# Rovnosť funkcií. Periodická funkcia.

***RNDr. Beáta Vavrinčíková***

**U**: Začnem jednoduchou otázkou. Kedy sa podľa teba dve funkcie ***rovnajú***?

**Ž**: *No čo ja viem, asi keď majú úplne rovnaké grafy.*

**U**: S tým súhlasím. Teraz si však predstav, že ti zadám dve funkcie len pomocou definičných oborov a predpisov. Dalo by sa rozhodnúť, či sa tie dve funkcie rovnajú aj bez zostrojovania grafov? Skús porozmýšľať, začni tými definičnými obormi.

**Ž**: *Podľa mňa by sa definičné obory mali rovnať. Veď ak by napríklad jedna funkcia bola definovaná len pre kladné čísla a druhá len pre záporné, nijako by to nebolo to isté.*

**U**: Súhlasím, stačí aby sa definičné obory líšili len v jedinom bode, už by sa funkcie nerovnali. Prišli sme teda na prvú podmienku rovnosti dvoch funkcií, a tou je rovnosť definičných oborov.

**Ž**: *A teraz ešte treba vymyslieť, čo s predpismi funkcií. Najlepšie by bolo, keby sa tiež rovnali.*

**U**: Máš pravdu, ale to by bola veľmi triviálna situácia.

**Ž**: *Tak potom by na pohľad ani nemuseli vyzerať rovnako, ale stačilo by, keby dávali rovnaké výsledky.*

**U**: To je ono, potrebujeme, aby obidva predpisy dávali rovnaké funkčné hodnoty a to pre všetky prvky definičného oboru.
Takže to zhrniem:
***Hovoríme, že funkcia $f$ sa rovná funkcii $g$ práve vtedy, ak platí:***
***1)*** $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$
***2)*** $\forall x \in \mathcal{D}(f): \quad f(x) = g(x)$
***Zapisujeme*** $f = g$.

---

**U**: Teraz si to vyskúšajme na dvoch príkladoch. Najprv by si mal rozhodnúť, či sa rovnajú funkcie

$$f : y = (x+1)^2 \quad \text{a} \quad g : y = x^2 + 2x + 1.$$

**Ž**: *Začnem definičnými obormi. Tu netreba písať žiadne podmienky, teda*

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}.$$

*Pokračujem predpismi, pre každé reálne číslo $x$ platí:*

$$f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = g(x).$$

*Využil som vzorec pre druhú mocninu súčtu a vychádza mi, tieto dve funkcie sa rovnajú.*

**U**: Výborne, zapíšeme

$$f = g$$

a znamená to tiež, že aj ich grafy budú úplne rovnaké.
Teraz skúsme to isté pre dvojicu

$$h : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{a} \quad i : y = x + 2.$$

**Ž**: *Zasa treba začať definičnými obormi. Pre funkciu $h$ musím napísať podmienku $x - 2 \neq 0$, odkiaľ $x \neq 2$, teda*

$$\mathcal{D}(h) = \mathbb{R} - \{2\}\,.$$

*Ale funkcia $i$ nevyžaduje žiadnu podmienku, čiže*

$$\mathcal{D}(i) = \mathbb{R}.$$

*A už vidíme, že tieto dve funkcie sa nemôžu rovnať, keďže nemajú rovnaké definičné obory.*

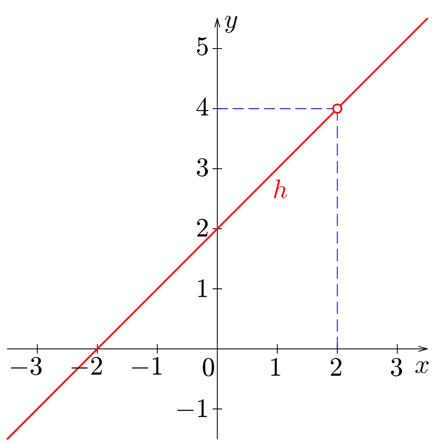
**U**: Áno, zapíšeme

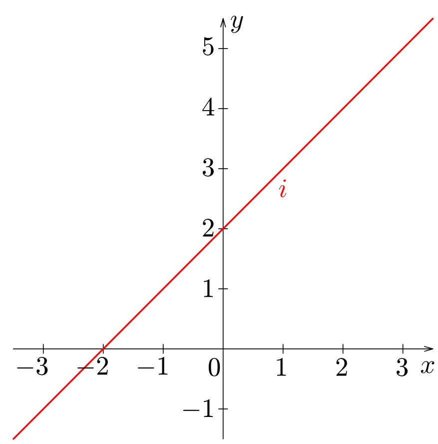
$$h \neq i.$$

Pre úplnosť ešte porovnám funkčné predpisy a zistím, že

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} : \; h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2 = i(x).$$

Výraz v čitateli som rozložil na súčin a po vykrátení som zistil, že funkcia $h$ nadobúda také isté hodnoty ako funkcia $i$. Výnimkou je iba bod $x = 2$, v ktorom funkcia $h$ nie je definovaná. Grafy týchto funkcií vidíš na obrázku:




**Ž**: *Sú skoro rovnaké, líšia sa iba v jednom bode.*

---

**U**: Teraz zmeňme tému a skús zostrojiť graf funkcie

$$f : y = (-1)^x, \text{ kde } \mathcal{D} = \mathbb{Z}.$$

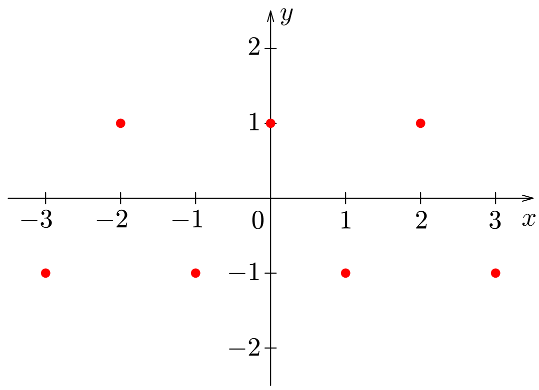
**Ž**: *Radšej si najprv pripravím tabuľku s niekoľkými hodnotami:*

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-1)^x$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |

*No to je zaujímavé, funkčné hodnoty sa pekne striedajú!*

**U**: Áno, pre párne $x$ bude $(-1)^x$ rovné jednej, ale pre nepárne $x$ bude $(-1)^x$ rovné mínus jednej.

**Ž**: *Preto graf bude vyzerať takto:*



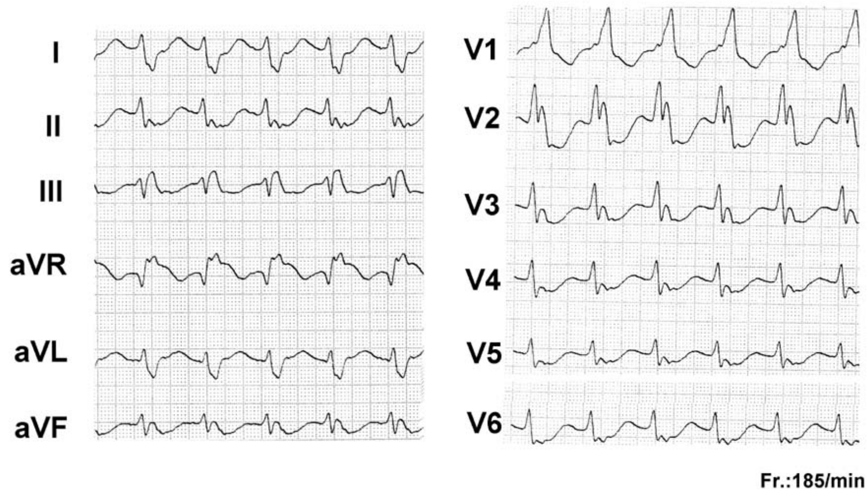

**U**: Čím je táto funkcia zaujímavá?

**Ž**: *Práve tým, že sa jej hodnoty pravidelne opakujú.*

**U**: Táto funkcia patrí medzi tzv. ***periodické funkcie***. Perióda je cudzie slovo a v preklade znamená časový úsek, ktorý uplynie medzi dvoma opakujúcim sa javmi. Napríklad mesačný spln nastane vždy po 28 dňoch, olympijské hry sa organizujú po 4 rokoch.

**Ž**: *Aj majstrovstvá sveta vo futbale sú každé štyri roky a majstrovstvá sveta v hokeji dokonca každý rok.*

**U**: Áno, veľa dejov okolo nás je periodických, aj keď si to možno neuvedomujeme. Napríklad naše srdce je tiež pravidelne pracujúci sval, môžeme si to všimnúť na obrázku z EKG:




**Ž**: *Niekedy sa stane, že srdiečko nepracuje takto pravidelne, ale to je už o inom ...*

**U**: Dobre, vrátim sa k pojmu perióda. Budeme ju označovať $p$, bude to kladné číslo a jeho význam je takýto:
Ak funkcia $f$ má byť periodická, a ja si vyberiem ľubovoľný bod $x$ z jej definičného oboru, tak po uplynutí periódy, teda ak sa posuniem po osi $x$-ovej do bodu $x + p$, musím dostať rovnakú funkčnú hodnotu, teda

$$f(x + p) = f(x).$$

Ale ak sa posuniem doľava do bodu $x - p$, alebo doprava o dve periódy do bodu $x + 2p$, tiež musím dostať rovnaké funkčné hodnoty, teda aj

$$f(x - p) = f(x + 2p) = f(x).$$

**Ž**: *Aha, ale takto sa po osi $x$-ovej môžem posúvať koľko chcem, ako to zapíšeme všeobecne?*

**U**: Zapíšeme $x+k\cdot p$, kde $k$ je celé číslo. Vo všetkých týchto bodoch musí byť funkcia definovaná a musí nadobúdať rovnaké hodnoty, čo zhrnieme do nasledujúcej definície:
***Funkcia $f$ sa nazýva periodická práve vtedy, keď existuje také kladné číslo $p$, že pre každé celé číslo $k$ platí:***

***1) ak $x \in \mathcal{D}(f)$, tak aj $x + k \cdot p \in \mathcal{D}(f)$***
***2) $f(x + k \cdot p) = f(x)$.***

***Číslo $p$ nazývame perióda funkcie $f$.***

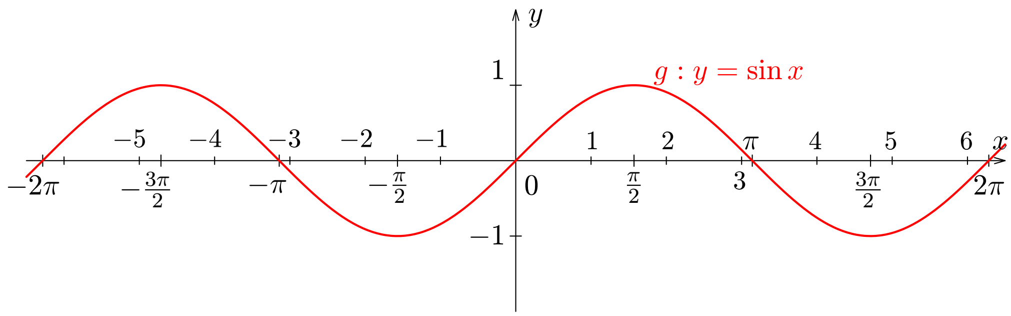
---

**Ž**: *Možno by to chcelo ešte nejakú ukážku.*

**U**: Nech sa páči. Najtypickejšími predstaviteľmi periodických funkcií sú goniometrické funkcie. Ukážme si funkciu

$$g : y = \sin x,$$

jej graf vidíš na obrázku:




S touto funkciou sa stretávame pri striedavom elektrickom prúde, pri rôznych vlneniach, kmitavých pohyboch a pod. Skúsil by si z grafu určiť jej periódu?

**Ž**: *Graf je vlastne taká nekonečná vlnovka a jedna vlnka sa zopakuje, keď sa po osi $x$ posuniem o $2\pi$, to bude perióda.*

**U**: Áno, povieme tiež, že $p = 2\pi$ je ***najmenšia perióda***, pretože priebeh funkcie sa zopakuje aj po $4\pi$ alebo $100\pi$.

