Zložená funkcia

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Dennodenne sa stretávame s činnosťami, ktoré vyžadujú postupnosť krokov v určitom poradí. Napríklad ráno si oblečieš tričko a až na to mikinu alebo košeľu.

Ž: *Náhodou som skúšal aj opačne – tričko na mikinu a vyzeralo to špicovo.*

U: Postupnosť krokov môžeme zameniť, ale výsledok už bude iný. To bude pre nás teraz dôležité, lebo sa vrátime naspäť k matematike a povieme si niečo o ***zložených funkciách***. Začnem s funkciou

$$F : y = \sqrt{x-2}.$$

Ako by sa počítali jej hodnoty v bodoch 3 a 4?

Ž: *Jednoducho, najprv odčítam dvojku, potom odmocním:*

$$F(3) = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$$

$$F(4) = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \doteq 1,41$$

U: Teda si to počítal v dvoch krokoch. Naša funkcia $F : y = \sqrt{x-2}$ je totiž zložená z dvoch „jednoduchších“ funkcií. Tá prvá sa nazýva ***vnútorná zložka*** a je ňou lineárna funkcia $f : y = x - 2$. Tá druhá sa nazýva ***vonkajšia zložka*** a je ňou funkcia $g : y = \sqrt{x}$.

Ž: *A čo keby sme poradie zamenili?*

U: Skús to.

Ž: *Najprv by sme vypočítali druhú odmocninu a od výsledku potom odpočítali dvojku.*

U: Vznikla by teda funkcia

$$G : y = \sqrt{x} - 2.$$

Pre porovnanie urč jej hodnoty v bodoch 3 a 4.

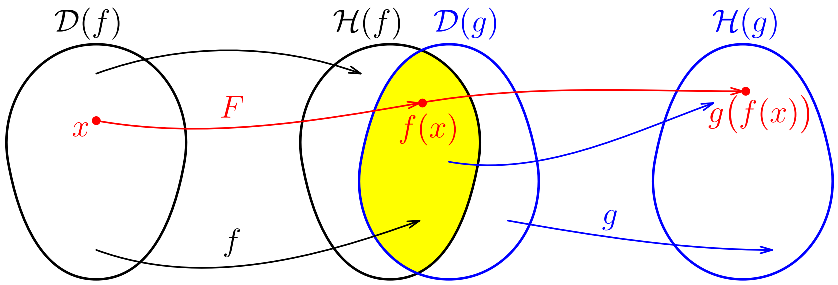
Ž: *Dosadzujem*

$$G(3) = \sqrt{3} - 2 \doteq -0,27$$

$$G(4) = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Dostal som úplne iné hodnoty.

U: Je to preto, lebo ak vytvárame zloženú funkciu, záleží na poradí, v akom dve alebo aj viac funkcií skladáme. Znázorníme si šípkovým diagramom, čo sa tu vlastne deje:



Ž: *To, čo je nakreslené čiernou a modrou farbou, mi je jasné – funkcie f aj g priraďujú prvkom svojho definičného oboru prvky svojho oboru hodnôt.*

U: Správne a teraz poďme na červenú farbu. Funkcia F najprv číslu x priradí hodnotu $f(x)$ a potom tejto hodnote $f(x)$ priradí v druhom kroku hodnotu $g(f(x))$. Aby sa to však mohlo udiať, musí byť splnená podmienka, že

$$f(x) \in \mathcal{D}(g).$$

A to je vyznačené práve žltou farbou. Symbolický zápis pre skladanie funkcií je

$$F = g \circ f.$$

Ž: *Čiže hodnotu začneme počítať s tou funkciou, ktorá je napísaná ako druhá v poradí?*

U: Áno, už sme si povedali, že na poradí záleží, teda

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Myslím, že môžeme sformulovať aj definíciu:
Funkciou zloženou z funkcií g, f (v tomto poradí) sa nazýva funkcia, ktorá sa označuje $g \circ f$ a pre ktorú platí:

1. ***Jej definičným oborom je množina všetkých $x \in \mathcal{D}(f)$, pre ktoré $f(x) \in \mathcal{D}(g)$.***
2. ***Pre každé $x \in \mathcal{D}(g \circ f)$ platí $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.***

Ž: *Mám taký nepríjemný pocit, že pri zložených funkciách sa bude všetko počítať veľmi zložito.*

U: Trochu zložitejšie to bude, netreba sa však toho báť. Začnime definičným oborom, najlepšie to pochopíš na príklade. Teda urč definičný obor funkcie

$$F : y = \frac{3}{\log x}.$$

Ž: *V menovateli zlomku nesmie byť nula, preto píšem podmienku $\log x \neq 0$, čiže*

$$x \neq 1.$$

U: Ešte však treba určiť podmienku pre vnútornú zložku, ktorou je funkcia $f : y = \log x$.

