Prostá funkcia. Inverzná funkcia.

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Ak pracujeme s funkciami, obvykle uvažujeme nad tým, akú hodnotu priradí funkcia danému číslu x. Skúsme si však položiť opačnú otázku – vedeli by sme určiť x, ak by sme poznali jeho funkčnú hodnotu $f(x)$? Vyskúšajme to na dvoch príkladoch. Najprv sa zaoberajme funkciou vyjadrujúcou závislosť objemu kocky od dĺžky jej hrany. Tá je, ako vieme, daná vzťahom

$$V = a^3.$$

Nasledujúca tabuľka je čiastočne vyplnená:

a [cm]	2	3	?	?
V [cm^3]	8	27	125	1000

Urč čísla, patriace na miesta otáznikov.

Ž: *To nie je ťažké, ak kocka má objem $125\ cm^3$, tak musí mať hranu dĺžky $\sqrt[3]{125} = 5\ cm$. A ak má mať objem $1000\ cm^3$, potom jej hrana meria $10\ cm$.*

U: Dobre, tak skúsime niečo iné – bude to kvadratická funkcia

$$y = x^2.$$

Opäť sa pýtam, čo patrí na miesto otáznika v tejto tabuľke:

x	-2	3	?
$y = x^2$	4	9	25

Ž: *Druhá mocnina má byť 25, teda x bude 5. Moment, teraz mi napadlo, že aj $(-5)^2 = 25$, teda x môže byť aj -5. Čo teraz, budú dve riešenia?*

U: Áno, existujú dve rôzne čísla, 5 a -5, ktorých druhá mocnina je 25. Cítiš rozdiel medzi týmito dvoma ukážkami?

Ž: *V tej prvej funkcii nebol žiadny problém určiť hranu kocky, bolo to jednoznačné, pri tej druhej funkcii už vzniklo viac riešení.*

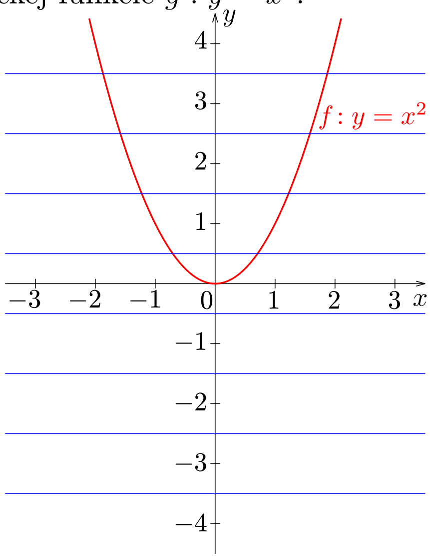
U: Je to preto, lebo prvá funkcia $V = a^3$ patrí medzi tzv. ***prosté funkcie***. Tie sa vyznačujú práve tým, že rôznym prvkom svojho definičného oboru $\mathcal{D}$ priradia rôzne funkčné hodnoty.

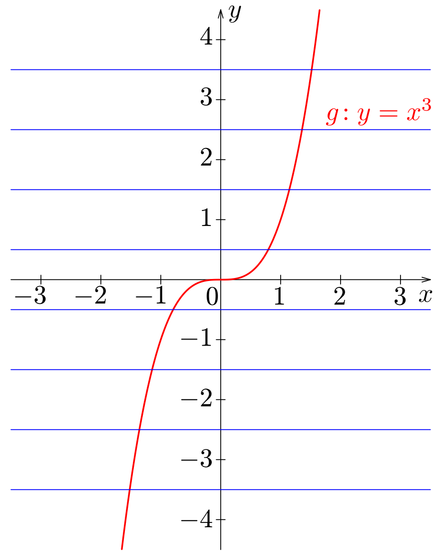
Ž: *Teda nikdy dvom číslam nepriradia tú istú hodnotu?*

U: Áno, a preto definícia prostej funkcie znie takto:
Funkcia f sa nazýva prostá práve vtedy, keď pre všetky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: Ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ž: *Ako sa dá z grafu zistiť, či je funkcia prostá?*

U: Veľmi jednoducho. Máme na to takúto pomôcku – predstavíme si, že sme zostrojili všetky rovnobežky s osou x. Ak každá z nich pretne graf funkcie f najviac raz, tak potom je funkcia f prostá. Na obrázku to máme ukázané na príklade kvadratickej funkcie $f : y = x^2$ a kubickej funkcie $g : y = x^3$.





