Transformácie grafu funkcie I

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: V niektorých rozprávkach vystupujú čarovné mešce či kalichy, ktoré dokážu z mála vyčariť veľa. My sa dnes pokúsime o niečo podobné.

Ž: *Budeme čarovať?*

U: Skoro. Ukážeme si totiž, ako šikovne znásobiť naše vedomosti o funkciách. Ak poznáme grafy základných funkcií, môžeme sa naučiť pomocou niekoľkých šikovných trikov zostrojiť grafy obrovského množstva ďalších funkcií.

Ž: *Aha, už tuším, čo máte na mysli. Asi budeme grafy nejako otáčať alebo posúvať alebo niečo podobné.*

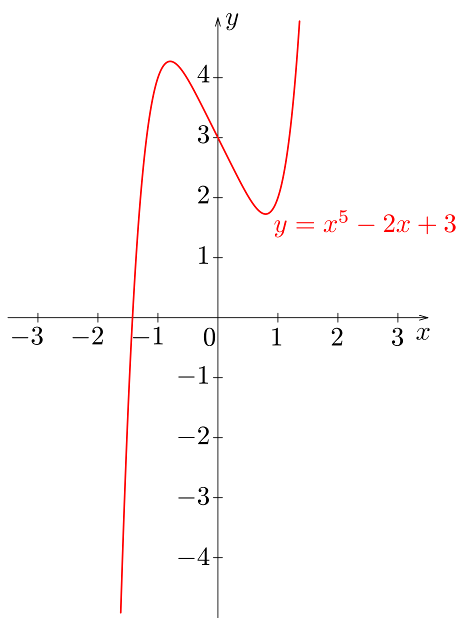
U: Máš pravdu, poďme na to. V prvej situácii sa budeme zaoberať dvojicou grafov funkcií

$$y = f(x) \quad \text{a} \quad y = -f(x).$$

Nech teda f je ľubovoľná funkcia, napríklad

$$f : y = x^5 - 2x + 3.$$

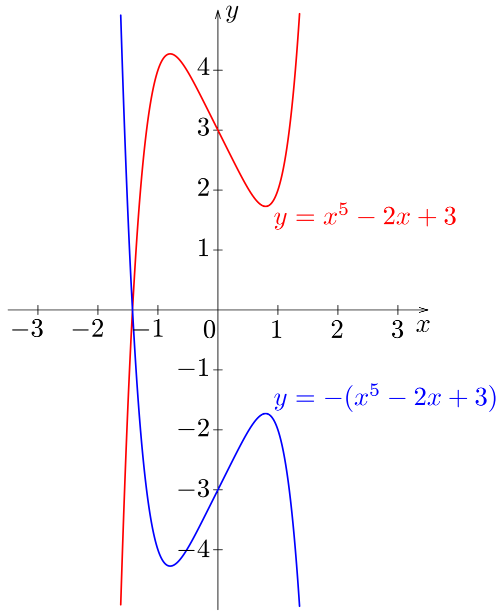
Jej graf vidíš na obrázku:



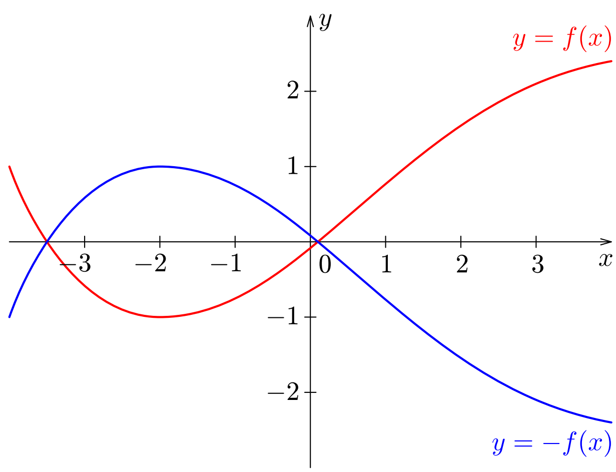
Čo myslíš, ako vyzerá graf funkcie

$$g : y = -(x^5 - 2x + 3)?$$

Ž: *Znamienko mínus, ktoré ste tam vložili, spôsobí, že sa hodnoty funkcie zmenia na opačné. Napríklad pre bod* 0 *platí, že* $f(0) = 3$*, ale* $g(0) = -3$*. Teraz si predstavím, že sa toto stane s každým bodom. Teda ak ležal nad osou* x*, ocitne sa pod ňou a naopak. Preto si myslím, že sa graf vlastne zobrazí osovo súmerne podľa osi* x*. Bude to vyzerať ako na ďalšom obrázku:*



U: Podstatu si celkom dobre vystihol, takže tvoje pozorovanie môžeme zovšeobecniť:
Graf funkcie $y = -f(x)$ ***je súmerne združený s grafom funkcie*** $y = f(x)$ ***v osovej súmernosti podľa osi*** x***.***

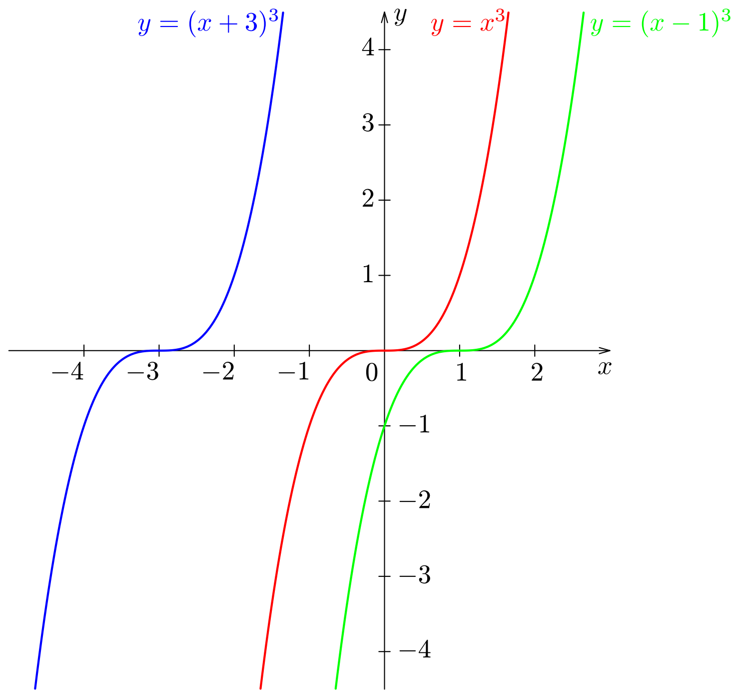


Ž: *Je to naozaj celkom dobrý trik, ako získať graf novej funkcie. Aké sú ďalšie?*

U: Druhý trik nie je zložitý a určite ho objavíš sám, ak sa dobre pozrieš na ďalší obrázok. Sú na ňom nakreslené grafy troch funkcií

$$y = x^3, \quad y = (x-1)^3, \quad y = (x+3)^3.$$

V akom vzťahu sú podľa teba tieto grafy?



