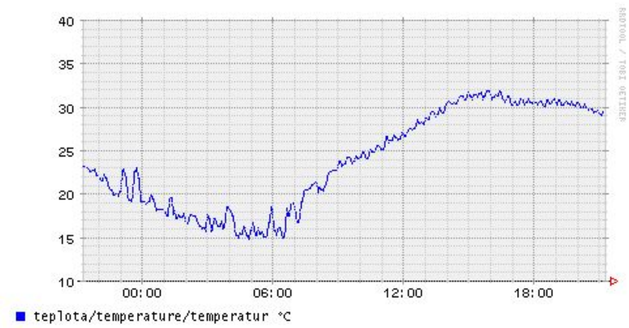
Ohraničenosť funkcie

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: V bežnom živote sa často stretávame s funkciami, ktorých hodnoty sú určitým spôsobom obmedzené buď na celom definičnom obore $\mathcal{D}$ alebo len na jeho časti M. Ukážeme si to na príklade funkcie, zachytávajúcej závislosť teploty ovzdušia na čase. Výsledkom takéhoto merania za 24 hodín by mohol byť graf na tomto obrázku:



U: Vidíme, že teplota počas celého dňa neprekročila hodnotu $35^\circ C$, preto môžeme číslo 35 považovať za horné ohraničenie našej funkcie, označíme ho h.

Ž: *Je to teda niečo ako magická hranica, ktorá sa nesmie pre danú funkciu prekročiť?*

U: Áno, pre všetky funkčné hodnoty musí platiť $f(x) \leqq h$.

Ž: *Myslím, že podobne by sme mohli vymyslieť aj dolné ohraničenie, to by predstavovalo určitú hranicu, ktorá sa nesmie podliezť, napríklad tu by to mohlo byť $10^\circ C$.*

U: Áno, označili by sme ho d.
Sformulujme teraz definície našich nových pojmov:
Nech M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru.

Funkcia f sa nazýva zhora ohraničená na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, ak existuje také číslo h, že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \leqq h$. Číslu h hovoríme horné ohraničenie.

Funkcia f sa nazýva zdola ohraničená na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, ak existuje také číslo d, že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geqq d$. Číslu d hovoríme dolné ohraničenie.

U: Môžeme si uviesť aj iné príklady ohraničení – napr. rýchlosť auta v obci nesmie prekročiť $60\,km/h$ alebo zostatok na účte v banke nesmie klesnúť pod 10 eur.

Ž: *A čo ak je funkcia ohraničená zhora aj zdola?*

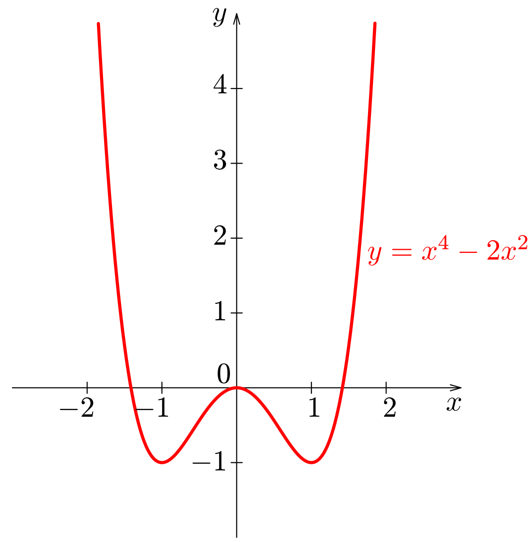
U: Dobrá otázka. Takéto funkcie samozrejme existujú a povie sa im skrátene ohraničené, teda:

Funkcia f sa nazýva ohraničená na množine $M \subset \mathcal{D}$ práve vtedy, ak je na množine M ohraničená zhora a súčasne aj zdola.

U: Pozrime sa teraz na konkrétny príklad, funkciu

$$f : y = x^4 - 2x^2,$$

jej graf vidíš na obrázku. Skús povedať, ako to je s ohraničenosťou tejto funkcie najprv na množine $M = \langle -1; 1 \rangle$, potom na celom definičnom obore.