Ž: *Je to jasné, prvá funkcia $f : y = x^2$ nie je prostá, pretože napríklad $f(1) = f(-1) = 1$. Preto niektoré pomocné rovnobežky s osou x-ovou preťali graf tejto funkcie dvakrát. Ale na druhom obrázku máme prostú funkciu $g : y = x^3$, keďže každá z rovnobežiek ju pretne iba raz.*

U: Vedel by si matematicky sformulovať, akú podmienku musí spĺňať funkcia, ktorá nie je prostá?

Ž: *Nebude pre ňu platiť podmienka z definície. Preto musím vytvoriť negáciu výroku*

pre všetky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: Ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

A to bude výrok

existujú také dve čísla $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, že platí: $x_1 \neq x_2$ a zároveň $f(x_1) = f(x_2)$.

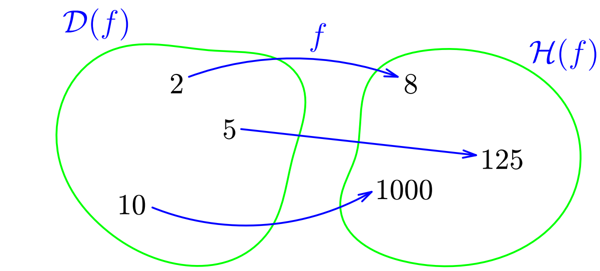
U: Teraz by ma zaujímalo, ako sa na šípkovom diagrame prejaví to, že funkcia je prostá.

Ž: *Popravde, neviem si to celkom dobre predstaviť ...*

U: Aby šípkový diagram vôbec predstavoval funkciu, z každého prvku definičného oboru $\mathcal{D}$ musí vychádzať práve jedna šípka smerujúca do oboru hodnôt $\mathcal{H}$. A aby to navyše bola prostá funkcia, nesmie dvom rôznym číslam priradiť tú istú hodnotu.

Ž: *Takže v každom prvku oboru hodnôt bude končiť práve jedna šípka?*

U: Áno. Na obrázku vidíme ukážku:



Z obrázka pekne vidno, že tak, ako priraďujeme funkciou f prvkom definičného oboru prvky oboru hodnôt, mohli by sme tento postup aj obrátiť, a teda prvkom oboru hodnôt $\mathcal{H}$ priraďovať prvky definičného oboru $\mathcal{D}$. Vznikla by tak vlastne nová funkcia. Túto funkciu nazývame ***inverzná funkcia*** k funkcii f a označujeme f^{-1}. Inverzia totiž znamená obrátenie.

Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak to, čo bolo pre funkciu f oborom hodnôt, bude pre funkciu f^{-1} definičným oborom?*

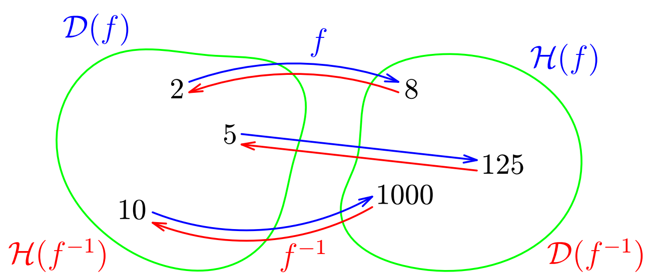
U: Presne tak,

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$$

a aj

$$\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f).$$

Všetko to máme zakreslené na nasledujúcom obrázku:



Ž: *Teda ak $f(2) = 8$, tak $f^{-1}(8) = 2$.*

U: Áno, symbolicky môžem zapísať, že

$$\text{ak } f(x) = y, \text{ tak } f^{-1}(y) = x.$$

Zdôrazním však dôležitú podmienku a totiž, že inverzná funkcia existuje len k prostej funkcii. Vedel by si vysvetliť, prečo?

Ž: *Ak by funkcia f nebola prostá, tak by dvom rôznym číslam x_1, x_2 z definičného oboru priradila to isté číslo y z oboru hodnôt. No a keby sme to potom chceli obrátiť, teda vytvoriť inverznú funkciu, tak tá by tomuto číslu y priradila obidve čísla x_1, x_2, čo však odporuje definícii funkcie.*

U: Výborne. Môžeme teda sformulovať definíciu inverznej funkcie:

Ak je f prostá funkcia, tak k nej existuje práve jedna funkcia, označíme ju f^{-1}, ktorá je určená takto:

1) $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$,

2) každému $y \in \mathcal{D}(f^{-1})$ je priradené práve to $x \in \mathcal{D}(f)$, pre ktoré platí $f(x) = y$.

Funkciu f^{-1} nazývame funkcia inverzná k funkcii f.