Ž: *Tvar grafu sa nezmenil, je to vlastne stále tá istá krivka. Graf funkcie* $y = x^3$ *poznám, je to tá červená krivka prechádzajúca bodom* $[0; 0]$*. A zvyšné dve krivky vznikli z nej jednoducho posunutím.*

U: Súhlasím, skús však bližšie špecifikovať toto posunutie. Ktorým smerom a o koľko treba graf funkcie $y = x^3$ posunúť?

Ž: *Myslím si, že v prípade funkcie* $y = (x-1)^3$ *došlo k posunutiu doprava o* 1 *dielik pozdĺž osi* x*.*

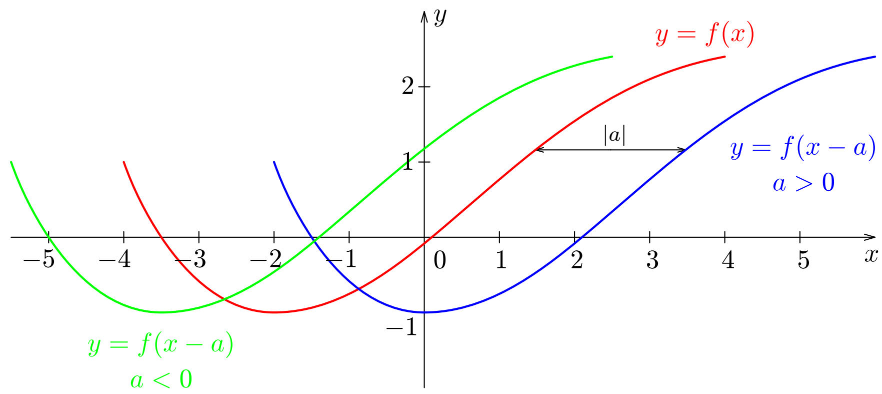
U: Áno, priesečník grafu funkcie s osou x, bod $[0; 0]$ sa posunul naozaj o jeden dielik doprava do bodu $[1; 0]$, pretože v tomto bode platí

$$(1-1)^3 = 0.$$

Ž: *Zato pri funkcii* $y = (x+3)^3$ *treba posunúť graf doľava o* 3 *dieliky. Môžem si to skontrolovať opäť na priesečníku grafu s osou* x*, teraz to bude bod* $[-3; 0]$*, lebo platí*

$$(-3+3)^3 = 0.$$

U: Výborne, skúsme zovšeobecniť:
Graf funkcie $y = f(x-a)$, $a \neq 0$ ***zostrojíme posunutím grafu funkcie*** $y = f(x)$ ***v smere osi*** x ***doprava (ak*** $a > 0$***) alebo doľava (ak*** $a < 0$***), veľkosť posunutia je*** $|a|$***.***



Ž: *Na obrázku vidím, že z pôvodne červeného grafu funkcie sme dostali modrý graf posunutím doprava a zelený graf posunutím doľava.*

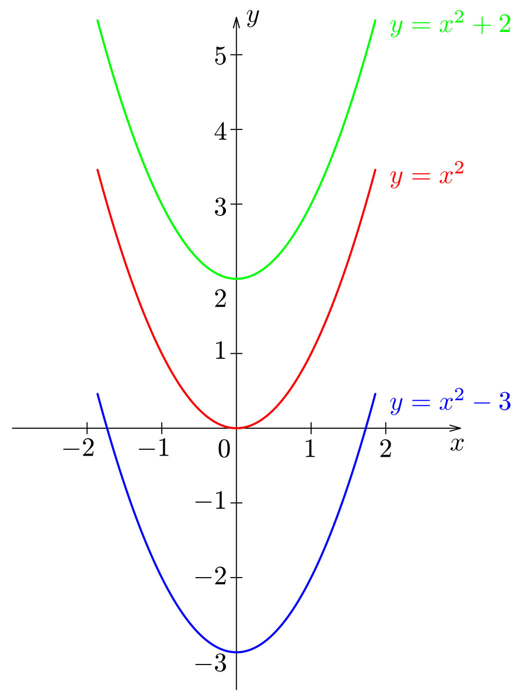
Ž: *Rozmýšľam teraz nad tým, že ak za a budem dosadzovať ľubovoľné čísla, môžem takto získať z jedného grafu funkcie nekonečne veľa ďalších?*

U: Áno.

Ž: *Šikovný trik, začína sa mi to páčiť. Čo ďalej?*

U: Posledný trik, ktorý si ukážeme, bude veľmi podobný. Opäť začneme konkrétne. Na obrázku sú zostrojené grafy funkcií

$$y = x^2, \quad y = x^2 - 3, \quad y = x^2 + 2.$$



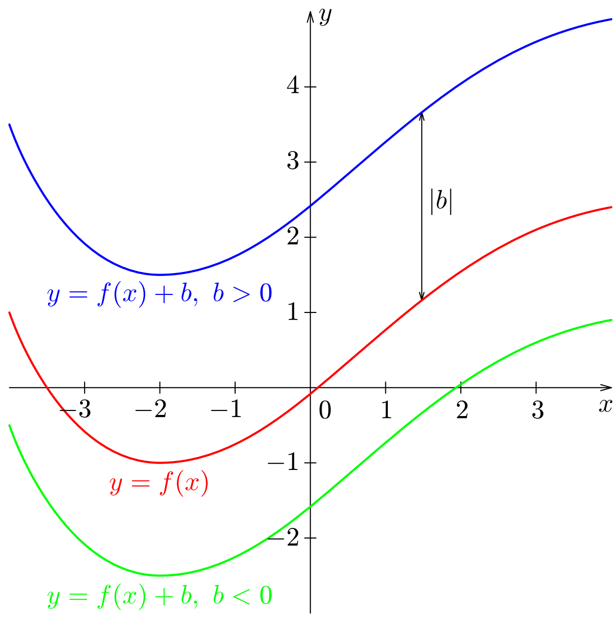
V akom vzťahu sú podľa teba tieto grafy?