**Príklad 1**: *Rozhodnite, či sa rovnajú funkcie:*
*a)* $f_1 : y = x, \quad g_1 : y = |x|,$
*b)* $f_2 : y = (x-3)^2, \quad g_2 : y = x^2 - 6x + 9,$
*c)* $f_3 : y = \frac{x}{x}, \quad g_3 : y = 1,$
*d)* $f_4 : y = \frac{x+2}{x-1}, \quad g_4 : y = 1 + \frac{3}{x-1}.$

**U**: Zopakujme si, že ak sa dve funkcie majú rovnať, musia byť splnené dve podmienky. Ktoré?

**Ž**: *Prvou podmienkou je, aby sa rovnali definičné obory a druhou, aby sa pre všetky prvky z definičného oboru rovnali funkčné hodnoty.*

**U**: Výborne, môžeš začať s prvou dvojicou

$$f_1 : y = x, \quad g_1 : y = |x|.$$

**Ž**: *Obidve funkcie sú definované pre všetky reálne čísla, teda*

$$\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(g_1) = \mathbb{R}.$$

*To by bolo zatiaľ v poriadku, ale hodnoty sa rovnajú len na jednej polovici, pre nezáporné* $x$ *platí* $|x| = x$*, ale pre záporné* $x$ *už* $|x| = -x$*. Napríklad* $f_1(-3) = -3$*, ale* $g_1(-3) = |-3| = 3$*. Preto sa funkcie nemôžu rovnať,*

$$f_1 \neq g_1.$$

---

**U**: Veľmi dobre, pokračuj druhou dvojicou

$$f_2 : y = (x-3)^2, \quad g_2 : y = x^2 - 6x + 9.$$

**Ž**: *Tak tieto dve funkcie sa určite rovnajú, lebo vieme, že*

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

*podľa vzorca pre druhú mocninu rozdielu.*

**U**: To je pravda, aby si však naozaj mohol vyhlásiť záver, že

$$f_2 = g_2,$$

nezabudni zdôrazniť, že sa rovnajú aj definičné obory, v tomto prípade

$$\mathcal{D}(f_2) = \mathcal{D}(g_2) = \mathbb{R}.$$

---

**Ž**: *Na to som naozaj zabudol. Idem na tretiu dvojicu*

$$f_3 : y = \frac{x}{x}, \quad g_3 : y = 1.$$

*Na prvý pohľad to vyzerá, že by sa mohli rovnať, pretože* $\frac{x}{x} = 1$. *Ale dám si pozor, aby som nezabudol na definičné obory. Funkcia* $f_3$ *vyžaduje podmienku* $x \neq 0$, *teda* $\mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R} - \{0\}$, *funkcia* $g_3$ *je definovaná všade,* $\mathcal{D}(g_3) = \mathbb{R}$. *A už vidíme, že*

$$f_3 \neq g_3,$$

*keďže sa ich definičné obory líšia.*

**U**: Presne tak, preto je dôležité vždy skontrolovať aj rovnosť definičných oborov.

---

**Ž**: *Posledná dvojica funkcií vyzerá dosť zložito*

$$f_4 : y = \frac{x+2}{x-1}, \quad g_4 : y = 1 + \frac{3}{x-1}.$$

*Začnem definičnými obormi. Pre funkciu* $f_4$ *musí platiť* $x - 1 \neq 0$, *čiže* $x \neq 1$, *preto*

$$\mathcal{D}(f_4) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

*Pre funkciu* $g_4$ *napíšeme takisto* $x - 1 \neq 0$, *teda*

$$\mathcal{D}(g_4) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

**U**: Čiže definičné obory oboch funkcií sa rovnajú, môžeš pokračovať.

**Ž**: *Potrebujem porovnať funkčné hodnoty. Asi bude lepšie vyjsť z predpisu pre funkciu* $g_4$ *a skúsiť ho upraviť. Dostanem že*

$$\forall x \in \mathcal{D}(g_4) : g_4(x) = 1 + \frac{3}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{x+2}{x-1} = f_4(x).$$

*Ale to vlastne znamená, že obe funkcie sa rovnajú,*

$$f_4 = g_4.$$

**Úloha 1**: *Rozhodnite, či sa rovnajú funkcie:*

*a)* $f_1 : y = x, \quad g_1 : y = \frac{x^2}{x},$

*b)* $f_2 : y = \frac{1}{x}, \quad g_2 : y = \frac{x}{x^2},$

*c)* $f_3 : y = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}, \quad g_3 : y = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}},$

*d)* $f_4 : y = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}, \quad g_4 : y = x + 1.$

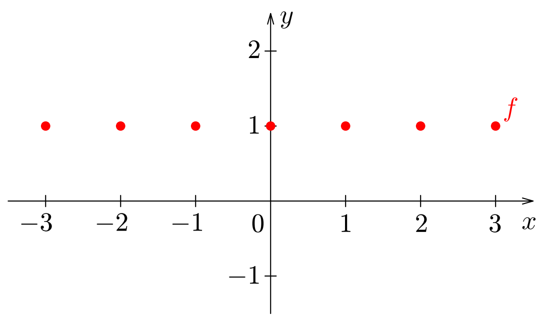
**Výsledok**: a) nie b) áno c) nie d) áno

**Príklad 2**: *Zistite, ktoré z daných funkcií sú periodické, určte ich najmenšiu periódu (ak existuje) a načrtnite graf:*
*a)* $f : y = 1^x, \quad x \in \mathbb{Z}$,
*b)* $g : y = 2, \quad x \in \mathbb{R}$,
*c)* $h : y = 1^x + (-1)^x, \quad x \in \mathbb{Z}$.

**Ž**: *Pri prvej funkcii*

$$f : y = 1^x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

*začnem tým, že jednotka umocnená na akékoľvek celé číslo mi dá vždy jednotku. Preto je to vlastne konštantná funkcia a jej graf tvorí takáto množina izolovaných bodov:*



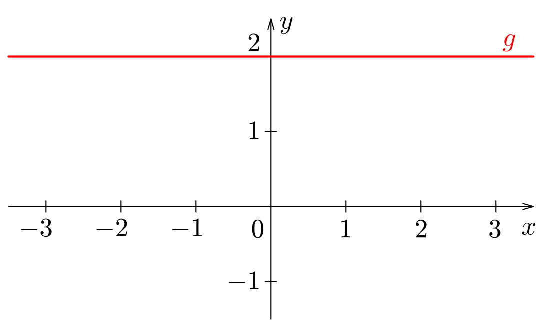

**U**: A je to periodická funkcia?

**Ž**: *Samozrejme, že je, jej najmenšia perióda bude* $p = 1$.

**U**: Dobre, zmení sa niečo, ak budeme uvažovať veľmi podobnú funkciu

$$g : y = 2, \quad x \in \mathbb{R}?$$

**Ž**: *Je to tiež konštantná funkcia, ale definovaná na množine* $\mathbb{R}$, *preto jej grafom bude priamka. Nezdá sa, že by to bola periodická funkcia.*




**U**: Nie? A prečo? Neopakuje sa vari hodnota 2?

**Ž**: *No, mohli by sme to tak zobrať, ale koľko by bola perióda?*

**U**: V tom je práve ten háčik, že ktorékoľvek kladné číslo je periódou tejto funkcie, neexistuje však najmenšia perióda.