Ž: *Ako budeme hľadať inverznú funkciu?*

U: Ak máme funkciu f danú rovnicou, môžeme ***hľadanie predpisu inverznej funkcie*** zhrnúť do troch bodov:

1) overíme, že funkcia f je prostá,

2) z predpisu funkcie f vyjadríme premennú x pomocou premennej y,

3) vymeníme označenie premenných x a y.

U: Ukážeme si to hneď na dvoch príkladoch. Skús začať funkciou

$$f : y = 2x.$$

Ž: *Je to jednoduchá lineárna funkcia. Je prostá, lebo*

$$\textit{ak } x_1 \neq x_2, \ \textit{tak aj } 2x_1 \neq 2x_2.$$

V druhom kroku mám vyjadriť premennú x pomocou y, čo nebude ťažké. Stačí rovnicu funkcie $y = 2x$ vydeliť dvomi a dostanem

$$\frac{y}{2} = x.$$

Ale teraz nerozumiem tretiemu kroku, že mám vymeniť označenie premenných.

U: Jednoducho namiesto x napíšeš y a naopak, teda tvoja posledná rovnica bude

$$\frac{x}{2} = y,$$

čiže môžeme zapísať

$$f^{-1} : y = \frac{x}{2}.$$

Skús to ešte s funkciou

$$g : y = x^2.$$

Ž: *Je to kvadratická funkcia, jej grafom je parabola. Lenže nie je prostá, teda sa k nej nedá nájsť inverzná funkcia. Chceli ste ma nachytať!*

U: A dobre, že si sa nedal. O inverznej funkcii môžeme hovoriť len pri prostých funkciách, teda zmeníme zadanie takto:

$$g : y = x^2, \quad \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}_0^+.$$

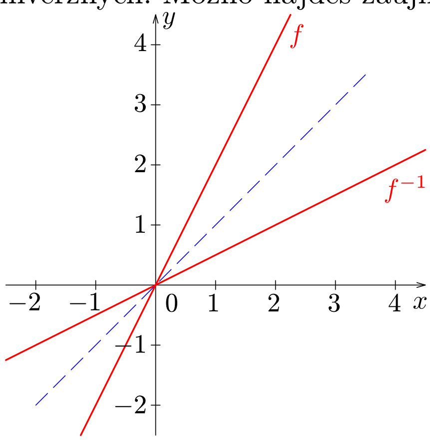
Ž: *Potom predpis inverznej funkcie nájdem z predpisu pôvodnej funkcie $g : y = x^2$ tak, že odmocním bez absolútnej hodnoty, keďže x je nezáporné:*

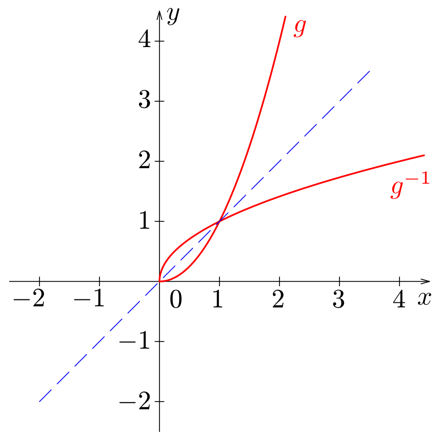
$$\sqrt{y} = x.$$

A ešte vymením označenie, bude

$$g^{-1} : y = \sqrt{x}.$$

U: Na nasledujúcom obrázku máme nakreslené grafy našich dvoch funkcií a aj grafy funkcií k nim inverzných. Možno nájdeš zaujímavú súvislosť.





Ž: *Myslím, že grafy sú súmerné podľa priamky, ktorá je osou prvého kvadrantu.*

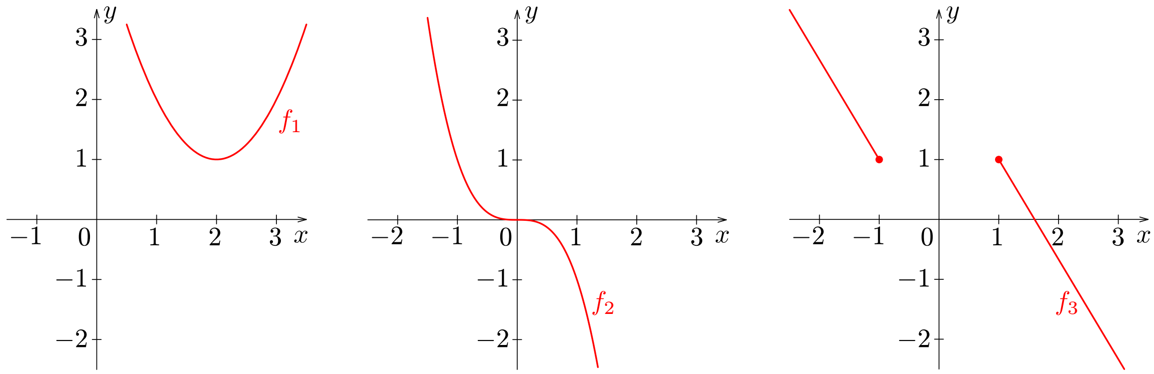
U: Áno, a táto vlastnosť nám môže byť užitočná pri zostrojovaní grafov inverzných funkcií, teda:

Grafy funkcií f a f^{-1}, zostrojené v tej istej karteziánskej súradnicovej sústave, sú súmerné podľa priamky $y = x$.

Ž: *Ešte by ma zaujímalo, na čo sú vôbec dobré inverzné funkcie.*

U: Môžeme ich využiť pri určovaní niektorých vlastností funkcií. Napríklad určiť obor hodnôt prostej funkcie danej predpisom môžeme tak, že určíme definičný obor funkcie k nej inverznej. A ak už budeme mať obor hodnôt, ľahko rozhodneme o ohraničenosti funkcie a pod. Dokonca niektoré typy funkcií sú definované iba pomocou inverzných funkcií – napríklad logaritmické a cyklometrické funkcie.

Príklad 1: *Na obrázku je nakreslených niekoľko grafov funkcií. Sú medzi nimi prosté funkcie?*

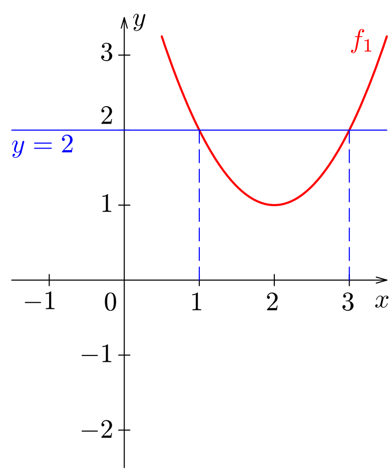


U: Ak chceme rozhodnúť, či graf funkcie predstavuje prostú funkciu, môžeme použiť jednoduchú pomôcku. Pamätáš si ju?

Ž: *Áno, predstavím si, že zostrojím všetky rovnobežky s osou x. Ak každá z nich pretne graf funkcie najviac raz, potom je funkcia prostá.*

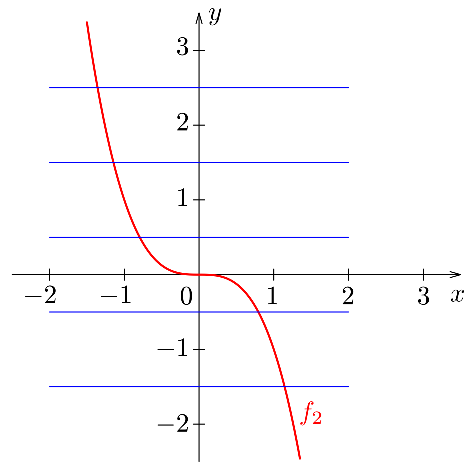
U: Tak to skús na prvom grafe z našej úlohy.

Ž: *Tento graf určite nepredstavuje prostú funkciu, pretože ak zostrojím napríklad priamku $y = 2$, pretne mi graf funkcie f_1 v dvoch bodoch, ako to vidíme na obrázku:*



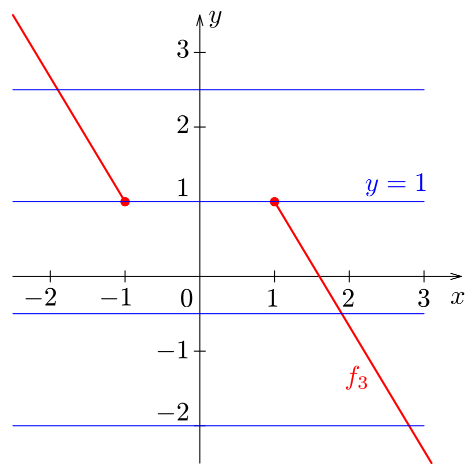
U: Teda funkcia f_1 bodom $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ priradila tú istú funkčnú hodnotu $y = 2$, preto nie je prostá.