Ž: *Ak si teda budem všímať iba množinu $M = \langle -1; 1 \rangle$, tak tu sú všetky funkčné hodnoty v rozpätí od -1 po 0. Teda môžem povedať, že funkcia je ohraničená na množine M, jej dolné ohraničenie je $d = -1$, horné je $h = 0$. Teraz mi ale niečo napadlo – nemohol by som povedať, že dolné ohraničenie je -2? Alebo -100?*

U: Mohol, vo všetkých týchto prípadoch naozaj pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geqq d$. Nám úplne stačí nájsť jedno ohraničenie, nemusí to byť nutne to najtesnejšie.

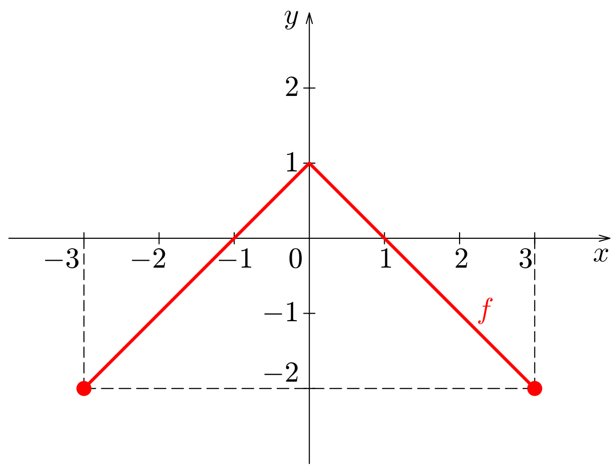
Ž: *Ešte sa vrátim k druhej časti úlohy. Pre funkciu $f : y = x^4 - 2x^2$ je jej definičným oborom množina $\mathbb{R}$. Tu potom funkcia bude ešte stále zdola ohraničená, napr. číslom $d = -1$. Ale zhora už ohraničená nebude.*

U: Výborne. Na záver ešte dodám, že ak máme zistiť, či funkcia je ohraničená na svojom definičnom obore, môžeme postupovať niekoľkými spôsobmi:

1. použijeme graf funkcie – ak je ohraničená, tak priamky $y = d, y = h$ ohraničujú rovinný pás, vnútri ktorého leží celý graf funkcie;
2. vyslovíme hypotézu o ohraničenosti, ktorú dokážeme na základe definície;
3. pomôžeme si oborom hodnôt – napr. ak $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, funkcia nemôže byť ohraničená;
4. pri niektorých funkciách si pomôžeme vhodnými úvahami.

Príklad 1: *Ktoré z tvrdení o funkcii f danej grafom na obrázku je pravdivé?*

a) Definičný obor je $\langle -3; 3\rangle$.
b) Funkcia nie je ohraničená.
c) Funkcia je párna.
d) Funkcia je rastúca na $\langle -3; 0\rangle$.

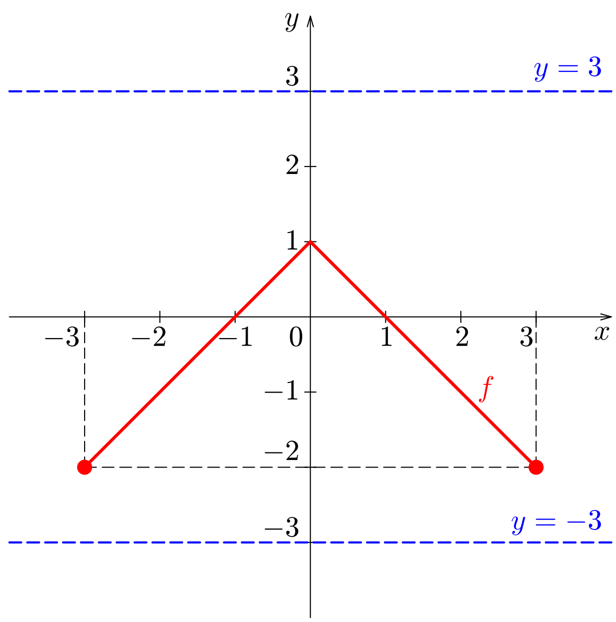


Ž: *Najprv mám skontrolovať definičný obor. Predstavím si, že všetky body grafu premietnem kolmo na x-ovú os a vidím, že naozaj dostanem interval $\langle -3; 3\rangle$.*

U: Teda prvé tvrdenie je pravdivé.