**Ž**: *Aj tak je to dosť čudný príklad.*

**U**: Súhlasím, že je to dosť netypický príklad periodickej funkcie, možno sa ti viacej zapáči posledná funkcia

$$h : y = 1^x + (-1)^x, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

**Ž**: *Tak tu určite začnem vypisovaním niekoľkých hodnôt funkcie, aby som získal predstavu o jej priebehu:*

$$h(-3) = 1^{-3} + (-1)^{-3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{(-1)^3} = 1 - 1 = 0$$

$$h(-2) = 1^{-2} + (-1)^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-1)^2} = 1 + 1 = 2$$

$$h(-1) = 1^{-1} + (-1)^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$$

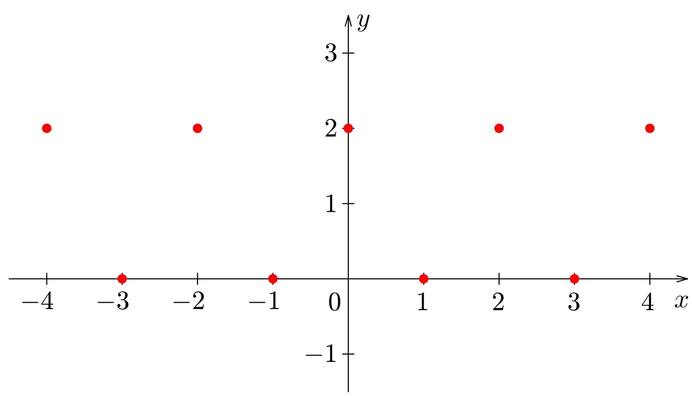
$$h(0) = 1^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$$

$$h(1) = 1^1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0.$$

*Už je to jasné, budú sa pravidelne striedať hodnoty* 0 *a* 2.

**U**: Áno, pre $x$ párne celé číslo bude $h(x) = 2$, ale pre $x$ nepárne celé číslo bude $h(x) = 0$.

**Ž**: *Graf je takáto množina skackajúcich izolovaných bodov:*




**U**: Ostáva ešte odpovedať na otázku, či to je periodická funkcia.

**Ž**: *Áno, s najmenšou periódou* $p = 2$.

**Úloha 2**: *Zisti, či dané funkcie sú periodické:*
*a)* $f : y = (-1)^{2x}, \quad x \in \mathbb{Z}$,
*b)* $g : y = 3x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

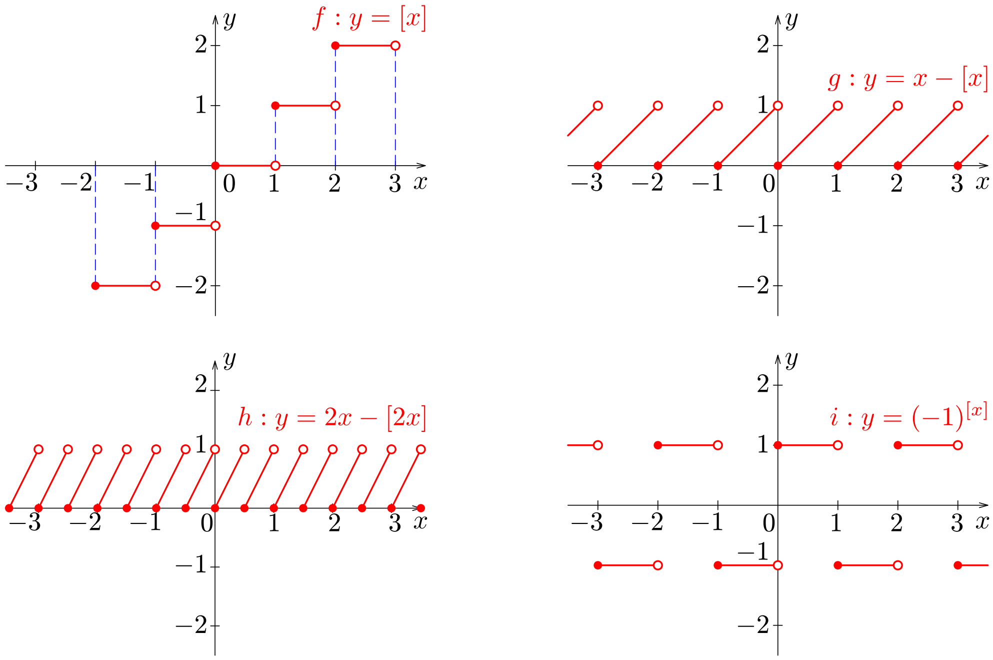
**Výsledok**: a) je periodická, $p = 1$ b) nie je periodická

**Príklad 3**: *Celou časťou reálneho čísla $x$ rozumieme najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu $x$ a označujeme ho $[x]$. Teda $[3,1] = 3$; $[5,75] = 5$; $[-4,2] = -5$; $[3] = 3$ atď. Na obrázku sú zostrojené grafy funkcií definovaných na $\mathbb{R}$:*

$$f : y = [x]\,, \quad g : y = x - [x]\,,$$

$$h : y = 2x - [2x]\,, \quad i : y = (-1)^{[x]}.$$

*Rozhodnite, či sú periodické a určte ich najmenšiu periódu.*




**Ž**: *Vidím, že je to celkom zaujímavá vec, tá celá časť. Na prvom grafe funkcie*

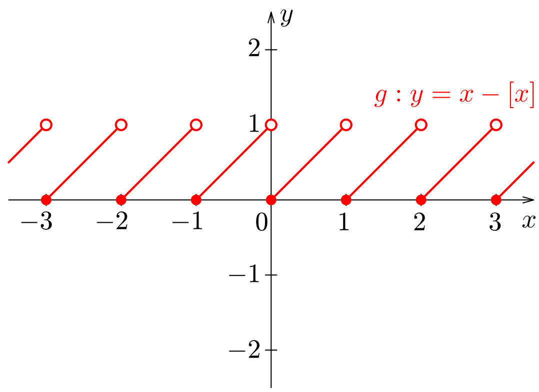
$$f : y = [x]$$

*vznikli také schodíky, pravidelne sa to mení, ale nebude to periodická funkcia, pretože hodnoty funkcie sa neopakujú.*