Ž: *Logaritmus je definovaný iba z kladných čísel, teda*

$$x > 0.$$

U: Ostáva urobiť záver.

Ž: *Keďže obe podmienky musia platiť naraz, urobím ich prienik, teda*

$$\mathcal{D}(F) = \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

Naozaj to nie je také ťažké, treba len dôsledne napísať všetky podmienky a urobiť ich prienik.

Príklad 1: *Z funkcií f a g vytvorte zloženú funkciu $F = g \circ f$ a určte jej definičný obor:*

a) $f : y = x - 1, \quad g : y = \dfrac{1}{x}$,

b) $f : y = x^2 - 7, \quad g : y = \dfrac{\sqrt{x}}{3}$,

c) $f : y = \ln x, \quad g : y = \sqrt{1 - x}$.

Ž: *V časti a) je vnútornou zložkou funkcia $f : y = x - 1$ a vonkajšou funkcia $g : y = \dfrac{1}{x}$. To znamená, že najprv od čísla odpočítam jednotku a potom z výsledku urobím prevrátenú hodnotu. Takže*

$$F : y = \frac{1}{x - 1}.$$

Definičným oborom bude $\mathbb{R} - \{1\}$, pretože v menovateli zlomku nesmie vzniknúť nula.

U: Výborne, pokračuj.

Ž: *V časti b) je vnútornou zložkou funkcia $f : y = x^2 - 7$, vonkajšou $g : y = \dfrac{\sqrt{x}}{3}$. Teda najprv číslo umocním na druhú a odpočítam sedmičku, potom výsledok odmocním a vydelím tromi. Vzniká mi takáto zložená funkcia:*

$$F : y = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{3}.$$

Ešte podmienky – výraz pod odmocninou musí byť nezáporný, teda $x^2 - 7 \geqq 0$. Po odmocnení dostanem

$$|x| \geqq \sqrt{7}.$$

Takže

$$\mathcal{D}(F) = \left(-\infty; -\sqrt{7}\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{7}; \infty\right).$$

U: V obidvoch častiach nám stačila jedna podmienka, skúsme ešte tretiu časť.

Ž: *Tu máme funkcie $f : y = \ln x$ a $g : y = \sqrt{1 - x}$. Každá z nich sama o sebe vyžaduje podmienky, ale poďme postupne. Najprv vytvorím zloženú funkciu, to bude*

$$F : y = \sqrt{1 - \ln x}.$$

U: Dobre, to je funkcia $F = g \circ f$. Pre porovnanie uvediem aj funkciu $G = f \circ g$, tá bude daná predpisom

$$y = \ln \sqrt{1 - x}.$$

Ž: *Naozaj je to niečo iné.*

U: Tak ešte dokončme našu úlohu a urč definičný obor funkcie

$$F : y = \sqrt{1 - \ln x}.$$

Ž: *Na to, aby existoval logaritmus x poslúži prvá podmienka, teda $x > 0$. Druhá podmienka nám zaručí, aby pod druhou odmocninou bolo nezáporné číslo, teda*

$$1 - \ln x \geqq 0,$$

čiže $\ln x \leqq 1$. *Čo ďalej?*

U: Funkcia $y = \ln x$ je rastúca, teda môžeme odlogaritmovať a dostaneme $x \leqq e$.

Ž: *Tak potom stačí spojiť obe podmienky $x > 0$ a $x \leqq e$ a dostanem*

$$\mathcal{D}(F) = (0; e\rangle \, .$$

Úloha 1: *Z funkcií $f : y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g : y = \sqrt{x}$ vytvorte zložené funkcie $F = g \circ f$ a $G = f \circ g$. Určte ich definičné obory.*

Výsledok: $F : y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}; \quad \mathcal{D}(F) = (-\infty; -1\rangle \cup (1; \infty)$

$G : y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}; \quad \mathcal{D}(G) = \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$

Príklad 2: *Určte, z ktorých funkcií je zložená daná funkcia F a nájdite jej definičný obor:*
a) $F: y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{3}$ *b)* $F: y = \sin 2x$ *c)* $F: y = \dfrac{1}{\ln x - 3}$.