Ž: *Na druhom obrázku máme podľa mňa graf prostej funkcie. Dokreslil som si pomocné čiary a každá z nich preťala graf práve raz.*



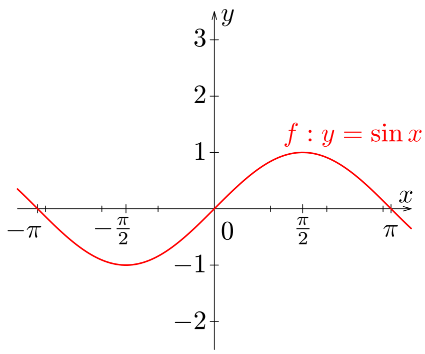
U: To isté by urobili aj všetky ďalšie rovnobežky s osou x, teda funkcia f_2 naozaj je prostá.

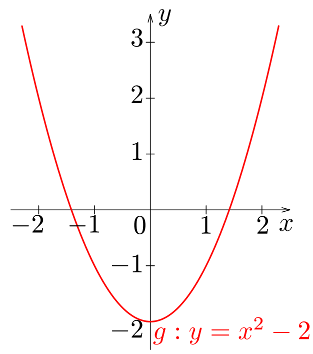
Ž: *Pri tretej funkcii f_3 som si najprv tiež myslel, že bude prostá, keďže pomocné rovnobežky preťali graf len raz. Ale potom som si všimol, že keď zostrojím priamku $y = 1$, tak tá mi graf funkcie pretne dvakrát, lebo sú tam nakreslené dva plné krúžky. A preto f_3 nie je prostá funkcia.*

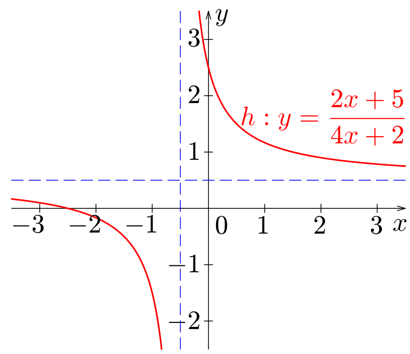


U: Výborne. Dodám len toľko, že keby aspoň jeden z tých dvoch krúžkov bol prázdny, už by to bola prostá funkcia.

Úloha 1: *Rozhodnite, ktoré grafy na obrázku predstavujú prosté funkcie:*



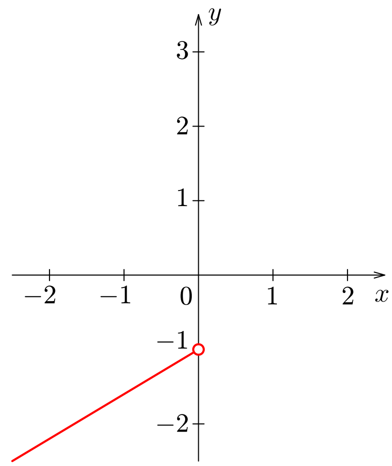




Výsledok: f – nie; g – nie; h – áno

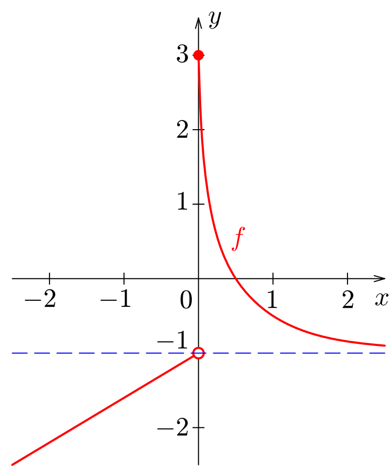
Príklad 2: *Načrtnite graf ľubovoľnej funkcie definovanej na množine $\mathbb{R}$, ktorá je prostá, ale pritom nie je ani rastúca, ani klesajúca.*

Ž: *Keďže funkcia nemá byť ani rastúca, ani klesajúca na množine $\mathbb{R}$, skúsim to vymyslieť tak, že na jednej časti bude rásť a na druhej klesať. Tak napríklad na intervale $(-\infty; 0)$ bude rásť a to by mohla byť aj lineárna funkcia, teda graf zatiaľ vyzerá hoci aj ako takáto polpriamka:*



U: Zatiaľ je to v poriadku, čo máš pripravené na intervale $\langle 0; \infty)$?

Ž: *Teraz chcem, aby v druhej časti funkcia klesala. Začiatok dám do bodu $[0; 3]$. Musím ale myslieť na to, že funkcia má byť prostá, preto už v žiadnom bode nesmie funkčná hodnota klesnúť pod mínus jednotku. Skúsim to nakresliť tak, aby sa graf približoval k priamke $y = -1$, ako keď sa kreslí hyperbola. Tu je môj výtvor:*



U: Nemá to chybu, si jednotka. Tvoja funkcia je naozaj prostá a pritom nie je monotónna na svojom definičnom obore.