**U**: Áno, preto sme to trochu zmenili a v druhej funkcii

$$g : y = x - [x]$$

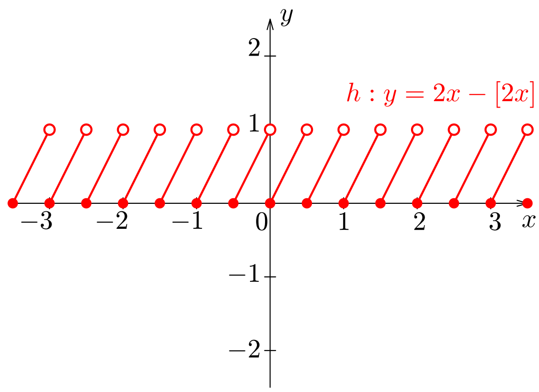
sme od reálneho čísla $x$ odčítali jeho celú časť.



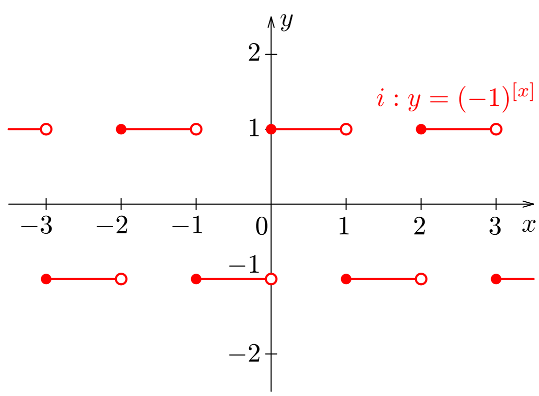

**Ž**: *Dalo by sa povedať, že z čísla zostala len desatinná časť a vznikla tak pekná periodická funkcia. Jej najmenšia perióda je $p = 1$. A niečo veľmi podobné je aj tretia funkcia*

$$h : y = 2x - [2x]\,,$$

*iba graf je zhustený, častejšie sa opakujú úsečky. Perióda bude menšia, len $p = \frac{1}{2}$.*

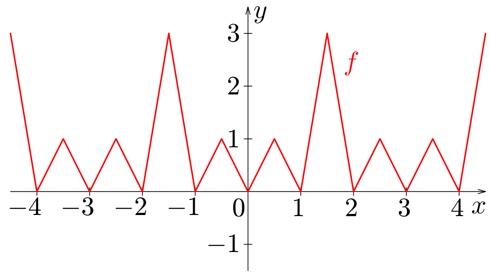


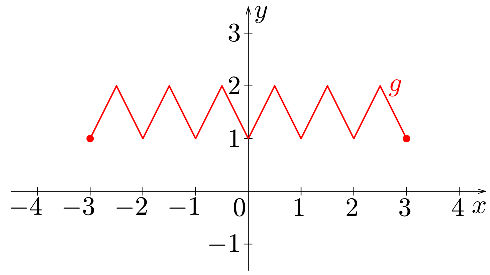

**U**: Ide ti to výborne, ostala posledná funkcia, v ktorej číslo $-1$ umocňujeme na celú časť reálnych čísel.

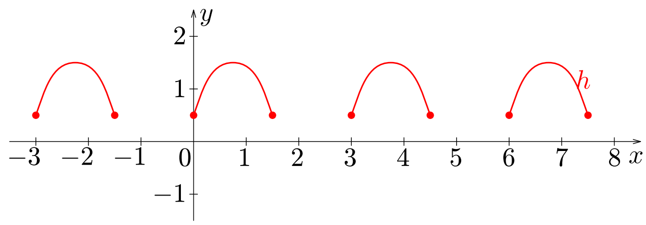



**Ž**: *Viem, že $-1$ umocnené na párne celé číslo dá jednotku, umocnené na nepárne celé číslo dá mínus jednotku. A z grafu je jasné, že sa to bude opäť pekne striedať, je to periodická funkcia, teraz ale najmenšou periódou bude číslo 2.*

**Príklad 4**: *Rozhodnite, či funkcie, ktorých grafy vidíte na obrázku, sú periodické:*







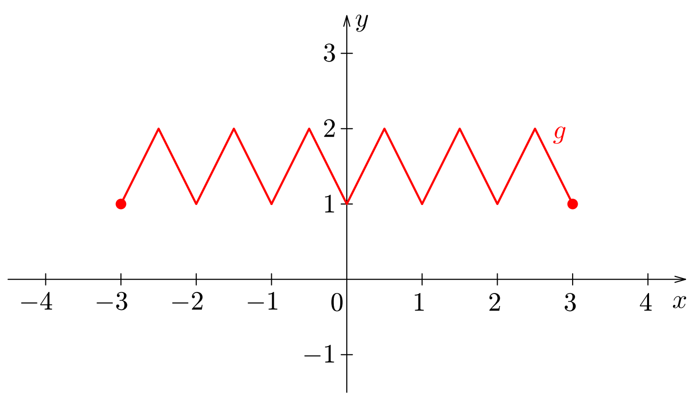
**Ž**: *Na prvom grafe sú také pekné zúbky – dva malé, jeden veľký, dva malé, jeden veľký ... Bude to takto pokračovať ďalej?*

**U**: Predpokladajme, že áno, teda že funkcia nezmení svoj priebeh v časti, kde už jej graf nevidíme.

**Ž**: *Tak potom to je periodická funkcia, jej priebeh sa začne opakovať po dvoch malých a jednom veľkom zúbku, teda perióda bude $p = 3$.*