Ž: *Druhé tvrdenie hovorí, že funkcia nie je ohraničená. Ale to podľa mňa vôbec nie je pravda, práve naopak – táto funkcia je ohraničená, napríklad zhora číslom 3 a zdola číslom -3.*

U: Áno, preto ak zostrojíme pomocné priamky $y = 3$ a $y = -3$, tak celý graf funkcie f bude ležať v rovinnom páse, ohraničenom týmito priamkami, ako to vidíme na ďalšom obrázku:



U: Ešte podotknem, že za ohraničenie sme mohli zvoliť aj iné čísla, najtesnejšie by boli $h = 1$ a $d = -2$. A tvrdenie, že funkcia f je ohraničená by sme symbolicky zapísali takto:

$$\forall x \in \mathcal{D}: \quad -2 \leqq f(x) \leqq 1.$$

Ž: *V tretej časti mám overiť, či funkcia je párna. A to je, pretože jej definičný obor je $\langle -3; 3\rangle$, teda s každým x aj $-x$ patrí do $\mathcal{D}$. A graf je pekne súmerný podľa osi y, teda pre všetky $x \in \mathcal{D}$ je $f(-x) = f(x)$.*

U: Výborne, ostalo ti posledné tvrdenie o monotónnosti.

Ž: *Ak sa pozriem na graf, tak vidím, že na intervale $\langle -3; 0\rangle$ je funkcia naozaj rastúca, teda je to opäť pravdivé tvrdenie.*

U: Ja len zopakujem, čo to znamená podľa definície, že funkcia je rastúca: $\forall x_1, x_2 \in \langle -3; 0\rangle$ platí ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) < f(x_2)$.

Príklad 2: *Zistite, či funkcia* $f : y = \dfrac{1}{x^2+1}$ *je ohraničená.*

U: Táto úloha sa dá vyriešiť viacerými spôsobmi, vyber nejaký.

Ž: *Neviem si dosť dobre predstaviť, ako asi vyzerá graf takejto funkcie, tak si skúsim do tabuľky vypísať niekoľko hodnôt.*

U: Dobre, daj tam však aj malé aj veľké čísla, aj kladné aj záporné.

Ž: *OK. Vytvorím takúto tabuľku:*

x	-100	-10	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	2	20	1000
$f(x)$	$\frac{1}{10001}$	$\frac{1}{101}$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}8$	1	$0{,}941$	$0{,}5$	$0{,}2$	$\frac{1}{401}$	$\frac{1}{1000001}$

To by mohlo stačiť. Vidím, že všetky hodnoty sú kladné a menšie alebo rovné jednej, tak si tipnem, že to bude funkcia ohraničená zdola nulou, zhora jednotkou.

U: Symbolicky tvoju hypotézu zapíšeme takto:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 \leqq f(x) \leqq 1.$$

Teraz ju skús dokázať. Skladá sa vlastne z dvoch nerovností, teda si dôkaz rozdeľ na dve časti.

Ž: *Tak najprv* $\forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 \leqq f(x)$*, čiže*

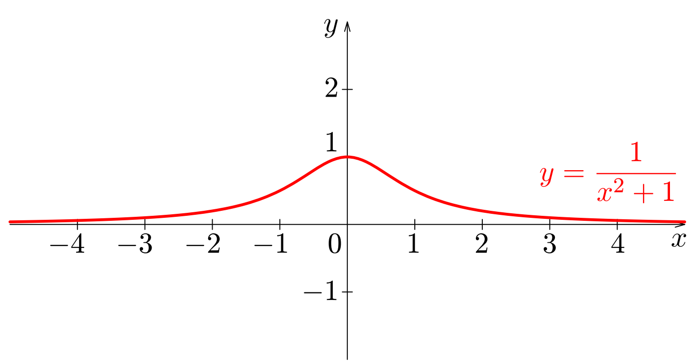
$$0 \leqq \frac{1}{x^2+1}.$$

Prenásobím kladným výrazom x^2+1*, dostanem* $0 \leqq 1$*, čo platí.*
To bolo ľahké, skúsim druhú polovicu: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) \leqq 1$*, čiže*