Ž: *To je jasné, opať došlo k posunutiu grafu, ale tentoraz pozdĺž osi y-ovej. Graf funkcie $y = x^2$ je červená parabola prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy. Graf funkcie $y = x^2 + 2$ je taká istá parabola, len posunutá nahor o 2 dieliky.*

U: Áno, je to spôsobené tým, že funkcia $y = x^2 + 2$ priradí každému reálnemu číslu x hodnotu o 2 väčšiu ako mu priradila funkcia $y = x^2$.

Ž: *A zase funkcia $y = x^2 - 3$ priradí každému číslu hodnotu o 3 menšiu, preto grafom bude parabola posunutá o 3 dieliky nadol.*

U: Môžeme sformulovať záver:
Graf funkcie $y = f(x) + b$, $b \neq 0$ zostrojíme posunutím grafu funkcie $y = f(x)$ v smere osi y nahor (ak $b > 0$) alebo nadol (ak $b < 0$), veľkosť posunutia je $|b|$.

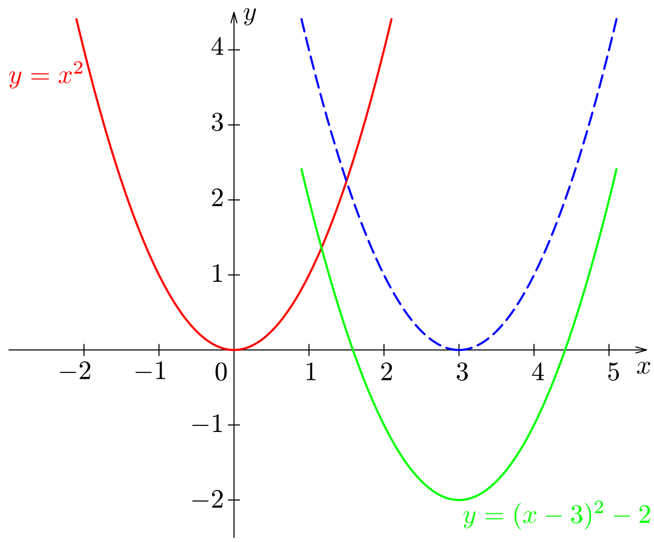


U: „Triky“, ktoré sme si ukázali, predstavujú ***transformácie grafov funkcií***. Umožňujú nám rýchlejšie zostrojiť grafy zložených funkcií, pričom môžeme v jednej úlohe použiť aj viac transformácií.

Ž: *Viem, ako to myslíte. Napríklad graf funkcie*

$$y = (x - 3)^2 - 2$$

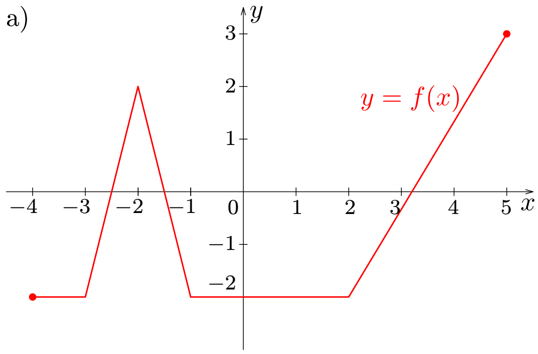
by som zostrojil tak, že by som obyčajnú červenú parabolu $y = x^2$ posunul najprv o 3 dieliky doprava po osi x-ovej a dostal by som čiarkovanú parabolu $y = (x - 3)^2$. Tú by som potom ešte posunul o 2 dieliky nadol po osi y-ovej. Vyzeralo by to takto:



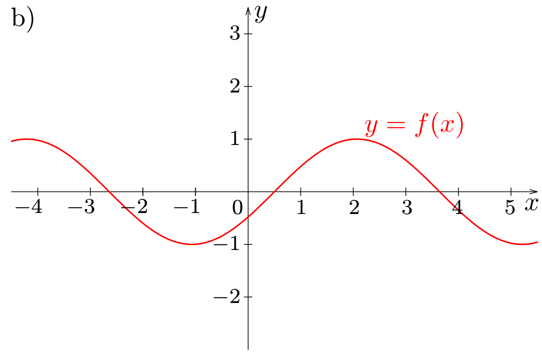
U: Výborne.

Príklad 1: *Daný je graf funkcie $y = f(x)$. Načrtnite graf funkcie $y = -f(x)$.*

a)



b)



U: Najprv si uvedom, aký je rozdiel medzi predpismi $y = f(x)$ a $y = -f(x)$.

Ž: *Rozdiel je iba v znamienku. To znamená, že druhá funkcia bude nadobúdať presne opačné hodnoty ako prvá.*

U: Ako sa to prejaví na grafe?

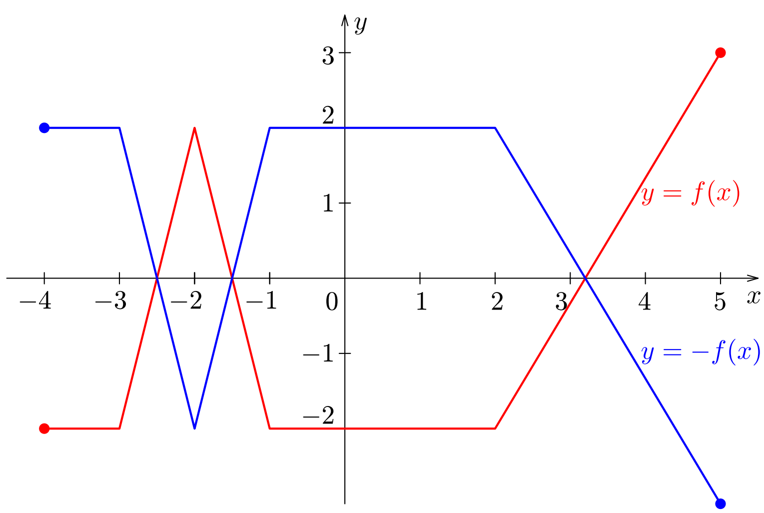
Ž: *Vlastne každý bod na grafe zmení svoju y-ovú súradnicu z kladnej na zápornú alebo opačne. Teda ak predtým bod ležal nad osou x, teraz bude ležať pod ňou a naopak.*

U: Nájdu sa aj také body, ktoré nezmenia svoju polohu?