---

**U**: Dobre, a čo druhá funkcia?



**Ž**: *Tá mi pripomína zuby na pílke. Tu je to jednoduché, začne sa to opakovať už po jednotke.*

**U**: Teda to je periodická funkcia?

**Ž**: *No áno. Či nie? Neviem.*

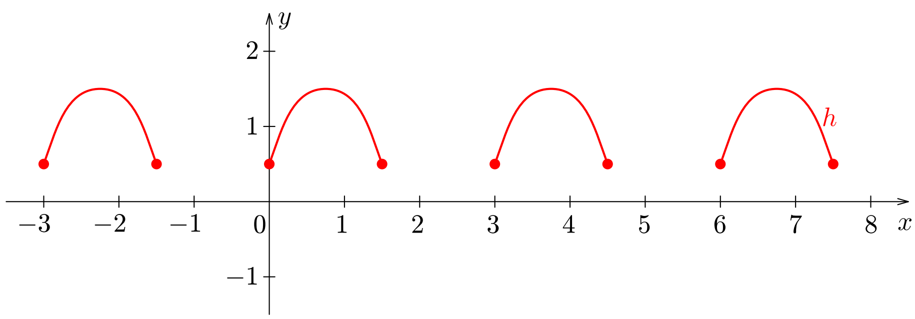
**U**: Toto veru nie je periodická funkcia, kvôli definičnému oboru. Vyberme si z neho jedno číslo, napr. $x = 2$. Potom, ak by perióda bola $p = 1$, tak podľa definície periodickej funkcie by malo platiť, že do definičného oboru patrí každé číslo v tvare

$$x + k \cdot p, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teda aj $2 + 3 \cdot 1$; $2 + 100 \cdot 1$ a podobne. Lenže v týchto bodoch funkcia nie je definovaná.

**Ž**: *Nie je to potom tak, že periodická funkcia musí byť definovaná na množine všetkých reálnych čísel?*

**U**: Nie, nie je. Stačí sa pozrieť na tretí graf:




**U**: Táto funkcia je periodická s najmenšou periódou $p = 3$, pričom nie je definovaná na $\mathbb{R}$, jej definičný obor je zložený zo zjednotenia nekonečne veľa intervalov dĺžky $\frac{3}{2}$.

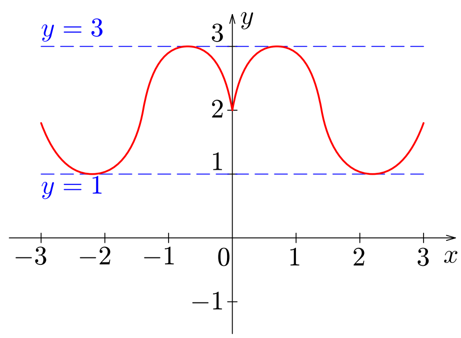
**Príklad 5**: *Načrtnite graf funkcie, ktorá je periodická a súčasne:*

*a) je ohraničená a párna;*

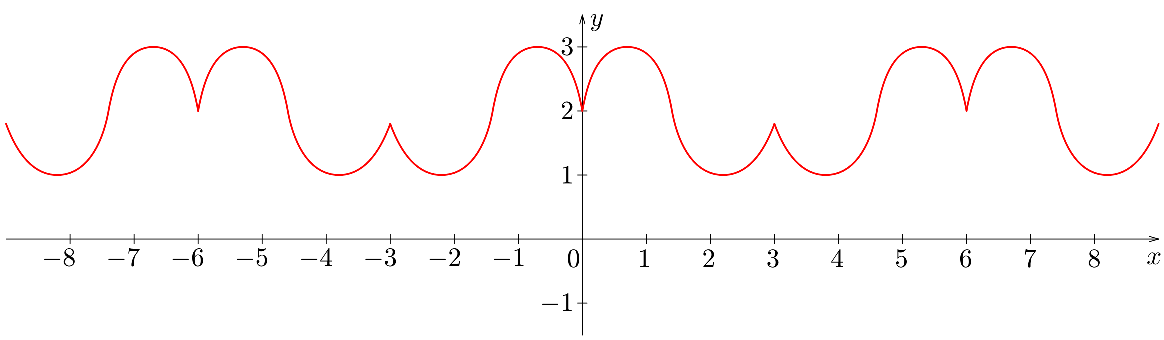
*b) je zhora ohraničená, ale nie je zdola ohraničená.*

**U**: V prvej časti máš načrtnúť graf funkcie, ktorá je súčasne periodická, ohraničená a párna.

**Ž**: *Začnem od konca – aby bola párna, musí byť jej graf súmerný podľa osi $y$. Aby bola ohraničená, tak celý graf musí ležať medzi dvoma rovnobežkami s osou $x$, napr. si vezmem priamky $y = 1$ a $y = 3$. Najprv si pripravím hoci aj takýto ornament:*



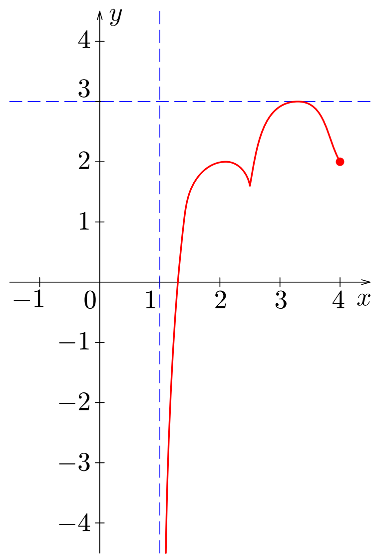

**Ž**: *A keď má byť ešte aj periodická, tak sa tento ornament bude opakovať:*




---

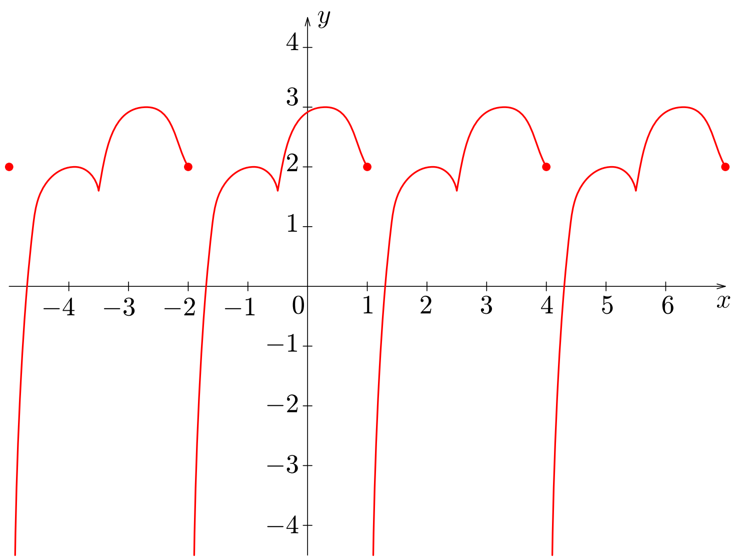
**U**: Krásny obrázok, mohol by si robiť návrhára výšiviek.