U: Pri určovaní vnútorných a vonkajších zložiek si môžeš pomôcť tým, že si predstavíš, akou postupnosťou krokov by si počítal hodnotu funkcie v ľubovoľnom bode jej definičného oboru.

Ž: *Tak v prvom prípade*

$$F: y = \frac{\sqrt{x-2}}{3}$$

by som najprv od x odčítal dvojku, potom výsledok odmocnil a napokon ešte vydelil tromi. Takže by to mohlo byť zložené z troch funkcií $F = h \circ g \circ f$, pričom

$$f: y = x - 2, \quad g: y = \sqrt{x}, \quad h: y = \frac{x}{3}.$$

U: Môže to byť takto, výborne si zvládol a správne zapísal poradie funkcií.

Ž: *Tak idem na definičný obor. Z týchto troch funkcií len jedna vyžaduje podmienku – pod druhou odmocninou musí byť číslo nezáporné, teda $x \geqq 0$.*

U: Pozor, to čo hovoríš, je síce pravda, ale v predpise našej funkcie F máme pod druhou odmocninou výraz $x - 2$.

Ž: *Tak potom u nás platí $x - 2 \geqq 0$, čiže $x \geqq 2$. Hotovo,*

$$\mathcal{D}(F) = \langle 2; \infty) .$$

U: Dobre.

Ž: *Druhá časť*

$$F: y = \sin 2x$$

je v podstate celkom jednoduchá, lebo je zložená len z dvoch funkcií, sínusu a dvojnásobku x.

U: V akom poradí?

Ž: *No veď práve, najprv by som vypočítal $2x$ a potom z toho sínus, teda vnútorná zložka je $f: y = 2x$ a vonkajšia $g: y = \sin x$. A najlepšie na tom je, že nevyžadujú písanie žiadnych podmienok, teda*

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

U: Tak už ťa čaká len posledná funkcia

$$F: y = \frac{1}{\ln x - 3}.$$

Ž: *Ak si to rozložím na najmenšie kroky, tak mám x zlogaritmovať, potom odčítať trojku a napokon vypočítať prevrátenú hodnotu. Takže $F = h \circ g \circ f$, pričom*

$$f : y = \ln x, \quad g : y = x - 3, \quad h : y = \frac{1}{x}.$$

U: Veľmi dobre.

Ž: *Tak ešte určiť definičný obor. Prvú podmienku píšem pre logaritmus:*

$$x > 0.$$

Druhú podmienku dostanem z menovateľa, ktorý nesmie byť rovný nule, teda

$$\ln x - 3 \neq 0,$$

odtiaľ

$$\ln x \neq 3$$

a napokon

$$x \neq e^3.$$

A blíži sa záver

$$\mathcal{D}(F) = \mathbb{R}^+ - \left\{e^3\right\}.$$

Príklad 3: *Určte definičné obory zložených funkcií* $f : y = \sqrt{\dfrac{x^2-2}{x}}$ *a* $g : y = \log(x^2-3)$.

Ž: *Určiť definičný obor vlastne znamená napísať podmienky pre jednotlivé výrazy v predpise funkcie, aby mali zmysel.*

U: A dať pozor, aby si na žiadnu podmienku nezabudol.

Ž: *Veď ja viem... Začnem prvou funkciou*

$$f : y = \sqrt{\frac{x^2-2}{x}}.$$

Tu musím napísať $x \neq 0$, *pretože sa nachádza v menovateli zlomku. Ďalej druhá odmocnina je definovaná iba z kladných čísel ...*

U: Z akých?

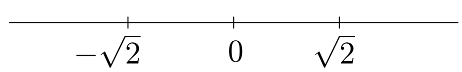
Ž: *Aha, z nezáporných čísel, teda*

$$\frac{x^2-2}{x} \geqq 0.$$

Výraz v čitateli rozložím na súčin

$$\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{x} \geqq 0.$$

Pokračujem metódou nulových bodov, ktorými sú čísla $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 0. *Nakreslím ich na číselnú os*

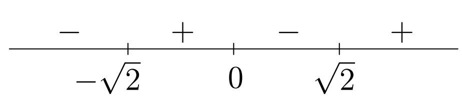


U: Takto sa ti vlastne množina reálnych čísel rozpadla na štyri intervaly.