Ž: *Áno, budú to body na x-ovej osi.*

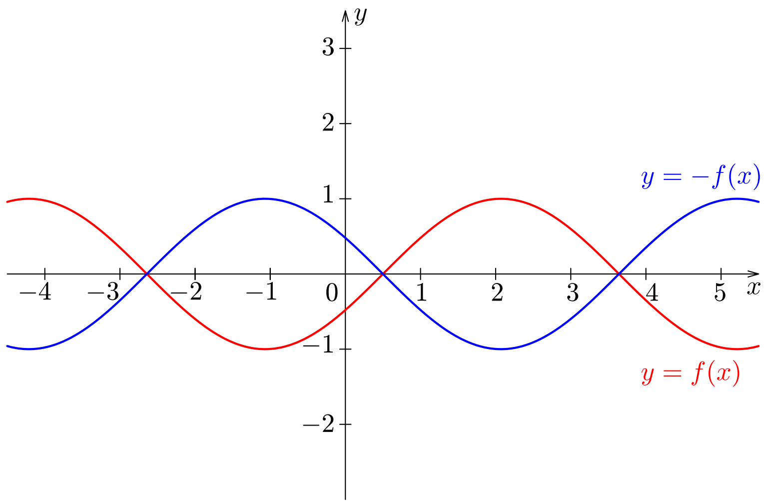
U: Môžeme teda povedať, že dôjde k zobrazeniu grafu funkcie osovo súmerne podľa osi x.

Ž: *Áno, už to aj kreslím, preklápam to podľa osi x-ovej a prvý graf vyzerá takto:*



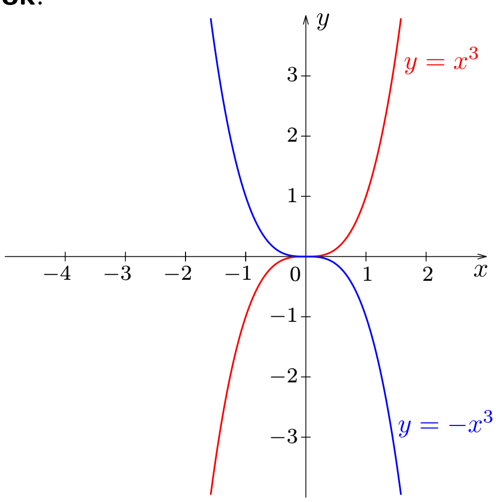
U: Výborne. V druhej časti úlohy máš goniometrickú funkciu.

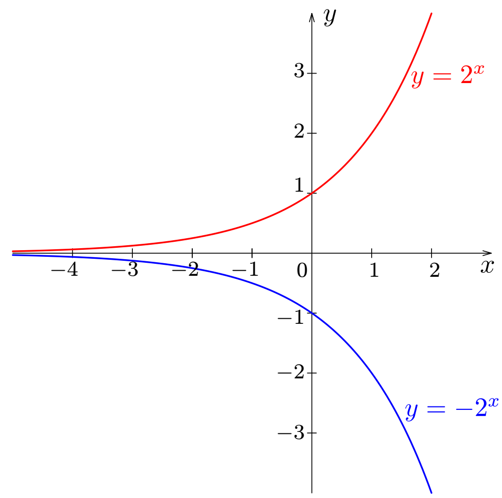
Ž: *Ale princíp ostáva ten istý, aby som zostrojil graf funkcie $y = -f(x)$, zobrazím pôvodný graf osovo súmerne podľa osi x-ovej. Dostanem takýto výsledok:*



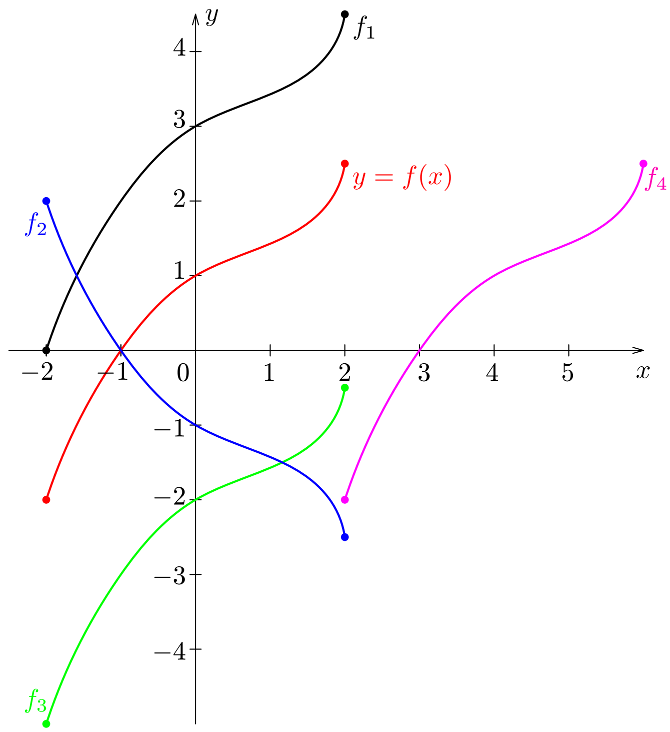
Úloha 1: *Zostrojte grafy funkcií $f : y = x^3$ a $g : y = 2^x$. Potom zostrojte grafy funkcií $f_1 : y = -x^3$ a $g_1 : y = -2^x$.*

Výsledok:





Príklad 2: *Pomocou funkcie f určte rovnice funkcií f_1 až f_4, ktorých grafy sú na obrázku:*



U: Červenou farbou máme zostrojený graf funkcie $y = f(x)$, z ktorého budeme vychádzať. Pomocou neho skús odvodiť rovnice ostatných funkcií.

Ž: *Idem postupne, začnem funkciou f_1. Jej graf je nakreslený čiernou farbou a vidím, že má taký istý tvar ako graf funkcie $y = f(x)$, len je posunutý nahor pozdĺž osi y-ovej.*

U: O koľko je posunutý?

Ž: *O 3 dieliky, pretože os y-ovú pretína v trojke.*

U: Pozor, ale pôvodný graf $y = f(x)$ pretína os y-ovú v jednotke.

Ž: *Aha, takže sa to posunulo len o dva dieliky nahor. Potom predpis funkcie f_1 bude*

$$f_1 : y = f(x) + 2.$$

U: Áno, funkcia f_1 priradí každému bodu z definičného oboru hodnotu o 2 väčšiu ako priradila funkcia f.

Ž: *Pokračujem druhou funkciou f_2. Jej graf je nakreslený modrou farbou a vidím, že je vlastne súmerný s grafom funkcie f podľa x-ovej osi. Preto je funkcia f_2 daná predpisom*

$$f_2 : y = -f(x).$$

U: Máš pravdu, táto funkcia priradí každému bodu z definičného oboru opačnú hodnotu než mu priradila pôvodná funkcia.