**Ž**: *No ďakujem pekne, idem radšej na druhú časť – mám načrtnúť graf periodickej funkcie, ktorá je ohraničená iba zhora. Mohol by som použiť podobný ornament, ale nesmie byť zdola ohraničená, teda potiahnem čiaru nadol asi takto:*




**U**: Už sa teším na výsledok.

**Ž**: *Vydržte, ešte to niekoľkokrát zopakujem a je to:*



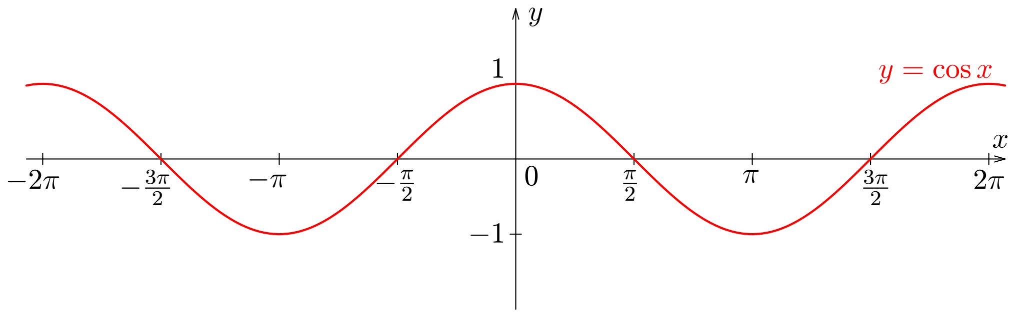

**U**: Pekné, toto je teda graf jednej z funkcií, spĺňajúcich podmienky v zadaní. Na záver mi ešte povedz horné ohraničenie a periódu tvojej funkcie

**Ž**: *Horným ohraničením je číslo* 3 *a najmenšia perióda je tiež* 3*.*

**Príklad 6**: *Určte najmenšie periódy funkcií $y = \cos x$ a $y = \mathrm{tg} x$.*

**U**: Tieto funkcie patria medzi goniometrické a sú typickými predstaviteľmi periodických funkcií.

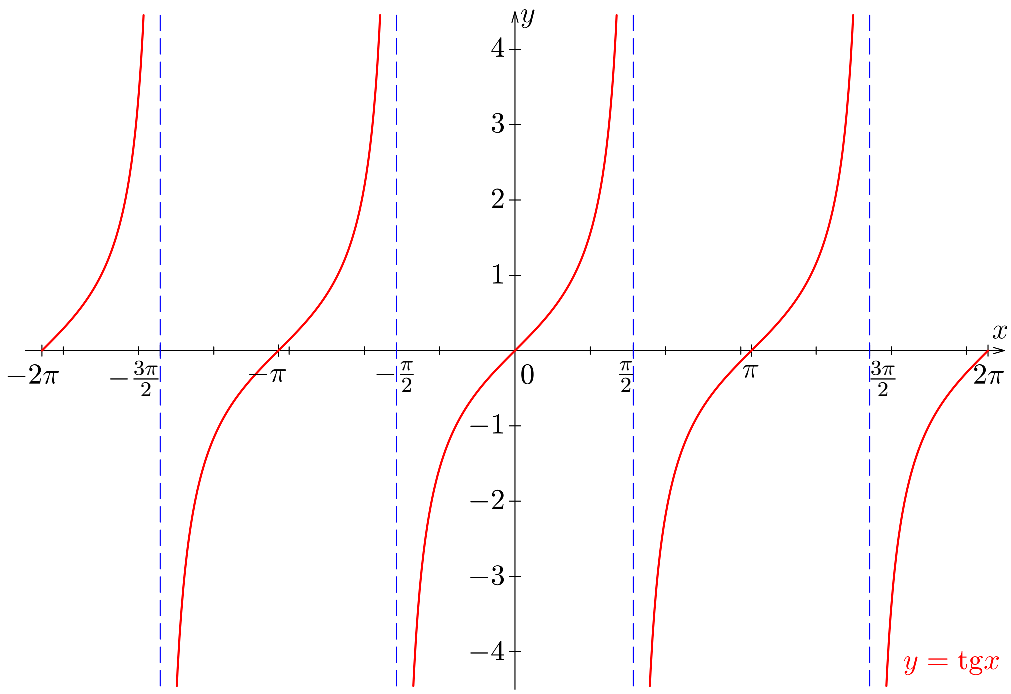
**Ž**: *Už som sa s nimi stretol, takže to nebude ťažká úloha. Najprv načrtnem graf funkcie $y = \cos x$, vyzerá takto:*




**U**: Perióda určuje úsek na osi $x$-ovej, po ktorej sa začne priebeh funkcie opakovať, máš určiť najmenšiu.

**Ž**: *Bude to $p = 2\pi$, pekne to vidno na maxime, ktoré je v bode $x = 0$ a najbližšie ďalšie maximum je v bode $x = 2\pi$.*

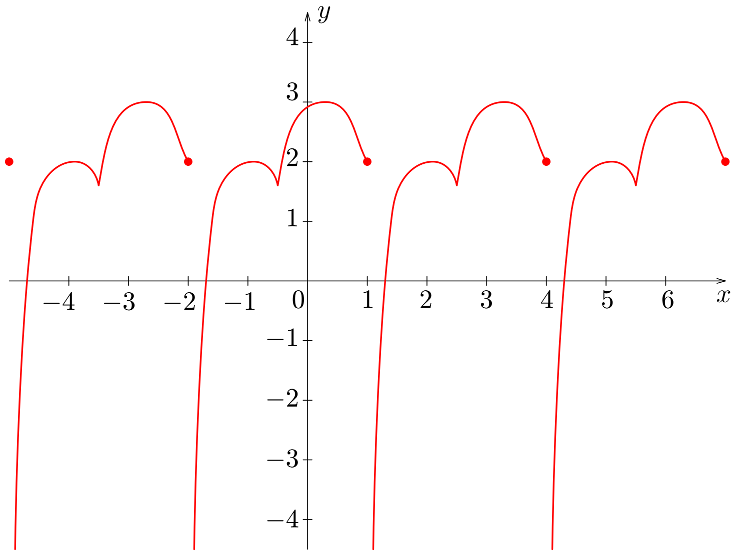
**U**: Výborne, teraz to skúsime s funkciou $y = \mathrm{tg} x$. Jej graf tiež poznáš.




