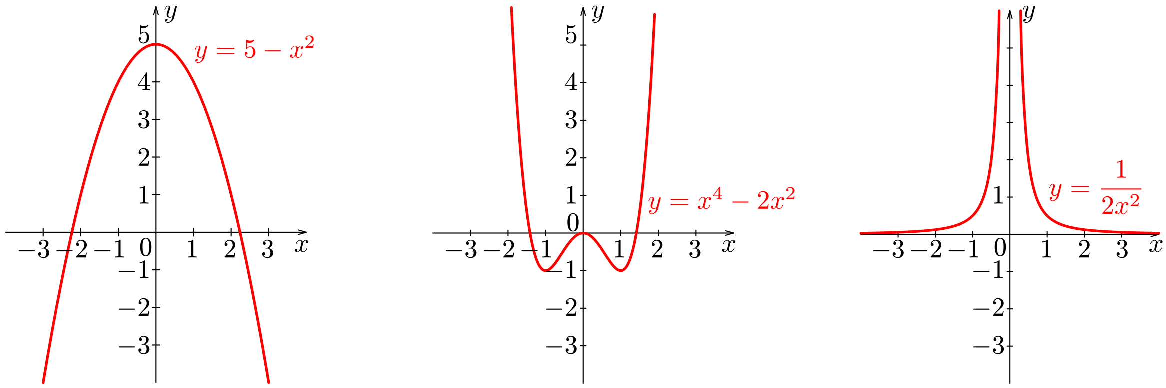
Párna a nepárna funkcia

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Na nasledujúcom obrázku vidíme grafy troch funkcií $f : y = 5 - x^2$, $g : y = x^4 - 2x^2$, $h : y = \dfrac{1}{2x^2}$. Pozri sa na ne a skús hľadať nejakú ich spoločnú vlastnosť.



Ž: *Sú to také pekné grafy, ale nevidím nič spoločné.*

U: Ide práve o to, čo si povedal, že sú pekné. Skús bližšie popísať, čo sa ti páči.

Ž: *Keď sa tak na ne pozerám, tak som si všimol, že sú všetky súmerné podľa osi y.*

U: Výborne, to je presne tá vlastnosť, o ktorej budeme teraz hovoriť. Pozrime sa bližšie na to, prečo je to tak. Vezmime prvú funkciu $f : y = 5 - x^2$ a vypíšeme do tabuľky niekoľko jej funkčných hodnôt.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	1	4	5	4	1	-4

Ž: *Táto funkcia sa správa tak, že trojke aj mínus trojke priradí tú istú hodnotu, takisto dvojke aj mínus dvojke priradí tú istú hodnotu, preto to bude súmerné podľa osi y.*

U: Skús to teraz sformulovať všeobecne.

Ž: *Pre našu funkciu musí platiť, že dáva rovnaké funkčné hodnoty pre číslo aj číslo k nemu opačné, teda $f(x) = f(-x)$.*

U: Vystihol si podstatu, ja to ešte trochu upresním. Tvoja podmienka musí platiť pre všetky x z definičného oboru $\mathcal{D}$ a zároveň ak vezmeme ľubovoľné $x \in \mathcal{D}$, musí aj $-x \in \mathcal{D}$, aby sme mohli určiť a porovnať funkčné hodnoty v týchto bodoch. Funkciu, ktorá má tieto vlastnosti, nazývame párnou a definícia znie takto:

Funkciu f nazývame párnou práve vtedy, ak platí

1. $\forall x \in \mathcal{D}$ ***aj*** $-x \in \mathcal{D}$

2. $\forall x \in \mathcal{D}$ ***platí*** $f(-x) = f(x)$.

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y.