$$\frac{1}{x^2+1} \leqq 1.$$

Opäť prenásobím kladným výrazom x^2+1*, dostanem* $1 \leqq x^2+1$*, odkiaľ* $0 \leqq x^2$*. A to tiež platí, pretože druhá mocnina je vždy číslo nezáporné.*

U: Si šikovný, za odmenu ti na nasledujúcom obrázku ukážem graf našej funkcie, aby si si overil svoju hypotézu:



Ž: *Hm, sedí to. Vy ste však na začiatku povedali, že sa to dá riešiť viacerými spôsobmi. Ako ešte?*

U: Napríklad úvahou. Pre všetky reálne čísla x platí, že $x^2 \geqq 0$, teda x^2+1 je kladné, preto aj $\dfrac{1}{x^2+1}$ bude kladné číslo. A tak získam dolné ohraničenie – nulu.

Na druhej strane, ak $x^2 \geqq 0$, tak $x^2+1 \geqq 1$, teda $\dfrac{1}{x^2+1}$ je zlomok, ktorého kladný čitateľ je menší nanajvýš rovný menovateľu. A to znamená, že zlomok je menší nanajvýš rovný jednej. Preto jednotka bude horným ohraničením.

Ž: *Aké jednoduché, škoda že som na to neprišiel sám.*

Príklad 3: *Zdôvodnite, že funkcia* $f : y = x^2 + 2x + 4$ *je zdola ohraničená.*

U: Toto sa dá veľmi pekne zvládnuť, ak použiješ šikovnú úpravu predpisu funkcie.

Ž: *Hm, lenže ktorú?*

U: Úpravu na štvorec.

Ž: *Aha, idem na to:*

$$y = x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) - 1 + 4 = (x + 1)^2 + 3.$$

A čo teraz?

U: Dobre sa pozri na výsledný tvar. Získali sme štvorec, teda druhú mocninu $(x + 1)^2$. Čo o nej vieme povedať?

Ž: *Že je to určite číslo kladné.*

U: Aké?

Ž: *Joj, pardon, nezáporné.*

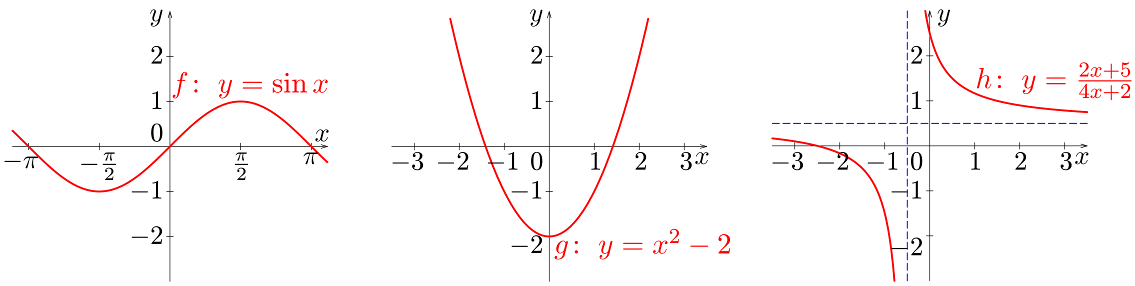
U: A teda ak k nemu ešte pripočítame trojku, určite bude mať hodnotu aspoň tri, teda

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geqq 3.$$

Tým sme zistili, že naša funkcia je zdola ohraničená číslom 3.