Príklad 3: *Dokážte platnosť nasledujúceho tvrdenia:*
Ak je funkcia rastúca alebo klesajúca, tak je prostá.

U: Rozdeľme si dôkaz na dve časti, podľa toho, či je funkcia rastúca alebo klesajúca. Najprv mi však povedz, čo to znamená dokázať, že funkcia f je prostá.

Ž: *Podľa definície prostej funkcie by sme mali ukázať, že pre všetky $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí:*

$$\text{ak } x_1 \neq x_2, \text{ tak } f(x_1) \neq f(x_2).$$

U: Áno, presne to sa pokúsime dokázať. Začnime najprv prípadom, ak f je rastúca funkcia. Nech teda x_1, x_2 sú ľubovoľné dve čísla z definičného oboru také, že $x_1 \neq x_2$. Potom buď $x_1 < x_2$ alebo $x_1 > x_2$. Aký vzťah bude platiť medzi $f(x_1)$ a $f(x_2)$?

Ž: *Ak je f rastúca funkcia, tak platí, že*

$$\text{ak } x_1 < x_2, \text{ potom } f(x_1) < f(x_2).$$

Ale

$$\text{ak } x_1 > x_2, \text{ potom } f(x_1) > f(x_2).$$

U: V oboch prípadoch teda platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, a preto je funkcia f prostá.

Ž: *No to vôbec nebolo ťažké. Pre klesajúcu to skúsim sám.*

U: Nech sa páči.

Ž: *Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné dve čísla z definičného oboru také, že $x_1 \neq x_2$. Potom môžu nastať dve možnosti:*

1. *$x_1 > x_2$, ale keďže f je klesajúca funkcia, tak potom $f(x_1) < f(x_2)$,*
2. *$x_1 < x_2$, ale keďže f je klesajúca funkcia, tak potom $f(x_1) > f(x_2)$.*

V oboch prípadoch $f(x_1) \neq f(x_2)$, a preto f je prostá funkcia.

Príklad 4: *Určte obor hodnôt funkcie* $f : y = \dfrac{x-1}{x+3}$ *pomocou definičného oboru inverznej funkcie.*

Ž: *Najprv pohľadám rovnicu inverznej funkcie a to tak, že z predpisu funkcie* f *vyjadrím premennú* x *nasledujúcimi úpravami. V rovnici*

$$y = \frac{x-1}{x+3}$$

najprv odstránim zlomok

$$y(x+3) = x-1$$

a potom roznásobím zátvorku

$$yx + 3y = x - 1.$$

Členy s premennou x *dám na jednu stranu*

$$yx - x = -3y - 1$$

a potom vyberiem x *pred zátvorku*

$$x(y-1) = -3y - 1.$$

Za podmienky $y \neq 1$ *môžem vyjadriť*

$$x = \frac{-3y-1}{y-1} = \frac{3y+1}{1-y}.$$

Preto inverzná funkcia bude mať predpis

$$f^{-1} : y = \frac{3x+1}{1-x}.$$

U: Dobre, ako to však súvisí s oborom hodnôt pôvodnej funkcie?

Ž: *Jednoducho. Veď platí, že obor hodnôt funkcie sa rovná definičnému oboru inverznej funkcie:*

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{D}(f^{-1}).$$

Potrebujem teda určiť definičný obor inverznej funkcie. K tomu stačí jedna podmienka pre menovateľa zlomku

$$1 - x \neq 0, \text{ čiže } x \neq 1.$$

A tak mám, že

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

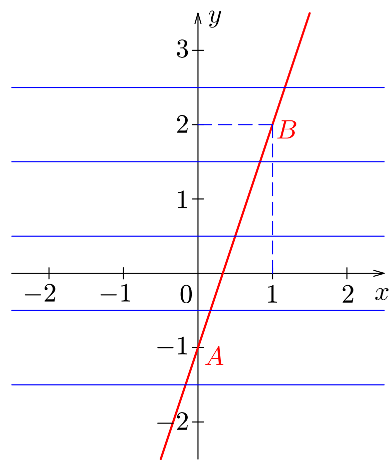
U: Výborne. Pre úplnosť dodám, že definičný obor pôvodnej funkcie, a teda aj obor hodnôt inverznej funkcie, je množina $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Príklad 5: *Zistite, či sú prosté funkcie $f : y = 3x - 1$ a $g : y = (x-1)^2$. Svoje tvrdenie zdvôvodnite.*