Ž: *Tretia funkcia f_3 je vlastne ten istý prípad ako prvá. Zelený graf je oproti červenému tiež posunutý pozdĺž osi y, ale teraz o 3 dieliky nadol. Takže predpis funkcie f_3 je*

$$f_3 : y = f(x) - 3.$$

U: Výborne, ostala ti posledná funkcia f_4, jej graf je vyznačený fialovou farbou.

Ž: *Tu opäť došlo k posunutiu červeného grafu, ale tentoraz pozdĺž osi x, o 4 dieliky doprava. Len teraz neviem, ako tú štvorku namontovať do predpisu funkcie.*

U: Zopakujme si, že ak dôjde k posunutiu grafu funkcie pozdĺž osi x, ide o transformáciu grafu danú rovnicou

$$y = f(x - a).$$

Pritom ak $a > 0$, posúva sa graf doprava, ak $a < 0$, posúva sa doľava. Veľkosť posunutia udáva číslo $|a|$.

Ž: *Čiže v našom prípade, ak sa graf posunul o 4 dieliky doprava, tak*

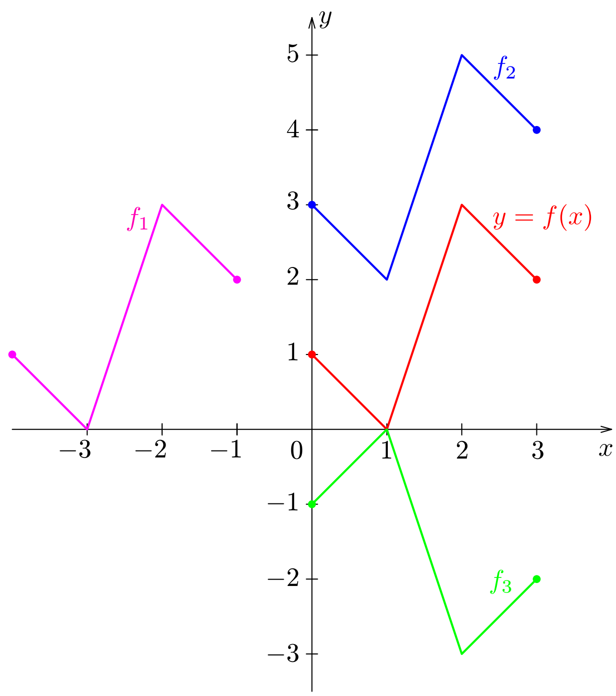
$$f_4 : y = f(x - 4).$$

U: Overiť si to môžeme na čísle 3, pre ktoré platí

$$f_4(3) = f(3 - 4) = f(-1) = 0$$

a na grafe vidíme, že číslo 3 je naozaj nulový bod funkcie f_4.

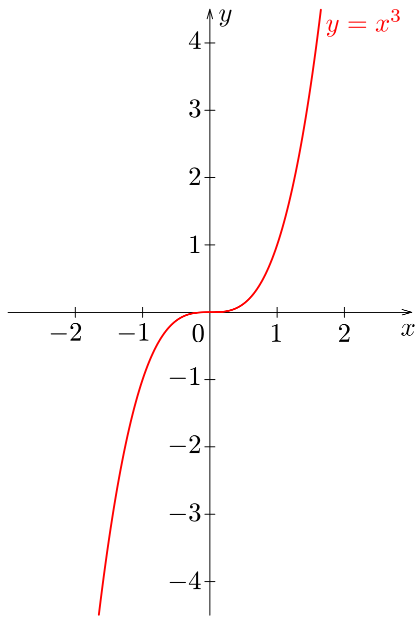
Úloha 2: *Pomocou funkcie f určte rovnice funkcií f_1 až f_3, ktorých grafy sú na obrázku:*



Výsledok: $f_1 : y = f(x + 4)$; $\quad f_2 : y = f(x) + 2$; $\quad f_3 : y = -f(x)$

Príklad 3: *Zostrojte graf funkcie* $f : y = x^3$. *Pomocou neho zostrojte grafy funkcií* $g : y = x^3 - 2$ *a* $h : y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

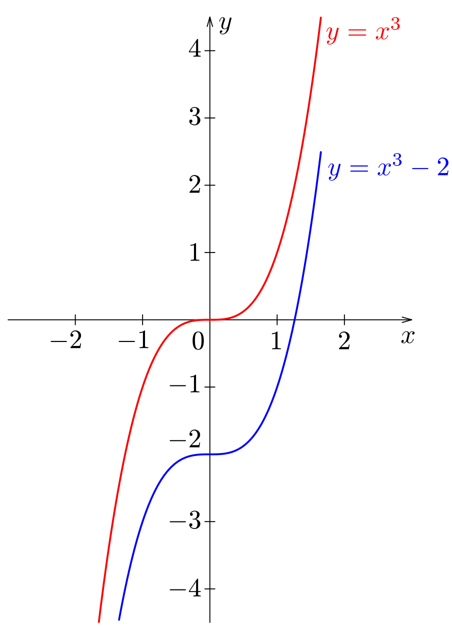
Ž: *Graf funkcie* $f : y = x^3$ *poznám, je to kubická funkcia, graf prechádza bodom* $[0; 0]$ *a vyzerá takto:*



U: Dobre, a teraz skús do toho istého obrázka prikresliť graf funkcie

$$g : y = x^3 - 2.$$

Ž: *To nie je ťažké, pretože funkcia* g *priradí každému reálnemu číslu hodnotu o* 2 *menšiu než funkcia* f. *To znamená, že graf funkcie* g *vznikne posunutím grafu funkcie* f *o* 2 *dieliky nadol. Vyzerá to takto:*



U: Tak ešte skús funkciu

$$h : y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Ž: *Jednotka na konci by znamenala posunúť graf o 1 dielik nahor, ale čo s tým* $3x^2 + 3x$*?*

U: Takto to nepôjde. Skús znova a dobre sa pozri na výraz

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

nepripomína ti niečo?

