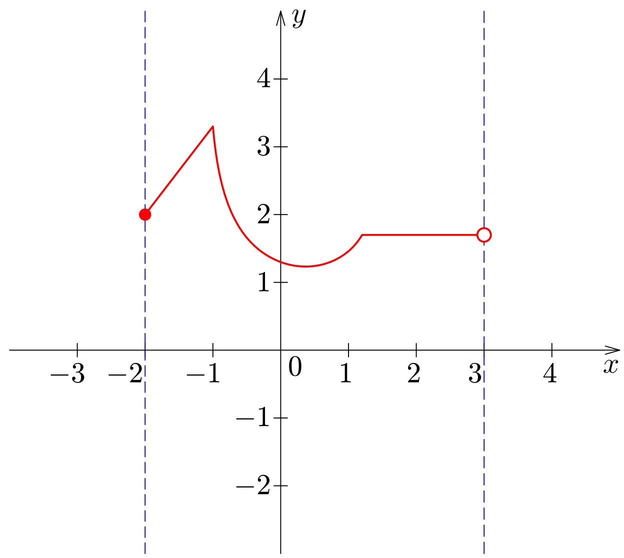
U: Môže byť, skús teraz rastúcu.

Ž: *Ani to nie je ťažké, nakreslím takýto oblúčik:*



U: Dobre.

Ž: *V tretej úlohe to bude vyzerať hoci aj takto:*



U: Pekne, táto funkcia naozaj nie je monotónna na celom definičnom obore. Ostala ti posledná časť úlohy.

Ž: *Teda funkcia má byť na intervale $\langle -2; 2\rangle$ párna, čo znamená graf symetrický podľa osi y a zároveň rastúca. No neviem, ale podľa mňa sa to nedá.*

U: Máš pravdu, ak je funkcia párna a napríklad na intervale $\langle -2; 0\rangle$ rastie, tak zo súmernosti grafu vyplýva, že potom na intervale $\langle 0; 2\rangle$ bude klesať a naopak. Teda funkcia, ktorá je párna, nemôže byť rastúca ani klesajúca.