Úloha 3: *Zdôvodnite, že funkcia* $f : y = 5 - 6x - x^2$ *je zhora ohraničená.*

Príklad 4: *Rozhodnite o ohraničenosti funkcií daných grafmi na obrázku:*



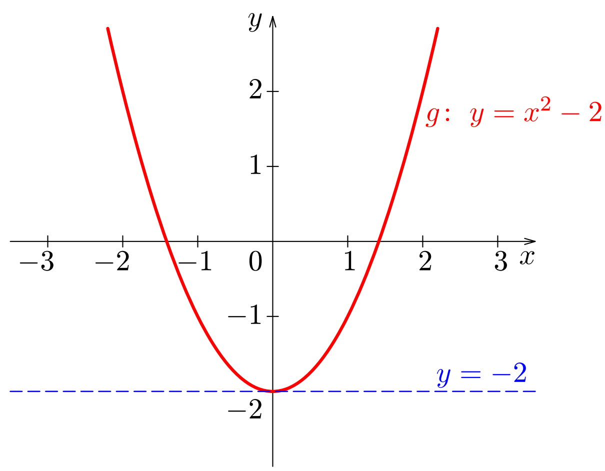
Ž: *To nie je ťažká úloha, stačí sa len dobre pozrieť na grafy. Hneď na tom prvom vidím, že pre všetky hodnoty funkcie f platí*

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1.$$

Teda f je ohraničená funkcia, za dolné ohraničenie môžem zobrať číslo $d = -1$ a za horné ohraničenie číslo $h = 1$.

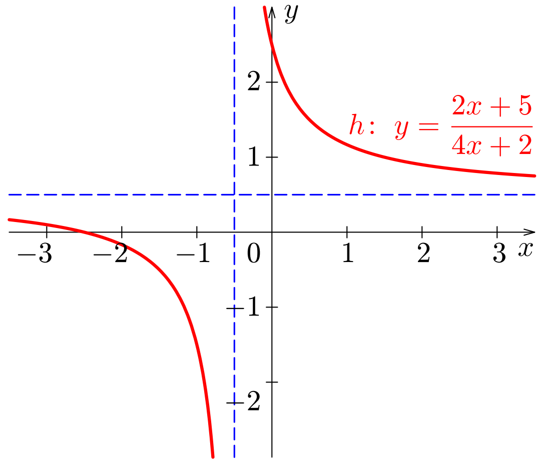
U: Výborne, pokračuj.

Ž: *Teraz sa pozriem na druhý obrázok, na graf funkcie $g : y = x^2 - 2$. Tu zase jasne vidím, že je ohraničená zdola číslom -2. Pretože ak si dokreslím priamku $y = -2$, tak celý graf leží nad ňou, ako na mojom obrázku, iba sa jej raz dotkne. Ale myslím si, že táto funkcia zhora ohraničená nebude.*

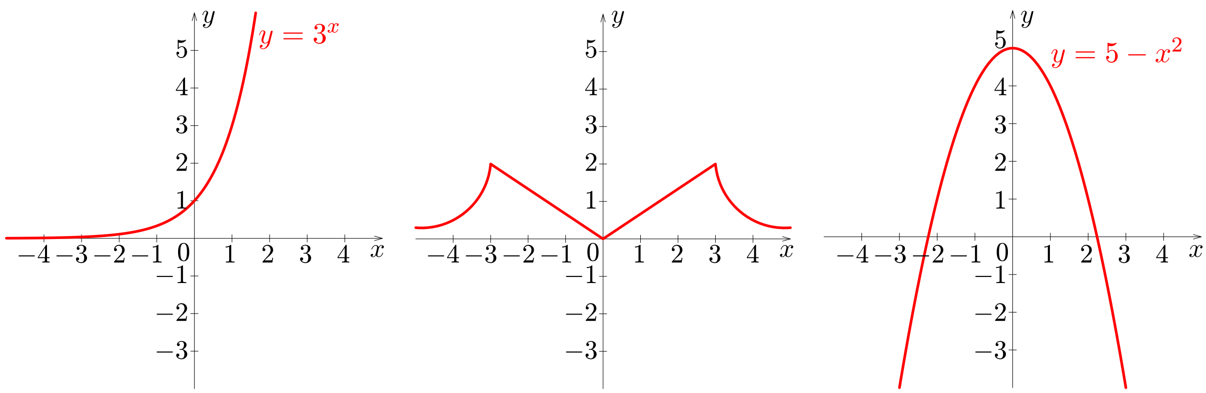


U: Máš pravdu, nech by sme akékoľvek číslo h chceli prehlásiť za jej horné ohraničenie, vždy by sa našlo také reálne číslo, v ktorom by hodnota funkcie prevýšila hodnotu h.