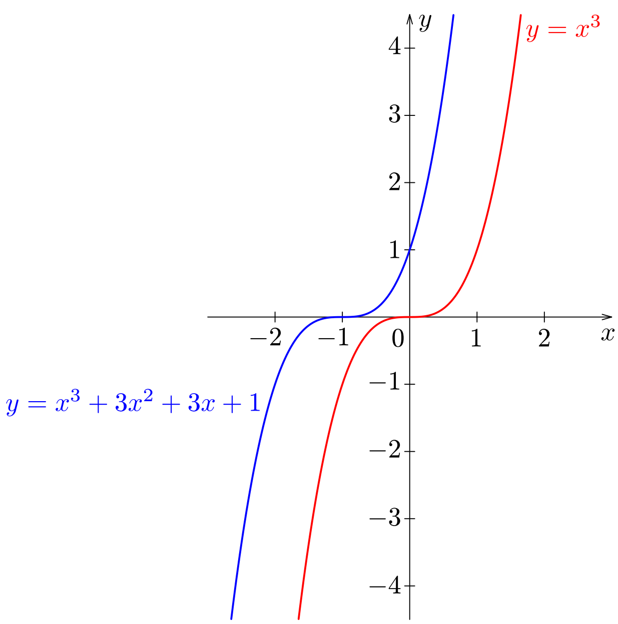
Ž: *No jasné, vzorec* $(a + b)^3$*!*

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Čiže môžem písať, že

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3.$$

A to znamená, že graf funkcie f *posuniem o 1 dielik doľava a dostanem takýto graf funkcie* h*:*

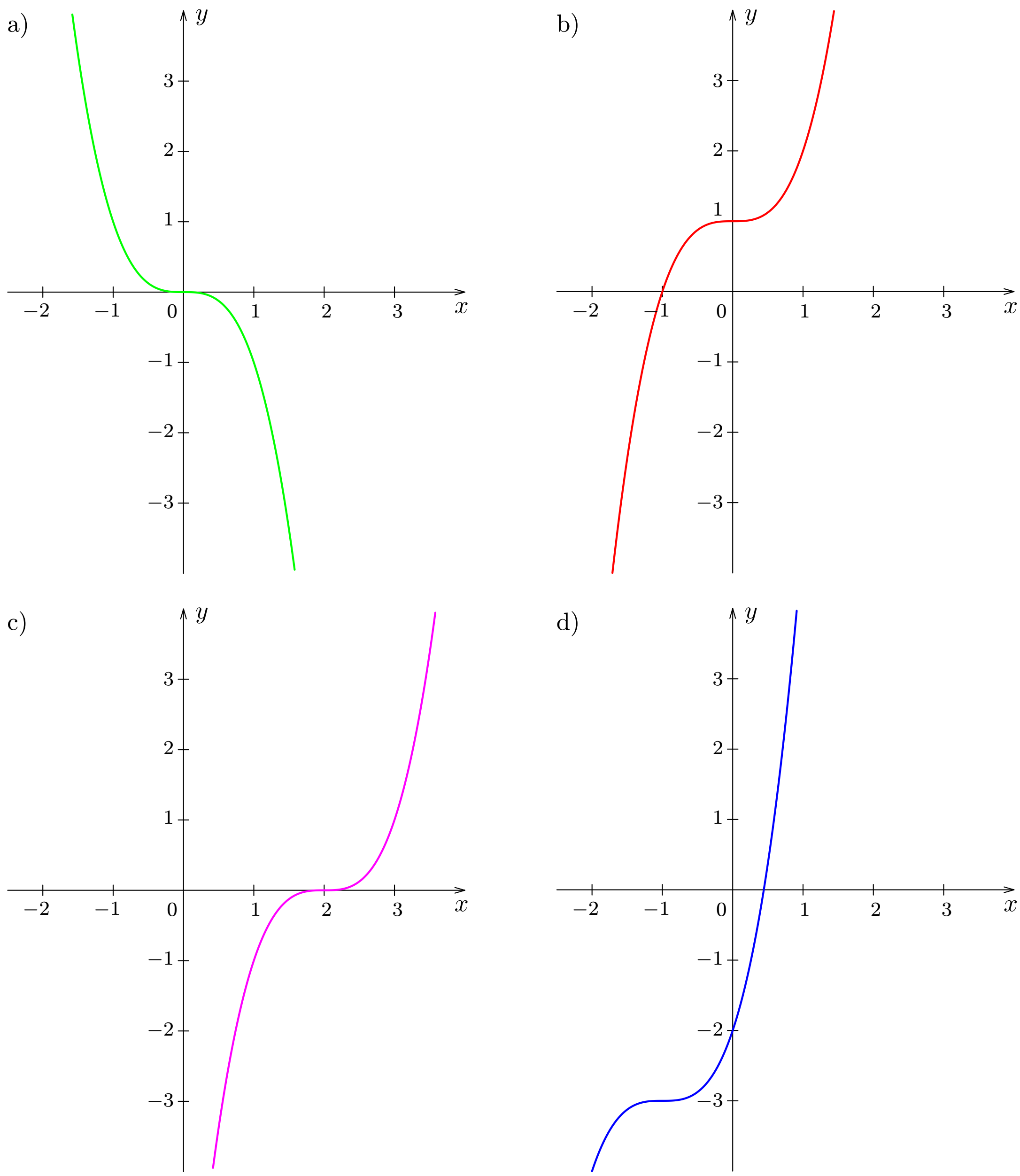


U: Už len pripomeniem, že ide o funkciu typu $y = f(x - a)$, ktorú môžeme zapísať ako $y = (x + 1)^3 = (x - (-1))^3$. Teda a je záporné číslo, preto graf posúvame doľava. Tak si mohol vidieť, že ak šikovne upravíme predpis funkcie, môže nám to veľmi uľahčiť zostrojenie jej grafu.

Úloha 3: *Priraďte k funkciám*

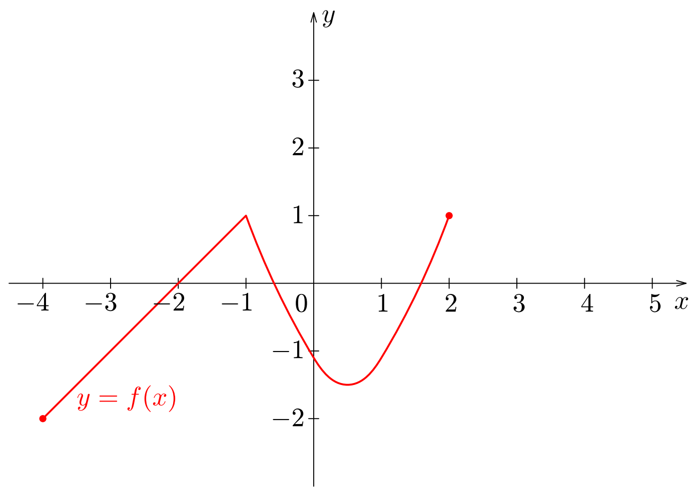
$$y = (x + 1)^3 - 3; \quad y = x^3 + 1; \quad y = (x - 2)^3; \quad y = -x^3$$

ich grafy na nasledujúcom obrázku:



Výsledok: $a)\, y = -x^3$; $b)\, y = x^3 + 1$; $c)\, y = (x-2)^3$; $d)\, y = (x+1)^3 - 3$

Príklad 4: *Daný je graf funkcie f. Načrtnite graf funkcie $y = f(x-3)+2$.*



Ž: *Pri riešení tejto úlohy použijem transformácie grafu funkcie. Viem, že graf funkcie $y = f(x-a)$ je oproti grafu funkcie $y = f(x)$ posunutý.*

U: Charakterizuj bližšie toto posunutie.