Ž: *Prvá funkcia*

$$f : y = 3x - 1$$

je lineárna funkcia, jej grafom je priamka obsahujúca napríklad body $A[0; -1]$, $B[1; 2]$. Je to prostá funkcia, pretože každá rovnobežka s osou x mi pretne graf funkcie iba raz, tu som to načrtol:



U: Súhlasím, pokús sa to dokázať aj na základe definície. Teda skús dokázať, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ platí: ak $x_1 \neq x_2$, potom $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ž: *Skúsim to, začnem teda tým, že si zvolím ľubovoľné dve čísla x_1, x_2 z definičného oboru také, že*

$$x_1 \neq x_2.$$

Obe strany prenásobím tromi

$$3x_1 \neq 3x_2$$

a ešte odčítam jednotku od oboch strán. Dostanem

$$3x_1 - 1 \neq 3x_2 - 1,$$

to ale znamená, že

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Mám to, dokázal som, že funkcia f je prostá.

U: Dobre, môžeš prejsť k druhej funkcii

$$g : y = (x-1)^2.$$

Ž: *Toto je kvadratická funkcia, jej grafom je parabola. Určite to nie je prostá funkcia.*

U: Aby si ma presvedčil, potrebuješ nájsť aspoň jednu dvojicu čísel z definičného oboru tak, aby platilo $x_1 \neq x_2$ a zároveň $g(x_1) = g(x_2)$.

Ž: *To nebude ťažké, ak si zvolím* $x_1 = 0$*, tak* $g(0) = 1$*. Ale ak si zvolím* $x_2 = 2$*, tak* $g(2) = (2-1)^2 = 1$*, čiže v dvoch rôznych bodoch nadobudla funkcia rovnaké hodnoty. A preto nie je prostá.*

Príklad 6: *Rozhodnite, ku ktorým funkciám existujú inverzné funkcie. Určte ich definičný obor, obor hodnôt a načrtnite graf.*

a) $f_1 : y = -x + 3, \quad \mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$,
b) $f_2 : y = x^2 - 1, \quad \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$,
c) $f_3 : y = x^2 - 1, \quad \mathcal{D}(f_3) = \langle 0; 3\rangle$.

Ž: *Viem, že inverzné funkcie existujú len ku prostým funkciám, preto najprv musím overiť, či dané funkcie sú prosté. S prvou funkciou nebude veľa práce, lebo predpis*

$$f_1 : y = -x + 3$$

hovorí o tom, že je to lineárna funkcia. Jej definičný obor aj obor hodnôt sú množiny všetkých reálnych čísel, jej grafom je priamka rôznobežná s osami. Je to prostá funkcia, teda bude mať inverznú funkciu.

U: Vedel by si určiť jej rovnicu?

Ž: *Z predpisu $f_1 : y = -x + 3$ vyjadrím premennú x pomocou y, teda*

$$x = -y + 3$$

a vymením označenie premenných, čiže

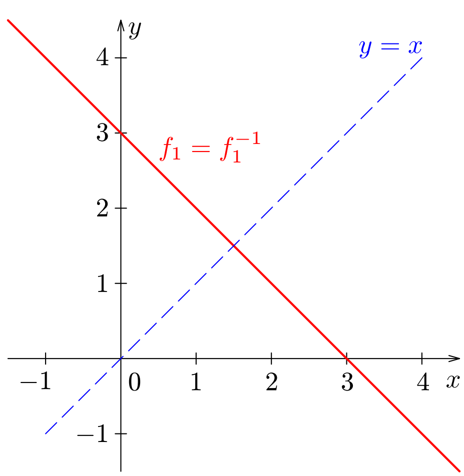
$$f_1^{-1} : y = -x + 3.$$

Aha, veď to je ten istý predpis. Môže byť funkcia sama k sebe inverzná?

U: Áno, môže, pre úplnosť dodajme, že

$$\mathcal{D}(f_1^{-1}) = \mathcal{H}(f_1^{-1}) = \mathbb{R}.$$

Ž: *Ešte mám načrtnúť graf, čo bude tá istá priamka:*



U: Platí aj v tomto prípade, že sú grafy funkcií f a f^{-1} súmerné podľa priamky $y = x$?

Ž: *Áno, platí, pretože sú kolmé na túto priamku.*

U: Môžeš prejsť k druhej funkcii

$$f_2 : y = x^2 - 1.$$

Najprv uvažujme, že jej definičným oborom je celá množina reálnych čísel.

Ž: *Potom ale nie je prostá, napríklad*

$$f_2(1) = 1^2 - 1 = 0,$$

ale tiež

$$f_2(-1) = (-1)^2 - 1 = 0.$$

Čiže som našiel dve rôzne hodnoty x_1, x_2 také, že $f_2(x_1) = f_2(x_2)$. Ale keď nie je táto funkcia prostá, nemôže k nej existovať inverzná funkcia.

U: Máš pravdu, preto je v tretej časti zmenený definičný obor, teda

$$f_3 : y = x^2 - 1, \quad \mathcal{D}(f_3) = \langle 0; 3 \rangle .$$

Ž: *Na tomto intervale funkcia je prostá, môžem hľadať inverznú funkciu. Z predpisu $y = x^2 - 1$ vyjadrím x^2:*

$$x^2 = y + 1.$$

Môžem odmocniť, lebo $y + 1 \geqq 0$

$$|x| = \sqrt{y + 1}.$$

Uvažujem len $x \in \langle 0; 3 \rangle$, preto $|x| = x$ a teda

$$x = \sqrt{y + 1}.$$

Ešte vymením označenie a dostanem rovnicu inverznej funkcie

$$f_3^{-1} : y = \sqrt{x + 1}.$$

U: Výborne, urč jej obor hodnôt.

Ž: *Definičným oborom funkcie f_3 bol interval $\langle 0; 3 \rangle$, to bude pre inverznú funkciu oborom hodnôt, teda*

$$\mathcal{H}(f_3^{-1}) = \mathcal{D}(f_3) = \langle 0; 3 \rangle .$$

U: Ostáva nám definičný obor.

Ž: *Aby som určil definičný obor inverznej funkcie, určím najprv obor hodnôt pôvodnej funkcie. Pre ňu platí*

$$0 \leqq x \leqq 3.$$

Nezáporné čísla môžem umocniť

$$0 \leqq x^2 \leqq 9,$$

ešte odčítať jednotku

$$-1 \leqq x^2 - 1 \leqq 8,$$

teda $f_3(x) \in \langle -1; 8 \rangle$. *Potom*

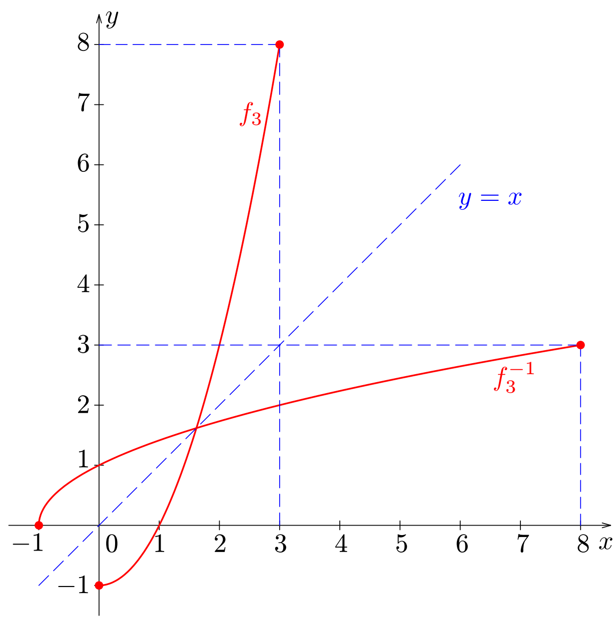
$$\mathcal{D}(f_3^{-1}) = \mathcal{H}(f_3) = \langle -1; 8 \rangle \, .$$

U: Pekne, ostáva ti ešte načrtnúť graf.

Ž: *Graf funkcie* f_3 *je časť paraboly, ale neviem, ako vyzerá graf inverznej funkcie.*

U: Pomôž si tým, že grafy funkcií f_3 a f_3^{-1} sú súmerné podľa priamky $y = x$.

Ž: *Dobre, tak ju dokreslím do obrázka a graf pôvodnej funkcie podľa tejto priamky preklopím. Tu je výsledok:*



Úloha 6: *Nájdite rovnice inverzných funkcií k funkciám* $f : y = \dfrac{x-1}{x}$, $g : y = \sqrt{x+3}$. *Určte ich definičné obory a obory hodnôt.*

Výsledok: $f^{-1} : y = \dfrac{1}{1-x}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$, $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$;
$g^{-1} : y = x^2 - 3$, $\mathcal{D}(g^{-1}) = \langle 0; \infty)$, $\mathcal{H}(g^{-1}) = \langle -3; \infty)$