Ž: *Ostal mi posledný obrázok, na ňom je graf funkcie $h : y = \dfrac{2x+5}{4x+2}$. Táto funkcia nie je ohraničená ani zhora ani zdola.*



Úloha 4: *Rozhodnite o ohraničenosti funkcií daných grafmi na obrázku:*



Výsledok: zdola ohraničená; ohraničená; zhora ohraničená

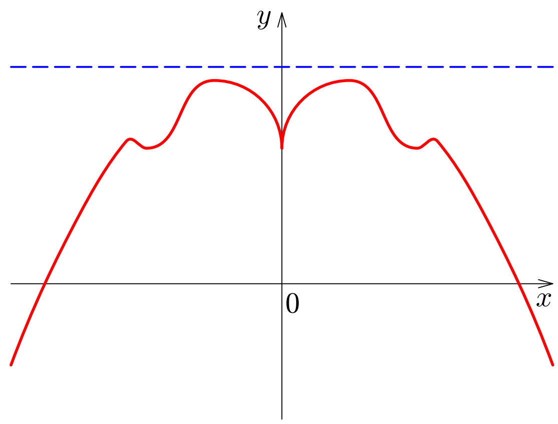
Príklad 5: *Načrtnite graf funkcie, ktorá je*

a) párna a zhora ohraničená;
b) rastúca a ohraničená;
c) klesajúca a zdola ohraničená;
d) ohraničená na $\langle -1; 1\rangle$, ale nie je ohraničená na $(-2; 2)$.

Ž: *Uf, toľko úloh naraz! Idem postupne, časť a) – funkcia má byť párna a zhora ohraničená. Párnosť vyriešim tak, že graf musí byť súmerný podľa osi y. Preto si najprv načrtnem polovicu grafu a tú potom zobrazím osovo súmerne podľa osi y.*

U: To je šikovné a ako zabezpečíš, aby funkcia bola zhora ohraničená?

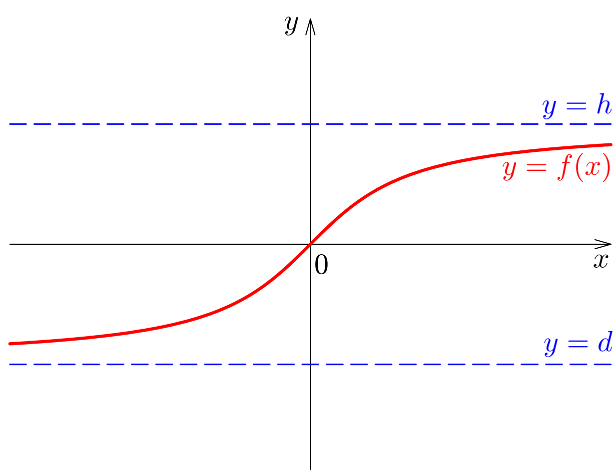
Ž: *Jednoducho. Hocikde si načrtnem rovnobežku s osou x a poviem, že celý graf musí ležať pod ňou. Výsledok bude vyzerať napríklad takto:*



U: Pekne. Môžeš skúsiť časť b) – funkcia má byť rastúca a ohraničená.