Ž: *V každom z nich si vyberiem jedno číslo, dosadím do výrazu* $\dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{x}$, *aby som zistil, či nadobudne kladnú alebo zápornú hodnotu.*

U: Dobre, vidím, že vieš čo máš robiť, napíš mi už len výsledok.

Ž: *Ja ho radšej nakreslím:*



U: Nezabudni, že na začiatku bola podmienka $x \neq 0$.

Ž: *Myslím na to, teda*

$$\mathcal{D}(f) = \left\langle -\sqrt{2};0\right) \cup \left\langle \sqrt{2};\infty\right).$$

U: Prejdime na druhú funkciu

$$g : y = \log(x^2-3).$$

Ž: *Tu si musím napísať podmienku* $x^2 - 3 > 0$*, pretože logaritmus je definovaný iba z kladných čísel. Teda* $x^2 > 3$*, čiže*

$$|x| > \sqrt{3}.$$

A tak mám

$$\mathcal{D}(g) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right).$$

Úloha 3: *Určte definičný obor zložených funkcií* $f : y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ *a* $g : y = \sqrt{0,5^x - 4}$.

Výsledok: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$; $\mathcal{D}(g) = (-\infty; -2\rangle$

Príklad 4: *Dané sú funkcie* $f : y = \dfrac{x-2}{3}$, $g : y = 1 - 3x^2 + 4x$. *Určte* $f(2x)$, $f\left(\frac{x-2}{3}\right)$, $g(\sqrt{x})$, $g(1 - x^2)$.

U: Určiť hodnotu funkcie f v bode $2x$ vlastne znamená pracovať so zloženou funkciou, ktorej vnútorná zložka bude daná rovnicou $y = 2x$ a vonkajšia predpisom $y = \dfrac{x-2}{3}$.

Ž: *Takže potom*

$$f(2x) = \frac{2x-2}{3}.$$

To bolo ľahké, stačilo dosadiť $2x$ *namiesto* x. *Skúsim ďalšie, tiež to urobím tak, že namiesto* x *dosadím* $\dfrac{x-2}{3}$*:*

$$f\left(\frac{x-2}{3}\right) = \frac{\frac{x-2}{3} - 2}{3}.$$

Mám to upraviť?

U: Samozrejme.

Ž: *Tak potom*

$$f\left(\frac{x-2}{3}\right) = \frac{\frac{x-2}{3} - 2}{3} = \frac{\frac{x-2-6}{3}}{3} = \frac{\frac{x-8}{3}}{3} = \frac{x-8}{9}.$$

Ž: *Teraz prejdem na funkciu*

$$g : y = 1 - 3x^2 + 4x.$$

Najprv určím

$$g\left(\sqrt{x}\right) = 1 - 3(\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x} = 1 - 3x + 4\sqrt{x}.$$

U: Ide ti to dobre, tak ešte posledné.

Ž: *Najprv dosadím* $1 - x^2$, *takže*

$$g(1 - x^2) = 1 - 3(1 - x^2)^2 + 4(1 - x^2),$$

ale to ešte budem upravovať

$$g(1 - x^2) = 1 - 3(1 - 2x^2 + x^4) + 4 - 4x^2 = 1 - 3 + 6x^2 - 3x^4 + 4 - 4x^2 = 2 + 2x^2 - 3x^4.$$

U: V poriadku.

Príklad 5: *Funkcie f a g sú dané tabuľkami:*

x	0	-1	4	1	2	5
$f(x)$	0	2	6	1	8	7

x	4	0	1	6	7	-1
$g(x)$	2	4	5	11	4	-2

Zapíšte tabuľkami funkcie $g \circ f$ a $f \circ g$.

U: Začneme funkciou $g \circ f$. Skús najprv určiť jej definičný obor.

Ž: *Podľa definície do definičného oboru funkcie $g \circ f$ patria všetky také x z definičného oboru funkcie f, pre ktoré platí, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Čo s tým?*

U: Máš teda v druhom riadku tabuľky funkcie f vyhľadať také čísla, ktoré sa nachádzajú aj v prvom riadku tabuľky funkcie g.

Ž: *Tak to sú čísla* 0; 6; 1; 7.

U: Áno, to sú funkčné hodnoty funkcie f. Nájdi k nim príslušné x.

Ž: *To sú čísla* 0; 4; 1; 5.