**Ž**: *Áno, máme ho tu na obrázku. Perióda bude pri tejto funkcii menšia, len $p = \pi$. Vidieť to môžeme na nulovom bode, ktorý je v každej opakujúcej sa časti len jeden a rozdiel medzi nimi je presne $\pi$.*

**Príklad 7**: *Nech $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Ktoré z tvrdení o funkcii $f$ je pravdivé?*
*a) Ak je funkcia $f$ periodická, potom je párna alebo nepárna.*
*b) Ak je funkcia $f$ periodická, nemôže byť na celom svojom definičnom obore rastúca.*
*c) Ak je funkcia $f$ periodická, tak má nekonečne veľa lokálnych extrémov.*

**Ž**: *Prvé tvrdenie hovorí, že ak je funkcia $f$ periodická, potom je párna alebo nepárna. Alebo inak povedané, jej graf je symetrický buď podľa osi $y$ alebo podľa bodu $[0; 0]$. A to určite nemusí platiť, graf nemusí byť symetrický. Na obrázku je jedna takáto funkcia:*




**U**: To bola pekná ukážka, teda prvé tvrdenie nie je pravdivé, skús druhé tvrdenie: Ak je funkcia $f$ periodická, nemôže byť na celom svojom definičnom obore rastúca.

**Ž**: *Myslím, že toto je pravdivá veta, nemôže byť funkcia všade rastúca, ak sa jej hodnoty majú opakovať.*

**U**: Áno, ak je $p$ perióda funkcie, vezmime ľubovoľné číslo $x$ z definičného oboru. Potom aj číslo $x + p$ patrí do definičného oboru, pričom

$$x < x + p.$$

Ak je funkcia periodická, tak podľa definície musí platiť

$$f(x) = f(x + p).$$

Lenže ak by mala byť aj rastúca, tak zase podľa definície rastúcej funkcie by malo platiť

$$f(x) < f(x + p),$$

a tak sa dostávame do sporu.

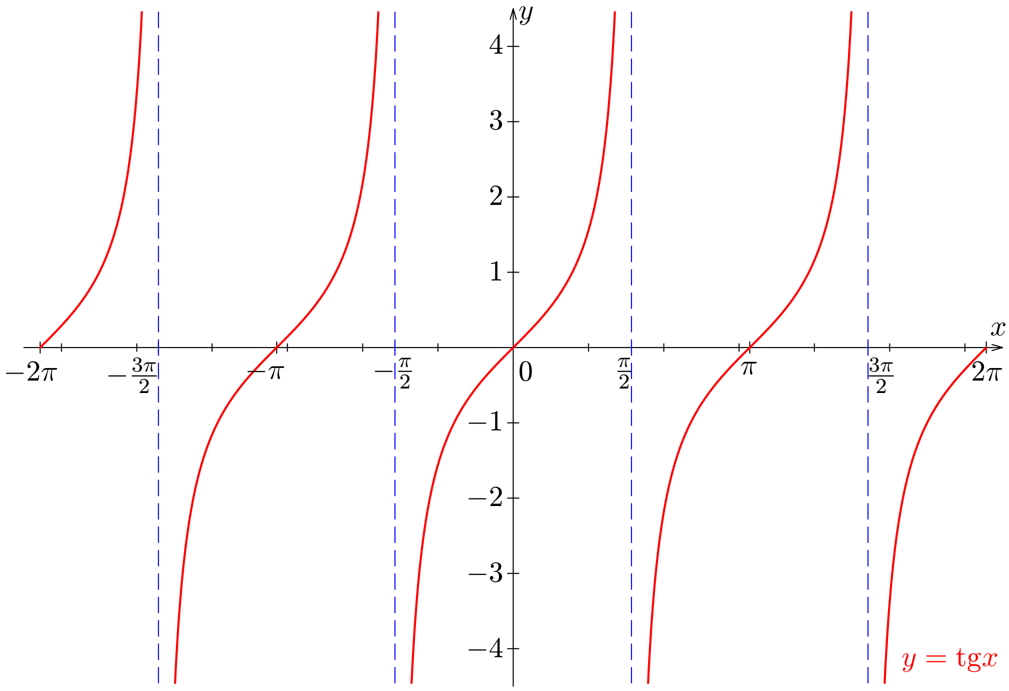
---

**Ž**: *Ostalo mi posledné tvrdenie: Ak je funkcia $f$ periodická, tak má nekonečne veľa lokálnych extrémov. To by aj mohla byť pravda, pretože ak tam je nejaké maximum alebo minimum, musí sa zopakovať po každej perióde, teda ich tam bude nekonečne veľa.*

**U**: Súhlasím s druhou časťou toho, čo si povedal. Ak periodická funkcia má v bode $x \in \mathcal{D}$ lokálny extrém, tak má takýto extrém aj v každom bode $x + k \cdot p$, kde $p$ je perióda a $k$ je ľubovoľné celé číslo. Preto ich je naozaj nekonečne veľa. Začal si ale s predpokladom, ak funkcia má lokálny extrém. A čo ak nemá? Nemôže byť periodická funkcia bez maxím aj miním?

**Ž**: *Neviem si to predstaviť.*

**U**: Tak ti takú ukážem, je to jedna zo základných goniometrických funkcií $y = \mathrm{tg}x$:




**Ž**: *To potom ale znamená, že posledné tvrdenie nie je pravdivé.*