Ž: *To, aby funkcia bola ohraničená, si zabezpečím dvoma rovnobežkami s osou x, celý graf potom musí ležať medzi nimi. Lenže ona má byť ešte aj rastúca. To sa mi nejako nezdá. Veď predsa ak je rastúca, tak sa jej hodnoty zväčšujú a raz určite prekročia naše ohraničenie. Takže sa to nedá.*

U: Ale dá, tu je ukážka grafu takejto funkcie:

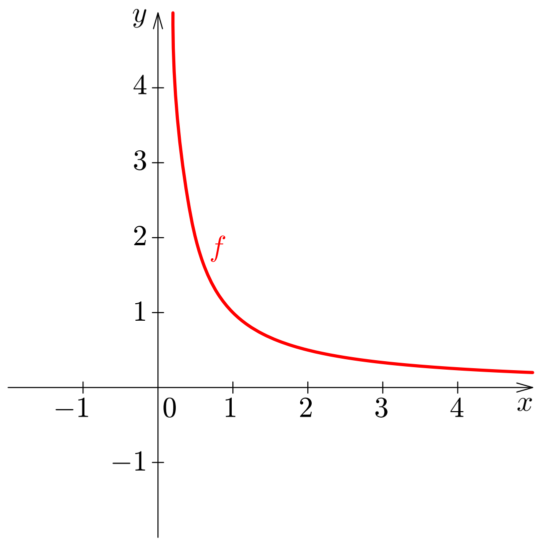


U: Môžeš si to predstaviť tak, že pre veľké x sa síce hodnoty funkcie zväčšujú, ale stále pomalšie. Teda graf sa približuje k priamke $y = h$, ale nikdy sa jej nedotkne. Podobne je to aj s priamkou $y = d$.

Ž: *Tak toto by som v živote nevymyslel.*

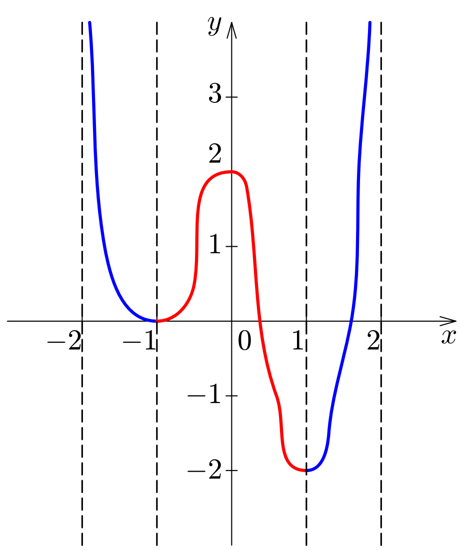
U: Nevadí, vymysleli to iní a ty teraz už ľahko zvládneš ďalší graf. V časti c) máš načrtnúť graf funkcie, ktorá je klesajúca a zdola ohraničená.

Ž: *Hm, to teda bude niečo podobné, potrebujem načrtnúť klesajúcu funkciu, ktorá ale nikdy nedosiahne určité dolné ohraničenie. Napríklad takto?*



U: Výborne, mohol by to byť graf funkcie $f : y = \dfrac{1}{x}$ pre $x \in \mathbb{R}^+$. Je to klesajúca funkcia, ale zároveň zdola ohraničená číslom nula.

Ž: *Tak už mi ostala len posledná časť d) – načrtnúť graf funkcie, ktorá bude ohraničená na $\langle -1; 1\rangle$, ale nebude ohraničená na $(-2; 2)$. To nie je ťažké. Najprv si načrtnem červenou farbou tú časť, kde má byť ohraničená na $\langle -1; 1\rangle$ a potom prikreslím modrou farbou zvyšok. Jednoducho potiahnem graf nahor, aby funkcia nebola ohraničená. Tu je výsledok:*



U: Pekne, môže byť. Tvoje funkcia síce je zdola ohraničená na $(-2; 2)$, ale keďže tam nie je ohraničená zhora, tak v zmysle našej definície naozaj povieme, že nie je ohraničená.

Príklad 6: *Zistite, či funkcia* $f : y = \dfrac{3}{4x^2} - 2$ *je ohraničená.*

Ž: *Nevidím inú možnosť, než si vypísať niekoľko hodnôt, pretože netuším, aký je priebeh tejto funkcie.*

U: To je v poriadku, úlohy často začíname riešiť práve takýmto experimentovaním.