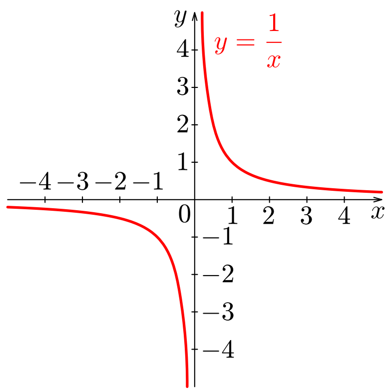
Ž: *Prečo sa volajú práve párne?*

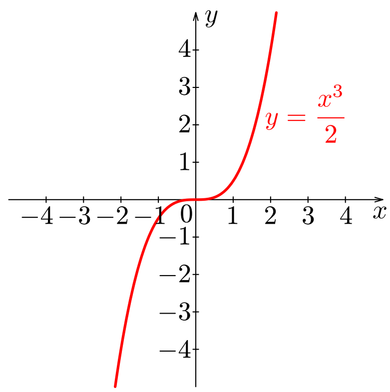
U: Pozri sa opäť na naše tri ukážky, sú to funkcie $f : y = 5 - x^2$, $g : y = x^4 - 2x^2$, $h : y = \dfrac{1}{2x^2}$.

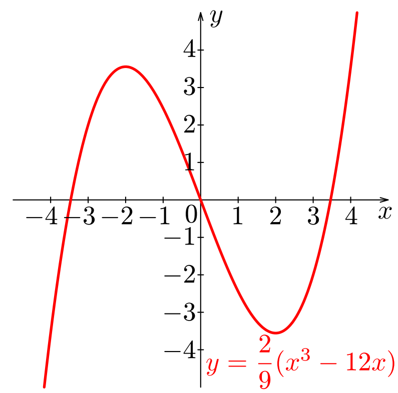
Ž: *Už to vidím, vo všetkých sú len párne mocniny pri premennej x, vrátane x^0.*

Ž: *A čo keď dáme do predpisu funkcie len nepárne mocniny? Bude to nepárna funkcia?*

U: Áno, vyskúšajme to, tu máme tri ukážky grafov nepárnych funkcií: $f : y = \dfrac{1}{x}$; $g : y = 0,5x^3$; $h : y = \dfrac{2}{9}(x^3 - 12x)$. Čo majú spoločné?







Ž: *Toto je už iná situácia. Grafy sú tiež pekné súmerné, ale nie je to súmernosť ani podľa osi y, ani podľa osi x. Tak ako?*

U: Tieto grafy sú stredovo súmerné a to podľa bodu $[0; 0]$. Ukážeme si to na prvej funkcii $f : y = \dfrac{1}{x}$. Najprv do tabuľky zapíšeme niekoľko funkčných hodnôt:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Ž: *Teda ak sa x zmení na číslo opačné, zmení sa aj y na číslo opačné, čo by sme mohli zapísať $f(-x) = -f(x)$.*

U: Môžeme sformulovať presnú definíciu:

Funkciu f nazývame nepárnou práve vtedy, ak platí

1. $\forall x \in \mathcal{D}$ ***aj*** $-x \in \mathcal{D}$

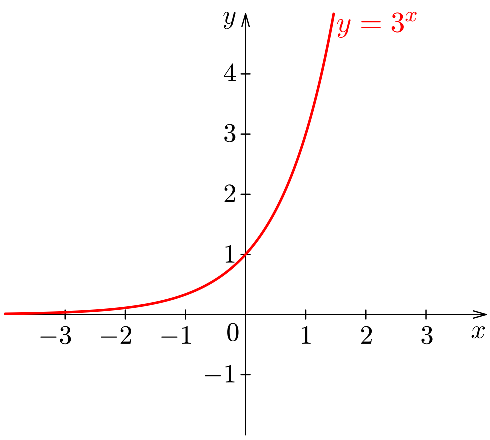
2. $\forall x \in \mathcal{D}$ ***platí*** $f(-x) = -f(x)$.

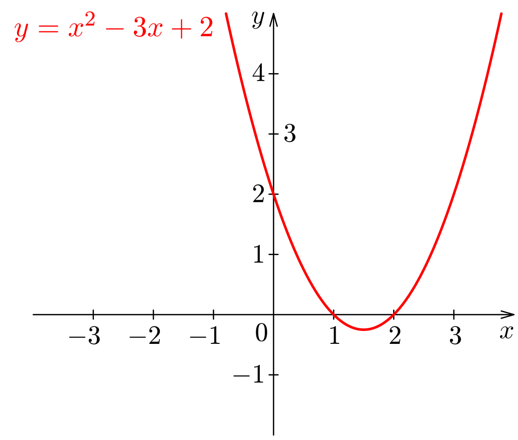
Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.