U: Výborne, môžeš písať tabuľku funkcie $g \circ f$.

Ž: *V prvom riadku teda budú štyri čísla* 0; 4; 1; 5 *a v druhom riadku im priradím* $g(f(x))$. *Bude to vyzerať takto:*

x	0	4	1	5
$g(f(x))$	4	11	5	4

U: Výborne, teraz skúsme zameniť poradie funkcií.

Ž: *Takže najprv pohľadám také hodnoty funkcie g, aby platilo $g(x) \in \mathcal{D}(f)$. To sú čísla* 2; 4; 5; 4. *K nim odpovedajúce x sú* 4; 0; 1; 7. *Môžem písať tabuľku, do druhého riadku pôjdu hodnoty $f(g(x))$:*

x	4	0	1	7
$f(g(x))$	8	6	7	6

U: Výborne.

Príklad 6: *Rozhodnite o pravdivosti tvrdení:*
a) Ak sú f, g rastúce funkcie, potom aj $g \circ f$ je rastúca funkcia.
b) Ak sú f, g klesajúce funkcie, potom aj $g \circ f$ je klesajúca funkcia.

U: Najprv si zopakujme, čo to znamená, že funkcia je rastúca.

Ž: *Funkcia f sa nazýva rastúca práve vtedy, keď pre všetky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ platí*

$$\text{ak } x_1 < x_2, \text{ tak } f(x_1) < f(x_2).$$

U: Výborne, teda túto podmienku spĺňajú obe naše funkcie, f aj g. A my máme rozhodnúť, či to bude platiť aj pre funkciu $g \circ f$.

Ž: *To veru netuším, či to platí. Možno by som to mohol vyskúšať na nejakom konkrétnom príklade.*

U: Dobre, tak uvažujme lineárnu funkciu $f : y = x + 1$ a exponenciálnu funkciu $g : y = 2^x$. Obe sú definované na množine $\mathbb{R}$ a sú rastúce. Vytvor z nich zloženú funkciu $F = g \circ f$.

Ž: *Bude to funkcia $F : y = 2^{x+1}$. No to je opäť rastúca exponenciálne funkcia. Takže zdá sa, že tvrdenie by aj mohlo platiť.*

U: Skús to dokázať všeobecne.

Ž: *Nech teda x_1, x_1 sú ľubovoľné dve čísla z $\mathcal{D}(f)$ také, že*

$$x_1 < x_2.$$

U: Treba hneď dodať, že to majú byť také čísla, aby hodnoty funkcie f v týchto bodoch patrili do definičného oboru funkcie g.

Ž: *Keďže funkcia f je rastúca, tak potom platí*

$$f(x_1) < f(x_2),$$

ďalej budem počítať hodnoty funkcie g v bodoch $f(x_1), f(x_2)$. Ale keďže g je tiež rastúca funkcia, tak z predpokladu $f(x_1) < f(x_2)$ vyplýva, že

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)).$$

A tým som vlastne dokázal, že zložená funkcia $g \circ f$ je tiež rastúca, prvé tvrdenie platí.

U: Výborne. A čo si myslíš o situácii, kde f, g sú klesajúce funkcie?

Ž: *To je veľmi podobné, takže podľa mňa bude platiť, že aj zložená funkcia $g \circ f$ je klesajúca.*

U: Tak to poďme overiť napríklad na intervale $(0; \infty)$, kde funkciu $f : y = \dfrac{1}{x}$ zložíme samu so sebou.

Ž: *Potom $f \circ f$ je daná predpisom*

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

To je nejaké čudné, veď funkcia $f : y = \dfrac{1}{x}$ je klesajúca na $(0; \infty)$, ale výsledok $y = x$ je rastúca funkcia. Asi to neplatí.

U: Skúsme zovšeobecniť naše úvahy a uvidíme, kde bol háčik.

Ž: *Nech teda* x_1, x_1 *sú ľubovoľné dve čísla z* $\mathcal{D}(f)$ *také, že*

$$x_1 < x_2,$$

navyše také, že $f(x_1), f(x_2) \in \mathcal{D}(g)$. *Potom keďže funkcia* f *je klesajúca, tak platí*

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ale funkcia g *je tiež klesajúca, takže*

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)).$$

Aha, už to vidím, znak nerovnosti sa dvakrát obrátil, preto je výsledkom rastúca funkcia. Teda druhé tvrdenie neplatí.