Ž: *Všimol som si, že funkcia nie je definovaná pre nulu a dosadím si do tabuľky takéto čísla:*

x	-50	-10	-5	-1	1	5	10	100
$f(x)$	$-1,9997$	$-1,9925$	$-1,97$	$-1,25$	$-1,25$	$-1,97$	$-1,9925$	$-1,999925$

Vidím, že všetky funkčné hodnoty sú väčšie ako -2*, tak to by mohlo byť dolné ohraničenie. Na druhej strane zase hodnoty funkcie neprekročili* -1*, to by mohlo byť horné ohraničenie.*

U: Nemáš celkom pravdu, ukážeme si to v ďalšom. Zatiaľ pokračuj a zapíš svoju hypotézu symbolicky.

Ž: *Teda si myslím, že pre všetky* $x \in \mathcal{D}$ *platí:*

$$-2 \leqq f(x) \leqq -1.$$

U: A čo je v našom prípade definičným oborom?

Ž: *Je to množina* $\mathbb{R} - \{0\}$.

U: Dobre, skús dokázať svoju hypotézu.

Ž: *Začnem dolným ohraničením, teda*

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad -2 \leqq f(x),$$

čiže

$$-2 \leqq \frac{3}{4x^2} - 2,$$

pričítam 2

$$0 \leqq \frac{3}{4x^2}.$$

A to je pravda, lebo čitateľ aj menovateľ sú kladné čísla, teda aj celý zlomok je kladné číslo.

U: Výborne, teda tvoj odhad dolného ohraničenia bol dobrý.

Ž: *Skúsim teraz to horné:*

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad f(x) \leqq -1,$$

čiže

$$\frac{3}{4x^2} - 2 \leqq -1,$$

pripočítam dvojku

$$\frac{3}{4x^2} \leqq 1.$$

Teraz prenásobím kladným výrazom $4x^2$*, teda znak nerovnosti sa neobráti*

$$3 \leqq 4x^2.$$

Vydelím číslom 4 *a odmocním, dostanem*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq |x|.$$

Lenže toto neplatí pre všetky nenulové reálne čísla. Kde som urobil chybu?

U: Keďže tvoja funkcia nie je definovaná v bode nula, bude dôležité pozrieť sa na to, ako sa správa funkcia v blízkosti nuly. Preto si si do tabuľky mal dať aj takéto hodnoty:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	$-1,25$	1	$16,75$	73	10	1

Ž: *Aha, takže v blízkosti nuly dostávam veľké hodnoty, táto funkcia asi nebude ohraničená zhora.*

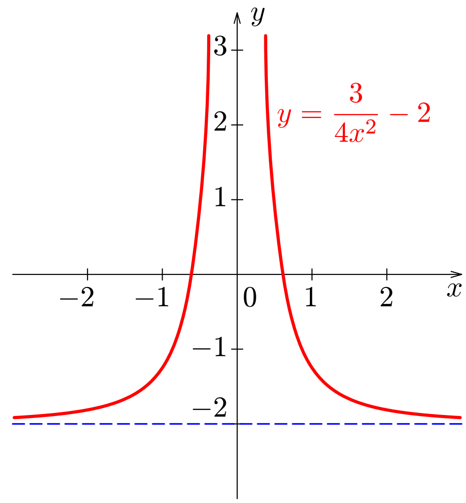
U: Presne tak, nech by sme akékoľvek číslo chceli prehlásiť za horné ohraničenie, vždy by sme pri dôkaze dospeli k nejakému sporu. Tak ako sa to stalo tebe s číslom -1.
Ak máš chuť, môžeš to dokázať aj sám. Z predpokladu, že kladné číslo h je horným ohraničením našej funkcie, teda že

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : \quad \frac{3}{4x^2} - 2 \leqq h,$$

dostaneš po niekoľkých úpravách vzťah

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{h+2}} \leqq |x|.$$

Ten však neplatí pre všetky reálne čísla.
Na záver sa pozrime na graf našej funkcie.


y
x
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1
1
2
$y = \frac{3}{4x^2} - 2$