U: Tieto vlastnosti – párnosť a nepárnosť funkcie určujeme aj pri iných typoch funkcií, napríklad goniometrická funkcia kosínus je párna, tangens je nepárna.

Ž: *Existuje funkcia, ktorá je súčasne párna aj nepárna?*

U: Áno, je to funkcia $y = 0$. Jej graf je súmerný aj podľa osi y a aj podľa bodu $[0; 0]$.
Je ale veľmi veľa funkcií, ktoré nie sú ani párne, ani nepárne, tu máme dve ukážky – funkcie $y = 3^x$ a $y = x^2 - 3x + 2$.

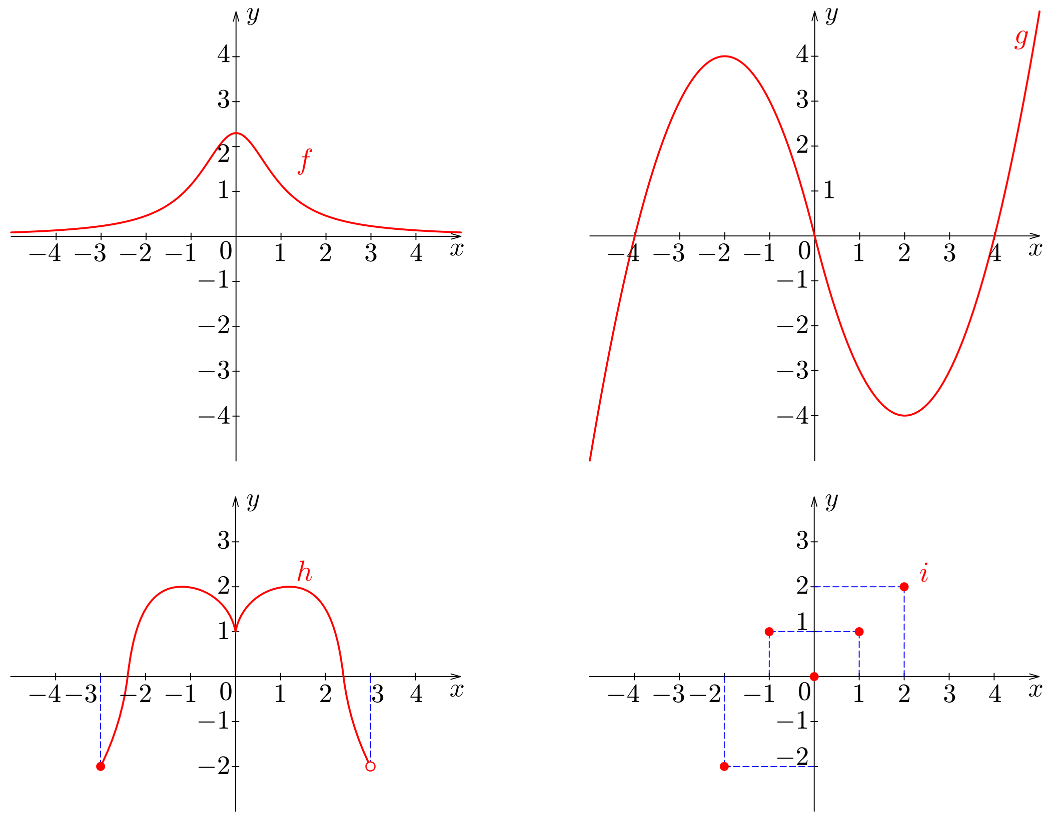




Ž: *Takže to zhrniem. Funkcie rozdeľujeme na*

- **párne** – *ich grafy sú súmerné podľa osi y;*
- **nepárne** – *ich grafy sú súmerné podľa začiatku súradnicovej sústavy;*
- **ostatné**, *teda ani párne, ani nepárne.*

Príklad 1: *Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti funkcií, ktorých grafy sú na obrázkoch:*



U: Začni s prvou funkciou. Keďže nie je uvedené inak, považujeme za jej definičný obor množinu všetkých reálnych čísel.

Ž: *Graf tejto funkcie je súmerný podľa osi y, preto odpoveď je jasná – funkcia f je párna. Naproti tomu graf funkcie g na druhom obrázku je súmerný podľa bodu $[0; 0]$, preto je to nepárna funkcia.*

U: Výborne, pokračuj.

Ž: *Na treťom obrázku je opäť graf súmerný podľa osi y, takže h bude zase párna funkcia.*

U: Musím ťa opraviť, nie je to tak, urč najprv definičný obor funkcie h. Všimni si, že v bode 3 máš prázdny krúžok, v bode -3 zas plný.

Ž: *Preto definičný obor je interval $\langle -3; 3)$ a teda ten graf nie je úplne súmerný.*

U: Presne tak, pre číslo -3 tu nie je splnená prvá podmienka z definície párnej funkcie a totiž, že pre každé číslo z definičného oboru platí, že aj k nemu opačné číslo patrí do definičného oboru.

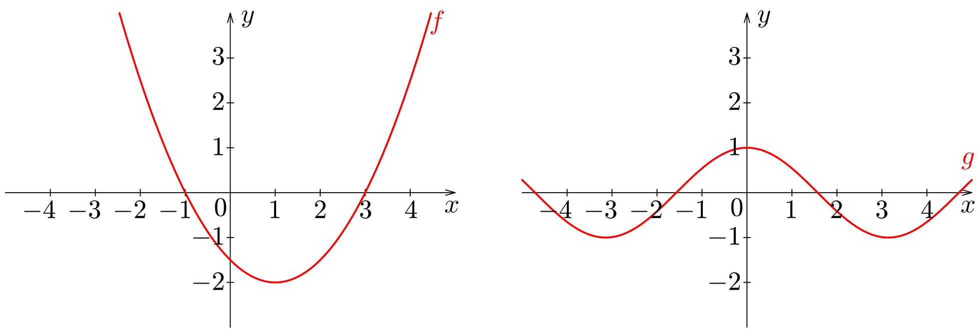
Ž: *Odpoveď teda bude, že funkcia h nie je ani párna, ani nepárna. Ostala mi posledná funkcia. Jej graf tvorí len 5 bodov, ale nie je súmerný ani podľa osi y, ani podľa bodu $[0; 0]$, teda táto funkcia opäť nie je ani párna, ani nepárna.*

U: Súhlasím, a zaujímalo by ma ešte, či by si vedel zmeniť graf tejto poslednej funkcie tak, aby bola párna alebo nepárna.

Ž: *Asi by som zmenil hodnotu funkcie v bode -1 na -1, tak by som dostal nepárnu funkciu. Ale mohol by som to urobiť aj inak, zmeniť hodnotu funkcie v bode -2 na 2 a dostal by som párnu funkciu.*

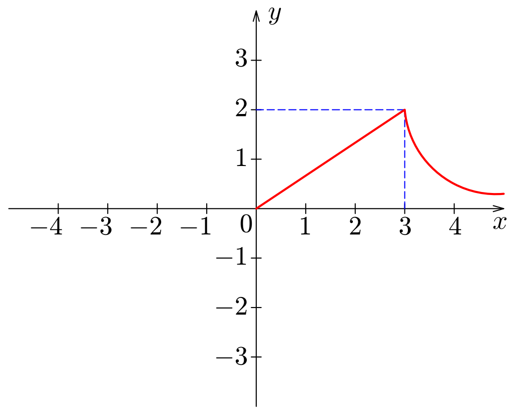
U: Výborne.

Úloha 1: *Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti funkcií, ktorých grafy sú na obrázkoch:*

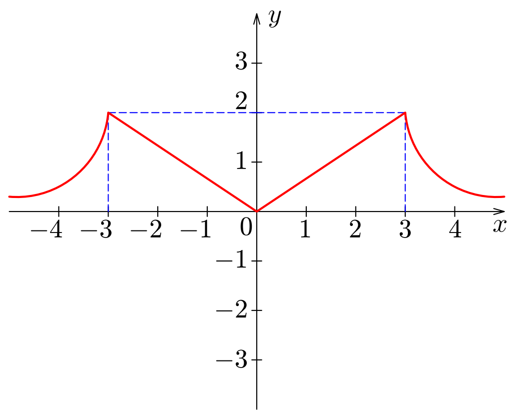


Výsledok: f – ani párna, ani nepárna; g – párna

Príklad 2: *Dokreslite graf funkcie naznačený na obrázku tak, aby vznikol graf a) párnej funkcie; b) nepárnej funkcie.*

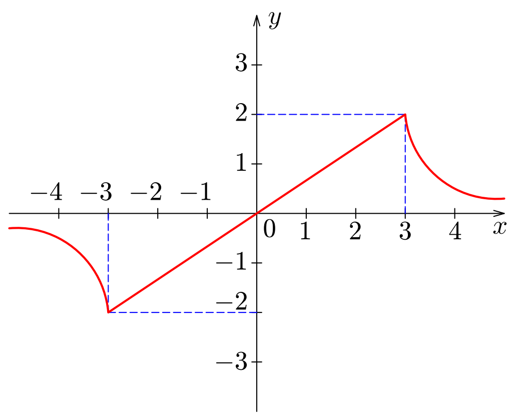


Ž: *Najprv to skúsim dokresliť tak, aby vznikol graf párnej funkcie. Viem, že musí byť súmerný podľa osi y, teda preklopím podľa osi y tú časť, ktorú máme. Vznikne takýto obrázok:*



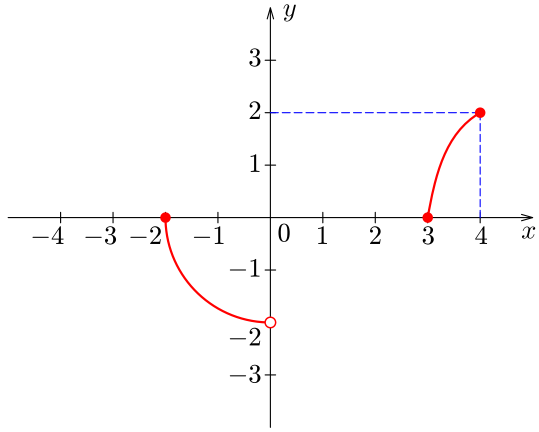
U: Zvládol si to výborne, toto je naozaj graf párnej funkcie, jej definičným oborom je množina všetkých reálnych čísel. Skús teraz druhú časť úlohy.

Ž: *Ak chcem, aby mi vznikol graf nepárnej funkcie, musím to urobiť tak, aby bol súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy. Preto ten vrchol, ktorý tam mám v bode* $[3; 2]$ *sa dostane do bodu* $[-3; -2]$. *Myslím, že by to mohlo vyzerať takto:*

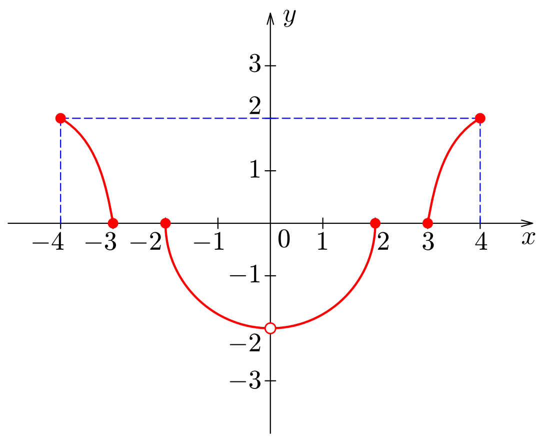


U: Výborne, toto je graf nepárnej funkcie, definičným oborom je opäť množina všetkých reálnych čísel.

Príklad 3: *Na obrázku je zostrojená časť grafu funkcie, ktorej definičný obor je interval $\mathcal{D} = \langle -4; 4\rangle$. Načrtnite graf tejto funkcie tak, aby bola a) párna; b) nepárna; c) ani párna, ani nepárna.*



Ž: *Začnem párnou funkciou. Jej graf má byť súmerný podľa osi y, takže obidve časti grafu, ktoré máme v zadaní, zobrazím osovo súmerne podľa osi y. Vznikne mi niečo takéto:*



U: Toto ale nespĺňa všetky podmienky našej úlohy.

Ž: *Prečo? Nie je to vari párna funkcia? Veď graf je pekne symetrický!*

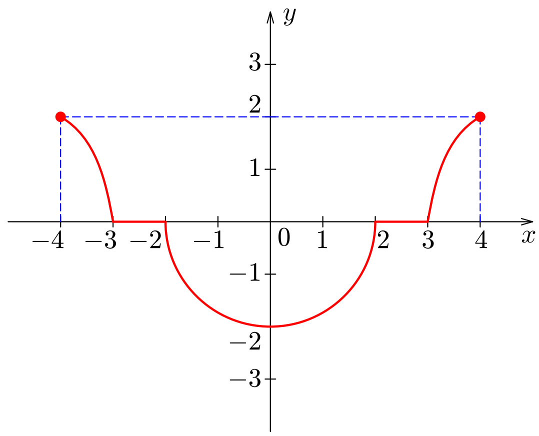
U: S tým súhlasím, ale zadanie požadovalo, aby definičným oborom hľadanej funkcie bol interval $\langle -4; 4\rangle$.

Ž: *Aha, chýba mi časť od -3 po -2 a od 2 po 3. Čo keby som tieto body jednoducho spojil úsečkami?*

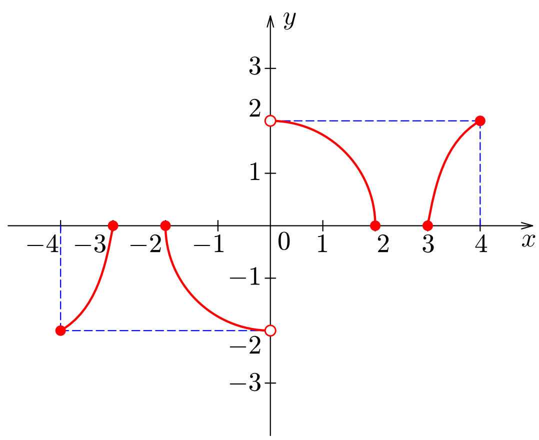
U: Presnejšie povedané, všetkým bodom z intervalov $\langle -3; -2\rangle$ a $\langle 2; 3\rangle$ priradíš hodnotu nula. To by šlo. Ešte ti ostal bod nula.

Ž: *Aj jemu mám priradiť nejakú hodnotu, najjednoduchšie bude vyplniť prázdny krúžok, teda priradiť -2, graf potom bude pekný súvislý.*

U: Áno, teda graf jednej z možných párnych funkcií vyhovujúcich zadaniu je takýto:



Ž: *Podobne skúsim vyrobiť aj graf nepárnej funkcie. Ten má byť stredovo súmerný podľa bodu* $[0; 0]$*, preto najprv zobrazím dané časti v tejto súmernosti. Vznikne zatiaľ takýto obrázok:*



Ž: *Opäť mi chýbajú časti od* -3 *po* -2 *a od* 2 *po* 3*. Mohol by som to doplniť úsečkami ako v predchádzajúcej úlohe.*

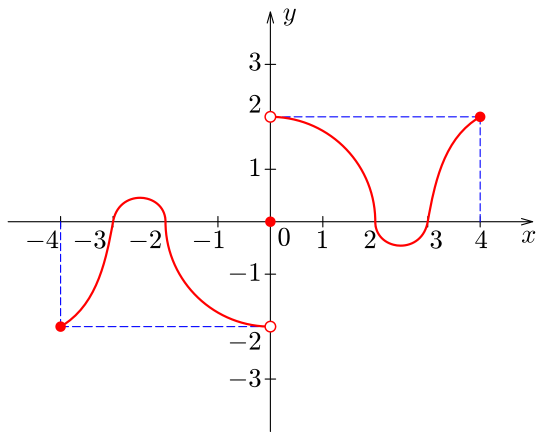
U: Mohol, ale skús vymyslieť niečo zaujímavejšie.

Ž: *No dobre, tak tam doplním oblúčiky.*

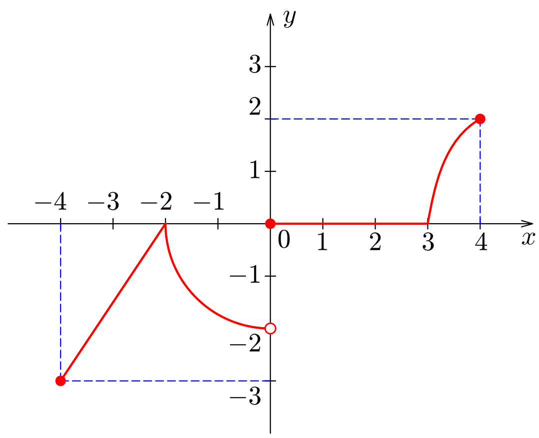
U: Ešte nám chýba hodnota v bode 0.

Ž: *Najľahšie je zase zaplniť oba plné krúžky. Jaj, nie! To by potom nebola funkcia. Tak neviem.*

U: Ak graf má byť súmerný podľa začiatku, tak bodu nula musíme priradiť hodnotu nula. Iná situácia by bola, keby nula nemusela byť v definičnom obore. Vtedy by $f(0)$ nemusela existovať. Teda graf jednej z možných nepárnych funkcií, vyhovujúcich zadaniu je takýto:



Ž: *Ostala mi posledná časť, ktorá bude asi najľahšia. Ak funkcia nemá byť ani párna, ani nepárna, tak jej graf nesmie byť súmerný ani podľa osi y ani podľa začiatku súradnicovej sústavy. Doplním to napríklad takto:*



U: Výborne.

Príklad 4:

1. *Existuje funkcia, ktorej* $\mathcal{D} = (-5; 5\rangle$ *a ktorá je párna?*

2. *Je pravda, že ak* f *je nepárna funkcia a nula patrí do jej definičného oboru, tak potom hodnota funkcie* f *v bode* 0 *je nutne* 0*?*

U: Keďže nevieme nič o grafe tejto funkcie, budeme musieť vyjsť z definície párnej funkcie. Zopakuj ju.

Ž: *Funkciu* f *nazývame párnou práve vtedy, ak platí*
1) pre každé $x \in \mathcal{D}$ *aj* $-x \in \mathcal{D}$
2) pre každé $x \in \mathcal{D}$ *platí* $f(-x) = f(x)$.

U: Dobre, a teraz sa vráťme k zadaniu.

Ž: *Naša funkcia má definičný obor* $(-5; 5\rangle$. *Čiže číslo* 5 *do definičného oboru patrí, ale číslo* -5 *do definičného oboru nepatrí. To ale nevyhovuje prvej podmienke z definície, teda takáto funkcia nemôže byť párna.*

U: Dobre.

Ž: *Idem na druhú časť, ale neviem, odkiaľ mám začať.*

U: Vyjdeme z toho, že pre nepárnu funkciu platí

$$f(-x) = -f(x).$$

Za x dosadíme nulu.

Ž: *Dostanem* $f(-0) = -f(0)$. *Ale opačné číslo k nule je nula, teda* $f(0) = -f(0)$, *odtiaľ* $2f(0) = 0$, *čiže* $f(0) = 0$.
Vyšlo to, ak je funkcia f *nepárna, tak naozaj* $f(0) = 0$.

Príklad 5: *Zistite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú párne, resp. nepárne:*

a) $f : y = \dfrac{|x|}{x}$

b) $g : y = 4x^2$

c) $h : y = 2x - 3$

d) $i : y = \dfrac{1}{x^5 - 1}$.

U: Pri riešení tejto úlohy použi definíciu párnej, resp. nepárnej funkcie. Najprv vždy urč definičný obor.

Ž: *OK. Začnem funkciou*

$$f : y = \frac{|x|}{x}.$$

Jej definičným oborom je $\mathbb{R} - \{0\}$*, čo je symetrické podľa nuly, teda prvá podmienka z definície je splnená. Idem na druhú podmienku, mám porovnať* $f(x)$ *a* $f(-x)$*. Teda pre všetky* $x \in \mathcal{D}$ *platí*

$$f(-x) = \frac{|(-x)|}{(-x)} = \frac{|x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} = -f(x).$$

Táto funkcia je nepárna.

U: Výborne, využil si vlastnosť všetkých reálnych čísel, a totiž že $|-x| = |x|$.

Ž: *Skúsim druhú funkciu*

$$g : y = 4x^2.$$

Tu je definičným oborom množina všetkých reálnych čísel, teda podmienka symetrie definičného oboru je splnená a pre každé reálne číslo x *platí*

$$g(-x) = 4(-x)^2 = 4x^2 = g(x)$$

Teda g *je párna funkcia.*

U: Ide ti to výborne, pokračuj.

Ž: *Tretia funkcia*

$$h : y = 2x - 3$$

je tiež definovaná pre všetky reálne čísla a platí

$$h(-x) = 2(-x) - 3 = -2x - 3.$$

No a teraz neviem čo ďalej.

U: Ak by táto funkcia mala byť párna, muselo by platiť $h(-x) = h(x) = 2x - 3$.

Ž: *Lenže to neplatí vždy, iba pre nulu. Takže párna nie je.*

U: A ak by mala byť nepárna, tak by muselo platiť $h(-x) = -h(x)$ t.j.$-(2x - 3) = -2x + 3$.

Ž: *Ale to tiež neplatí, lebo u nás* $h(-x) = -2x - 3$*, nesedí tu znamienko. Teda táto funkcia nie je ani nepárna.*

U: Presne tak, táto funkcia nie je ani párna ani nepárna.

U: Ostala ti posledná funkcia

$$i : y = \frac{1}{x^5 - 1}$$

Ž: *To nebude ťažké. Najprv určím definičný obor. Musí platiť* $x^5 \neq 1$*, odkiaľ* $x \neq 1$*. A keďže do definičného oboru patrí číslo* -1*, ale nepatrí číslo* 1*, tak definičný obor nie je symetrický vzhľadom na nulu. Preto táto funkcia nie je ani párna, ani nepárna.*

Úloha 5: *Zistite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú párne, resp. nepárne:*

a) $f : y = 3x^2 - 2$

b) $g : y = \dfrac{1}{x^3}$

c) $h : y = \log x$

d) $i : y = x^3 + x.$

Výsledok: a) párna; b) nepárna; c) ani párna, ani nepárna; d) nepárna

Príklad 6: *Zistite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú párne, resp. nepárne:*

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad g : y = \sqrt{1 + \frac{x}{1 - x}}, \qquad h : y = x(x - 1)(x + 1).$$

Ž: *Najprv určím definičný obor prvej funkcie*

$$f : y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Musím teda napísať podmienku $1 - x^2 \geqq 0$, *odkiaľ* $1 \geqq x^2$. *Odmocním a dostanem* $|x| \leqq 1$, *čiže* $x \in \langle -1; 1\rangle$. *Teda pre všetky* $x \in \mathcal{D}$ *aj* $-x \in \mathcal{D}$, *môžem ísť ďalej. Určím hodnotu* $f(-x)$*:*

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x).$$

Funkcia f je párna.

U: Veľmi dobre, pokračuj.

Ž: *V druhej funkcii*

$$g : y = \sqrt{1 + \frac{x}{1 - x}}$$

si tiež dám podmienku na výraz pod odmocninou, teda

$$1 + \frac{x}{1 - x} \geqq 0.$$

Dám na spoločného menovateľa

$$\frac{1 - x + x}{1 - x} \geqq 0,$$

čiže

$$\frac{1}{1 - x} \geqq 0.$$

U: Dospel si k zlomku, ktorý má byť nezáporný, pričom jeho čitateľ je kladné číslo.

Ž: *Tak z toho vyplýva, že menovateľ bude nezáporný.*

U: Pozor, v menovateli zlomku nesmie byť nula!

Ž: *Teda menovateľ musí byť kladný, čo zapíšem* $1 - x > 0$ *odkiaľ* $1 > x$. *Preto* $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$ *a táto funkcia potom nemôže byť ani párna, ani nepárna, lebo jej definičný obor nie je symetrický vzhľadom na nulu.*

U: Áno, ostala ti posledná funkcia

$$h : y = x(x - 1)(x + 1).$$

Ž: *Tu netreba písať žiadne podmienky, teda $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Potrebujem vyjadriť $h(-x)$:*

$$h(-x) = -x(-x-1)(-x+1).$$

Z oboch zátvoriek vyberiem mínus

$$h(-x) = -x[-(x+1)][-(x-1)] = -x(x+1)(x-1).$$

Vidím, že som nakoniec dostal opačný výraz k $h(x)$, teda funkcia h je nepárna.

Úloha 6: *Zistite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú párne, resp. nepárne:*

a) $f : y = 2^x$

b) $g : y = 3x(x^2 - 2)$

c) $h : y = \dfrac{x-3}{x+2}$.

Výsledok: a) ani párna, ani nepárna; b) nepárna; c) ani párna, ani nepárna