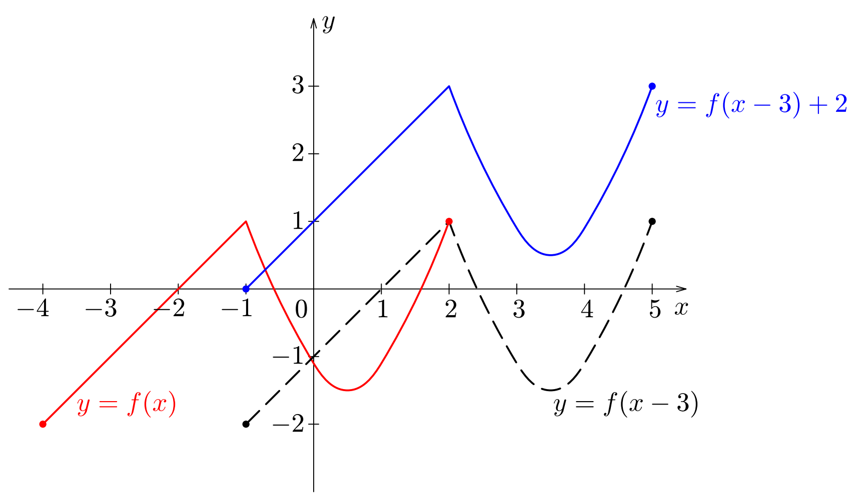
Ž: *Bude to posunutie pozdĺž osi x a to tak, že pre $a > 0$ posúvam vpravo, dĺžka posunutia je a dielikov. Pre $a < 0$ posuniem graf doľava. Teda v mojom prípade predpis*

$$y = f(x-3)+2$$

hovorí, že najprv posuniem pôvodný graf o 3 dieliky vpravo. Dostanem ako medzikrok čiarkovaný graf funkcie $y = f(x-3)$.

U: Veľmi dobre, ešte mi vysvetli, ako ovplyvní graf dvojka na konci predpisu.

Ž: *Teraz zase použijem to, že graf funkcie $y = f(x)+b$ je oproti grafu $y = f(x)$ posunutý v smere osi y. V mojom prípade $b = 2$ je kladné číslo, takže posuniem graf funkcie $y = f(x-3)$ nahor o 2 dieliky. Výsledok je na obrázku:*



Príklad 5: *Pomocou grafu funkcie $f: y = x^2$ zostrojte grafy funkcií $g: y = x^2 + 6x + 8$ a $h: y = -x^2 + 2$.*

Ž: *Grafom funkcie $f: y = x^2$ je parabola s vrcholom v bode $[0; 0]$, to vie každý. Teraz by som mal asi nejako upraviť predpis funkcie $g: y = x^2 + 6x + 8$.*

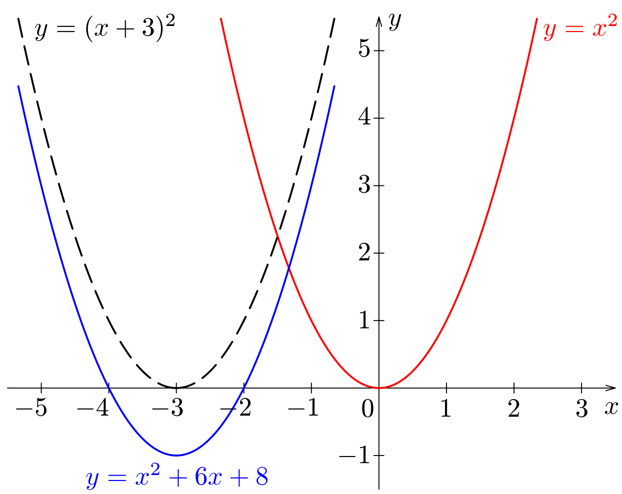
U: Skús použiť dopĺňanie úpravou na štvorec.

Ž: *Skúsim, teda*

$$y = x^2 + 6x + 8 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 8 = (x + 3)^2 - 1.$$

U: Z tohto výsledného tvaru už pekne vidno, ako budeme graf transformovať.

Ž: *Áno, trojka v zátvorke znamená, že červenú parabolu $y = x^2$ posunieme o 3 dieliky doľava. Teda vrchol paraboly sa z bodu $[0; 0]$ posunie do bodu $[-3; 0]$. Dostaneme čiarkovanú parabolu $y = (x + 3)^2$. A potom ešte posunieme tento čiarkovaný graf o 1 dielik nadol takto:*

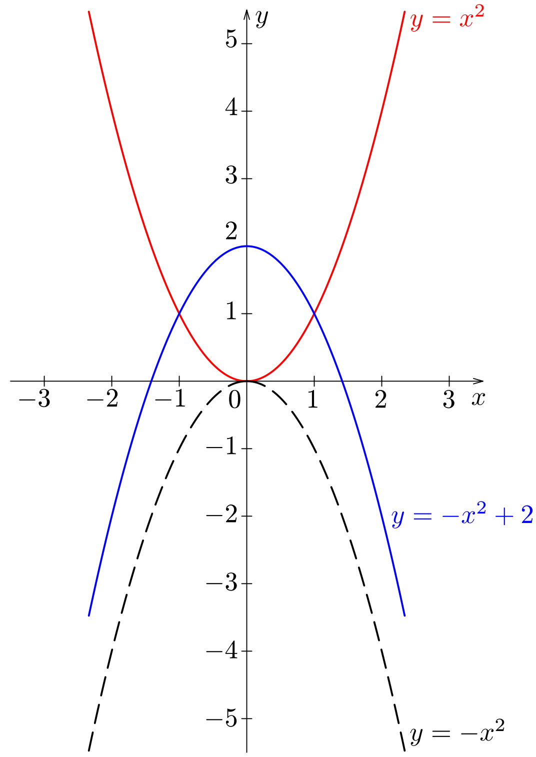


U: Teda výsledkom je parabola s vrcholom v bode $[-3; -1]$:

Ž: *Graf funkcie*

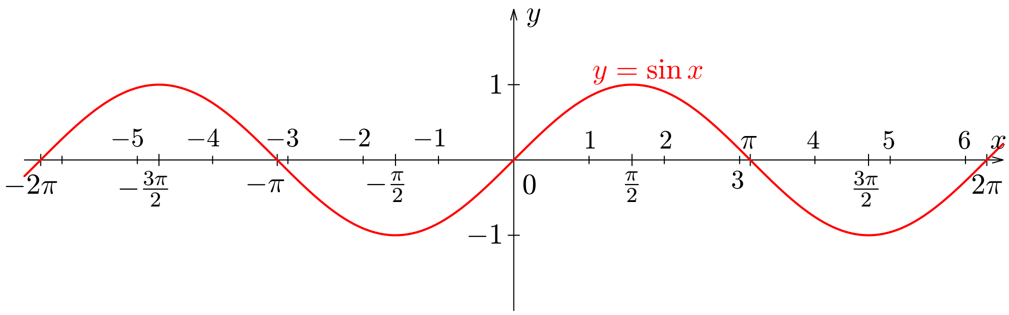
$$h: y = -x^2 + 2$$

bude tiež vyžadovať dva kroky. Najprv parabolu $y = x^2$ preklopím podľa osi x-ovej, pretože v predpise je mínus pred x^2. A potom túto preklopenú parabolu posuniem o 2 dieliky nahor:


$y = x^2$
$y = -x^2 + 2$
$y = -x^2$
x
y

Príklad 6: *Pomocou grafu funkcie* $f : y = \sin x$ *zostrojte grafy funkcií* $g : y = -\sin x$ *a* $h : y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ž: *Grafom funkcie* $f : y = \sin x$ *je takáto krivka:*



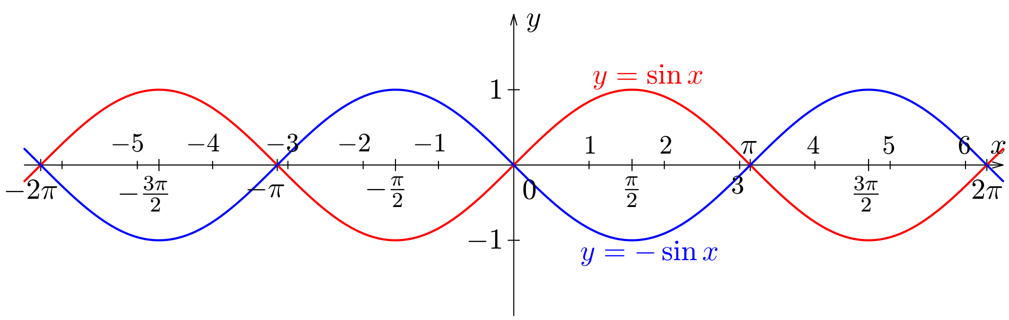
U: Hovoríme jej tiež sínusoida.

Ž: *Graf funkcie*

$$g : y = -\sin x$$

bude tiež sínusoida, len bude obrazom pôvodnej v osovej súmernosti podľa osi x*-ovej. Bude to preto, lebo každému číslu priradí opačnú hodnotu ako pôvodná funkcia. Takže oblúčik, ktorý bol nad osou* x*, bude pod ňou a naopak.*

U: Áno, a na svojom mieste zostanú všetky nulové body funkcie, teda graf vyzerá takto:



Ž: *Teraz sa pozriem na funkciu*

$$h : y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Jej grafom bude opäť sínusoida, ale bude posunutá v smere osi x*-ovej o* $\frac{\pi}{6}$. *Len nie som si istý, či doľava alebo doprava.*

U: V takom prípade urč hodnoty funkcie napríklad v bodoch 0 a $\frac{\pi}{6}$.

Ž: *Dobre, dosadzujem*

$$h(0) = \sin\left(0 - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 0 = 0.$$

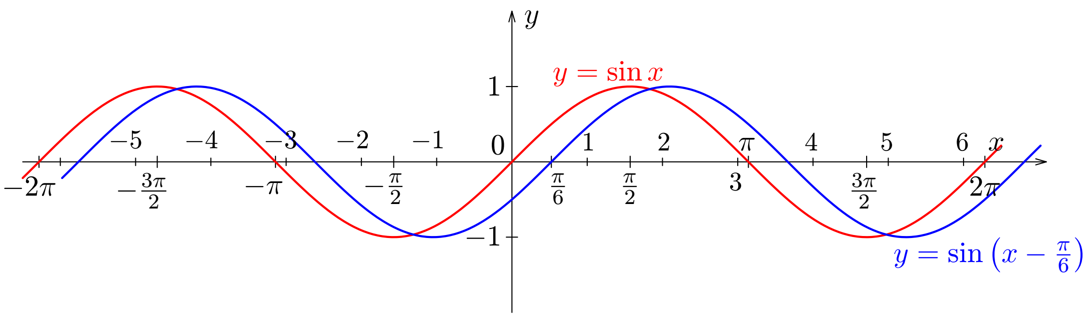
Čo s tým?

U: Váhaš medzi tým, či graf funkcie $y = \sin x$ posunúť o $\dfrac{\pi}{6}$ vpravo alebo vľavo. Predstav si alebo nakresli obe možnosti a rozhodni, v ktorej bude platiť, že $h(0) = -\dfrac{1}{2}$ a $h\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Ž: *Bude to vtedy, ak graf posuniem doprava, vtedy sa nulový bod* $[0; 0]$ *posunie do bodu* $\left[\frac{\pi}{6}; 0\right]$.

U: Presne tak, ja len zopakujem všeobecne, že graf funkcie $y = f(x - a)$ je posunutý oproti grafu funkcie $y = f(x)$ pozdĺž osi x vpravo, ak $a > 0$ a vľavo, ak $a < 0$. Dĺžka posunutia je $|a|$.

Ž: *Medzitým som už nakreslil graf funkcie h, tu je:*



Úloha 6: *Pomocou grafu funkcie* $f: y = \cos x$ *zostrojte grafy funkcií* $g: y = 1 + \cos x$ *a* $h: y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Výsledok: