Maximum a minimum funkcie

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Slová ***maximálny a minimálny*** sú síce cudzieho pôvodu, ale v našej reči sa už bežne používajú, napríklad maximálna povolená rýchlosť auta alebo minimálna mzda zamestnanca.

Ž: *Alebo podnikateľ chce dosiahnuť maximálne zisky pri minimálnych nákladoch.*

U: Áno, a v tom, ako to dosiahnuť, mu môže pomôcť aj matematika. Tieto dva pojmy – maximum a minimum sa totiž týkajú aj funkcií. Spoločným názvom sa označujú tiež ako ***extrémy***, teda niečo, čo sa vymyká z priemeru. Ukážeme si to na príklade funkcie, ktorá vyjadruje závislosť hodnoty amerického dolára od eura. Z internetu sme si stiahli graf, ktorý zachytáva túto závislosť v období od augusta 2006 do júla 2007:

U: Vedel by si z grafu určiť, kedy mal dolár maximálnu hodnotu?

Ž: *Pravdaže, maximálna znamená najvyššia hodnota a to bolo vtedy, keď*

$$1\,\mathrm{USD} = 0{,}8001\,\mathrm{EUR}.$$

U: Pri funkciách nás ale bude zaujímať aj to, v ktorom bode funkcia nadobudla maximálnu hodnotu, teda tu sa pýtam, v ktorom mesiaci táto situácia nastala.

Ž: *Tak to sa musím pozrieť na x-ovú os a vidím, že to bolo v októbri* 2006.

U: Dobre, a ako by to bolo s minimálnou hodnotou?

Ž: *Minimálna znamená najnižšia, a to bolo* $1\,\mathrm{USD} = 0{,}7228\,\mathrm{EUR}$ *v júli* 2007.

U: Zmenilo by sa niečo, ak by som sa pýtal na maximum alebo minimum za prvé tri mesiace roku 2007?

Ž: *Áno, maximum by dolár dosiahol v januári a minimum v marci. Presné hodnoty však neviem z grafu odčítať.*

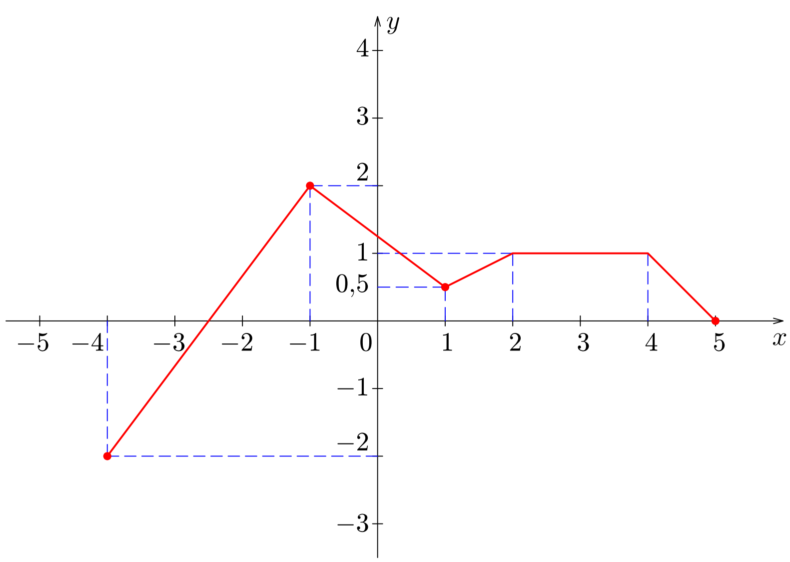
U: To nevadí, podstatné je, že z tejto ukážky vidíme, že pojmy maximum a minimum úzko súvisia s tým, na ktorej množine ich hľadáme. Ak budeme hovoriť o maxime a minime na celom definičnom obore funkcie, môžeme ich nazvať ***globálne***, teda celkové. Ak však nájdeme maximum alebo minimum len na nejakej časti definičného oboru, ako v našom príklade za prvé tri mesiace, budeme ho nazývať ***lokálne***, teda miestne maximum alebo minimum. A funkcia môže mať aj viac lokálnych extrémov.

Ž: *Napríklad v každej triede je najvyšší žiak, to je lokálne maximum, ale iba jeden je najvyšší v celej škole, to je globálne maximum. Teda možno sú aj dvaja rovnako vysokí, ale to situáciu nemení.*

U: Pekný príklad. Myslím, že je na čase vysloviť definíciu maxima a minima funkcie na nejakej množine. Táto definícia musí vystihnúť myšlienku, že nám ide o najväčšiu, resp. najmenšiu zo všetkých funkčných hodnôt na danej množine.
Nech množina M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru funkcie f.
Hovoríme, že funkcia f ***má v bode*** $a \in M$ ***maximum na množine*** M ***práve vtedy, keď pre všetky*** $x \in M$ ***platí*** $f(x) \leqq f(a)$.
Hovoríme, že funkcia f ***má v bode*** $b \in M$ ***minimum na množine*** M ***práve vtedy, keď pre všetky*** $x \in M$ ***platí*** $f(x) \geqq f(b)$.

Ž: *Mohli by sme si to ukázať na nejakom ďalšom príklade?*

U: Pravdaže, na obrázku vidíš graf funkcie g. Urč jej maximum a minimum na intervaloch $\langle -4; 0\rangle$ a $\langle 1; 4\rangle$.



Ž: *Začnem najprv intervalom $\langle -4; 0\rangle$. Tu má funkcia maximálnu hodnotu 2 a to v bode -1. Minimálna hodnota funkcie je -2, v bode -4. S minimom na intervale $\langle 1; 4\rangle$ tiež nebude problém – je v bode 1 a jeho funkčná hodnota je 0,5. Horšie to bude s maximom – vidím, že maximálna hodnota na intervale $\langle 1; 4\rangle$ je 1, ale v ktorom bode, keď ich je tam viac?*

U: Áno, v zmysle našej definície môžeš o ktoromkoľvek bode z intervalu $\langle 2; 4\rangle$ prehlásiť, že v ňom funkcia nadobúda maximum. Hovoríme tiež o neostrom maxime.

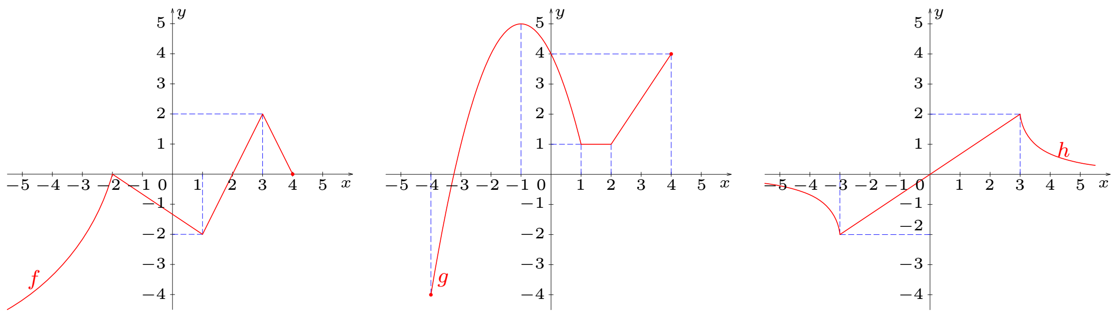
Ž: *Tak potom maximum v bode* -1 *by sa mohlo volať ostré, lebo tam je graf naozaj taký ostrý, špicatý.*

U: Máš pravdu, rozdiel medzi nimi je v tom, že v prípade ostrého maxima nadobúda funkcia najväčšiu hodnotu iba v tomto jedinom bode.
Zavediem teda dva nové pojmy takto:
Nech množina M je ľubovoľná podmnožina definičného oboru funkcie f.
Hovoríme, že funkcia f ***má v bode*** $a \in M$ ***ostré maximum na množine*** M ***práve vtedy, keď pre všetky*** $x \in M$, $x \neq a$, ***platí*** $f(x) < f(a)$.
Hovoríme, že funkcia f ***má v bode*** $b \in M$ ***ostré minimum na množine*** M ***práve vtedy, keď pre všetky*** $x \in M$, $x \neq a$, ***platí*** $f(x) > f(b)$.

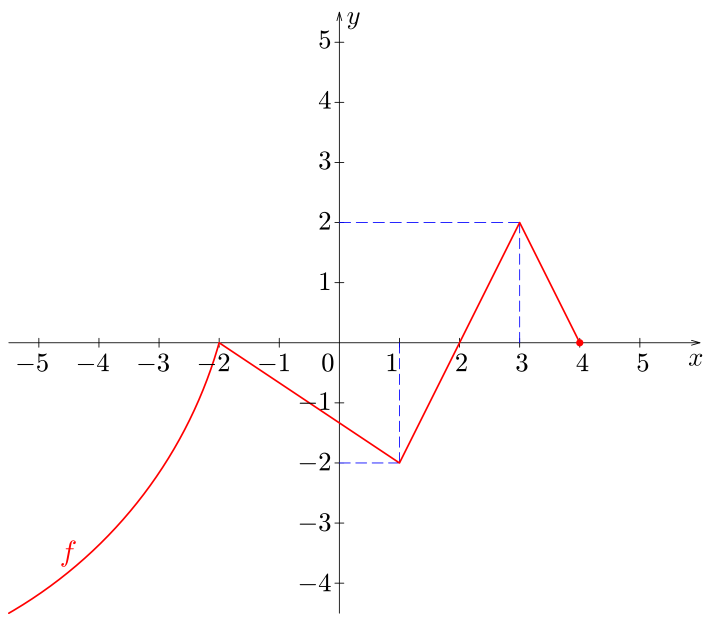
Ž: *A ako sa hľadajú extrémy funkcií?*

U: V jednoduchších prípadoch vieme vhodne upraviť predpis funkcie, dobré je aj to, ak poznáme graf funkcie a vieme z neho extrémy odčítať. V zložitejších situáciách si musíme pomôcť ďalšími metódami, najmä deriváciou funkcie. Viac sa o tom dozvieš v dialógových jednotkách z diferenciálneho počtu.

Príklad 1: *Na obrázku sú grafy troch funkcií. Určte ich extrémy na definičnom obore.*



Ž: *Prvá funkcia f má jasné maximum v bode 3 a maximálna funkčná hodnota je 2.*



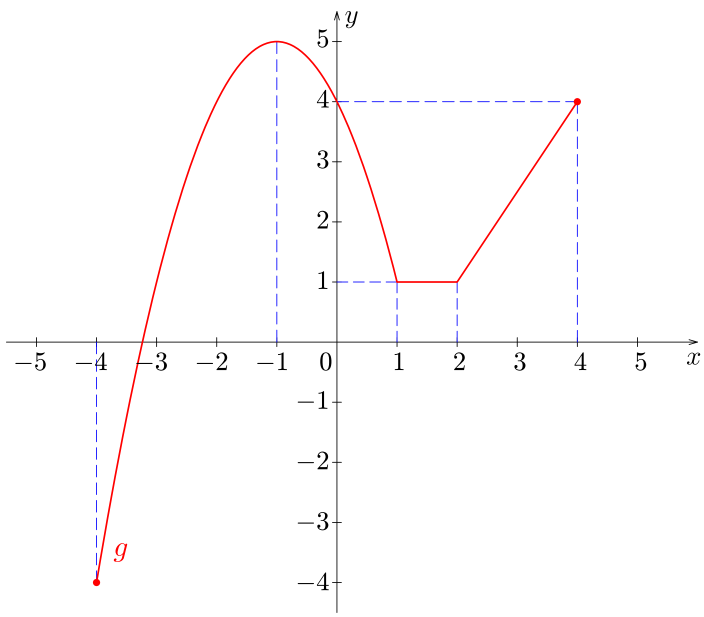
U: Súhlasím, vidím tu však ešte jedno maximum, to však bude len lokálne.

Ž: *Zrejme máte na mysli bod $x = -2$.*

U: Áno, hodnota funkcie v tomto lokálnom maxime je 0.

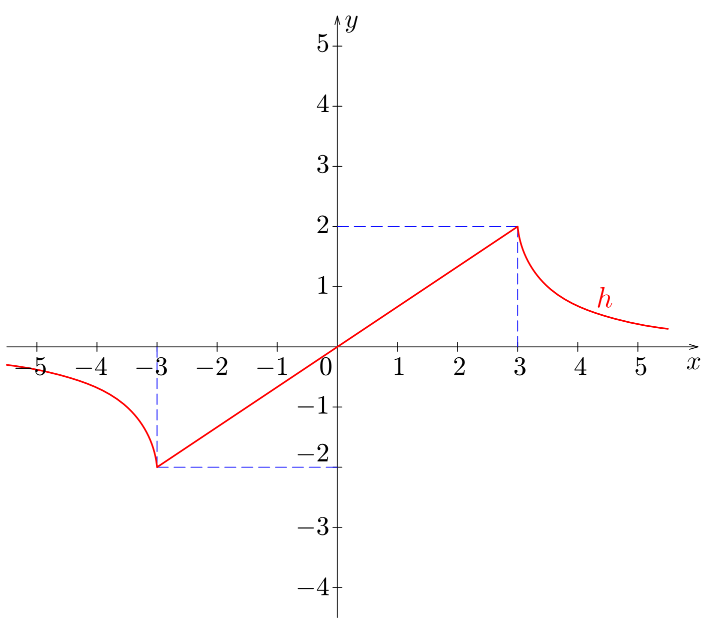
Ž: *Pokiaľ ide o globálne minimum, tak to podľa mňa funkcia f nemá, má iba lokálne minimum v bode 1, v ňom je hodnota funkcie -2. Ale ešte aj v bode 4, v ňom je hodnota funkcie 0.*

U: Výborne, môžeš prejsť na funkciu g.



Ž: *Tak táto má ostré maximum v bode* -1 *a ostré minimum v bode* -4*. Ale okrem toho tu vidím ešte jedno lokálne maximum v bode* 4*. No a ešte je tu neostré minimum v každom bode intervalu* $\langle 1; 2\rangle$*.*

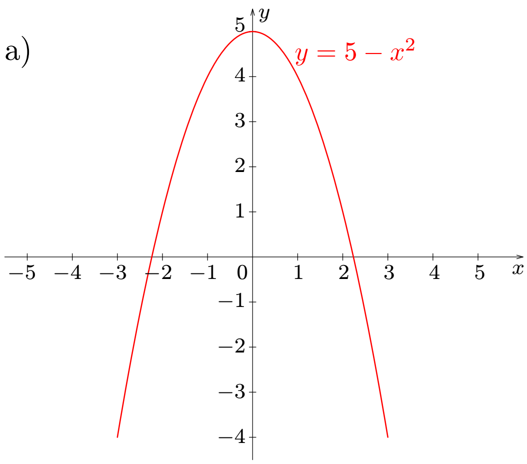
U: Ide ti to ako po masle, ostala ti posledná funkcia h.

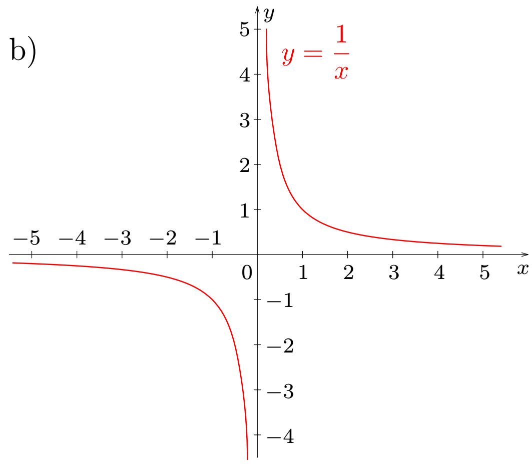


Ž: *Tak to je najľahšie, maximum je v bode* 3*, minimum v bode* -3*.*

U: Ja už len doplním, že maximálna hodnota tejto funkcie je 2 a minimálna zase -2.

Úloha 1: *Určte extrémy funkcií, ktorých grafy sú na obrázku:*

a) 

b) 

Výsledok: a) maximum v bode $x = 0$, minimum nemá; b) nemá maximum ani minimum

Príklad 2: *Nájdite maximum alebo minimum kvadratických funkcií na množine* $\mathbb{R}$*:*

$$f : y = x^2 + 4x + 1,$$

$$g : y = 2x^2 - 4x,$$
$$h : y = 2 + x - x^2.$$

U: Na tejto úlohe si ukážeme jeden zo spôsobov, ako hľadať extrémy kvadratických funkcií využitím vhodnej úpravy predpisu funkcie.

Ž: *Žeby som skúsil úpravu na štvorec?*

U: Výborne, to je presne to, čo potrebujeme. Pri úprave využijeme vzťahy

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Môžeš sa do toho pustiť.

Ž: *Takéto úpravy mi vždy išli veľmi dobre, tak začnem s prvou funkciou a upravujem*

$$f : y = x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3.$$

U: To stačí a teraz sa dobre pozri na výsledok. Výraz $(x + 2)^2$ je vždy nezáporný, ak od neho odčítame trojku, dostaneme číslo väčšie alebo rovné -3, teda

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geqq -3.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, ak $(x + 2)^2 = 0$, teda ak $x = -2$. A tak sme zistili, že funkcia f má ostré minimum v bode $x = -2$, najmenšia funkčná hodnota je $f(-2) = -3$. Na druhej strane funkcia f nebude mať maximum, pretože výraz $(x+2)^2$ môže nadobúdať ľubovoľne veľké hodnoty.

Ž: *Myslím, že som to pochopil, druhú časť skúsim sám, najprv vyjmem dvojku pred zátvorku, potom doplním do úplného štvorca*

$$g : y = 2x^2 - 4x = 2(x^2 - 2x) = 2[(x^2 - 2x + 1) - 1] = 2(x - 1)^2 - 2.$$

Keďže $(x - 1)^2 \geqq 0$*, tak* $2(x - 1)^2 - 2 \geqq -2$*, teda*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g(x) \geqq -2.$$

Rovnosť nastane, ak $x = 1$*, čo znamená, že funkcia* g *má ostré minimum v bode* $x = 1$*. Najmenšia hodnota funkcie je* $g(-1) = -2$*. Maximum ani táto funkcia nemá.*

U: Pekne. Ostala ti posledná funkcia $h : y = 2 + x - x^2$. Keďže v jej predpise je pred x^2 znamienko mínus, odporúčam začať tým, že mínus vyjmeš pred zátvorku.

Ž: *OK. Takže*

$$h : y = 2 + x - x^2 = -(x^2 - x - 2).$$

Ďalej to chcem upraviť podľa vzorca $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. *U mňa teda bude* $a = x$, $-2ab = -x$, *odkiaľ* $b = \frac{1}{2}$, *čiže* $b^2 = \frac{1}{4}$. *Môžem pokračovať*

$$-(x^2 - x - 2) = -\left[\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 2\right] = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}.$$

U: Toto si zvládol perfektne, ešte z toho urobiť záver.

Ž: *Teraz to bude trochu inak ako v predchádzajúcej časti, lebo* $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ *je nezáporné, ale*

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq 0,$$

potom

$$-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leqq \frac{9}{4}.$$

Z toho mi vychádza, že všetky funkčné hodnoty sú menšie alebo rovné $\frac{9}{4}$, *preto v bode* $\frac{9}{4}$ *bude maximum.*

U: Opravím ťa, maximum bude v bode $x = \dfrac{1}{2}$ a maximálna funkčná hodnota bude $\dfrac{9}{4}$.

Úloha 2: *Nájdite maximum alebo minimum kvadratických funkcií na množine* $\mathbb{R}$*:*

$$f : y = x^2 - 6x + 3,$$

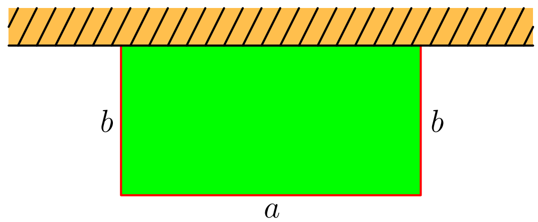
$$g : y = 10 + 5x - 2x^2.$$

Výsledok: funkcia f má minimum v bode $x = 3$, $f(3) = -6$; funkcia g má maximum v bode $x = \dfrac{5}{4}$, $g\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{105}{8}$

Príklad 3: *Pri dome si chceme ohradiť zeleninový záhon v tvare obdĺžnika, ktorého jednu stranu bude tvoriť múr domu. Máme však len 8 metrov pletiva. Ako treba zvoliť rozmery záhona, aby jeho obsah bol čo najväčší?*

Ž: *Najprv si nakreslím obrázok – obdĺžnikový záhon, ktorému na jednu stranu prikreslím múr.*

U: Ja do obrázku doplním označenie rozmerov záhona obvyklým spôsobom, teda a, b, pričom sú to kladné reálne čísla.



Ž: *Máme pletivo $8\,m$ dlhé. Tu však budeme pletivo dávať iba okolo troch strán záhona, teda má platiť*

$$a + 2b = 8.$$

Ďalej má platiť, že obsah záhona má byť čo najväčší. Obsah obdĺžnika sa počíta $a \cdot b$, ale ako to zapísať?

U: Symbolicky môžeme zapísať

$$S = a \cdot b \to \max .$$

Ž: *Budeme teda hľadať maximum funkcie?*

U: Áno, budeme hľadať maximum funkcie, ktorá vyjadruje závislosť obsahu záhona od jednej jeho strany. Zo vzťahu $a + 2b = 8$ si vyjadríme $a = 8 - 2b$ a dosadíme do obsahu

$$S = a \cdot b = (8 - 2b) \cdot b = 8b - 2b^2.$$

Skús teraz úpravou na štvorec nájsť maximum tejto funkcie.

Ž: *Skúsim to, ale keďže pred b^2 je koeficient -2, musím to najprv vybrať pred zátvorku:*

$$S = 8b - 2b^2 = -2(b^2 - 4b) = -2[(b^2 - 4b + 4) - 4] = -2[(b - 2)^2 - 4] = -2(b - 2)^2 + 8.$$

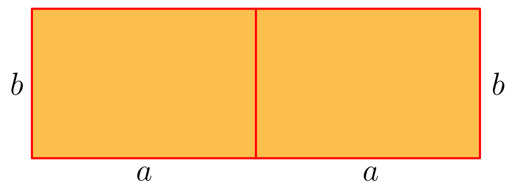
Ďalej viem, že $(b - 2)^2 \geqq 0$, teda $-2(b - 2)^2 \leqq 0$ a napokon

$$S = -2(b - 2)^2 + 8 \leqq 8.$$

Teda najväčší obsah bude $8\,m^2$.

U: Áno, a toto maximum nastane práve vtedy, keď $b = 2$, čiže keď $a = 8 - 2b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$. Teda pri rozmeroch záhona $a = 4\,\mathrm{m}$, $b = 2\,\mathrm{m}$ dosiahneme najväčší obsah.

Úloha 3: *Dvaja bratia si spoločne kúpili $240\,m$ pletiva na ohradenie svojich dvoch pozemkov. Aké rozmery majú mať pozemky, aby ich obsahy boli čo najväčšie? Pozemky sú v tvare zhodných obdĺžnikov so spoločnou stranou, ako to vidíme na obrázku:*



Výsledok: $a = 30\,m$, $b = 40\,m$

Príklad 4: *Číslo* 100 *rozložte na súčet dvoch sčítancov tak, aby ich súčin bol čo najväčší.*

Ž: *Číslo* 100 *môžem rozložiť na súčet ako* $10 + 90$*;* $25 + 75$*;* $50 + 50$.

U: Ale aj $0{,}5 + 99{,}5$ alebo $-50 + 150$ ...

Ž: *Uf, vidím, že tých možností je veľa.*

U: A my z nich máme vybrať tú, pre ktorú bude súčin týchto činiteľov čo najväčší.

Ž: *To mi pripomína maximum funkcie.*

U: Áno, budeme hľadať maximum funkcie, najprv ju však musíme zapísať. Označme naše dva hľadané sčítance napríklad a, b.

Ž: *Potom podľa zadania má platiť*

$$a + b = 100.$$

U: Áno, a ich súčin, označme ho s, má byť čo najväčší, teda

$$s = a \cdot b \to \max .$$

Ž: *Aby tam neboli dve premenné, tak zo vzťahu* $a + b = 100$ *vyjadrím hoci aj* $b = 100 - a$ *a dosadím*

$$s = a \cdot b = a \cdot (100 - a) = 100a - a^2.$$

U: Toto je zápis funkcie, vyjadrujúcej závislosť súčinu s od čísla a. A ty teraz skús nájsť jej maximum.

Ž: *Upravím si* $s = 100a - a^2 = -(a^2 - 100a)$. *Ďalej doplňam do úplného štvorca*

$$s = -[(a^2 - 100a + 2500) - 2500] = -(a - 50)^2 + 2500.$$

Keďže pre ľubovoľné reálne číslo a platí $(a - 50)^2 \geqq 0$*, tak* $-(a - 50)^2 \leqq 0$ *a potom*

$$S = -(a - 50)^2 + 2500 \leqq 2500.$$

Teda súčin bude vždy menší alebo rovný 2500. Rovnosť nastane vtedy, ak $a = 50$.

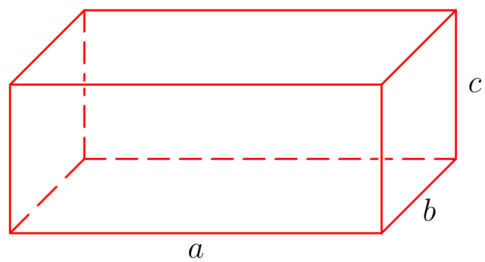
U: Výborne. Potom aj $b = 50$, teda ak číslo 100 rozložíme na súčet $50 + 50$, bude súčin týchto čísel najväčší možný.

Úloha 4: *Zo všetkých pravouholníkov s obvodom* 20 *cm vyberte ten, ktorý má najväčší obsah.*

Výsledok: štvorec so stranou 5 *cm*

Príklad 5: *Firma potrebuje postaviť nový sklad na svoje výrobky. Výhodne sa im podarilo kúpiť materiál na obvodové steny celkovej dĺžky 32 m a výšky 4 m. Poraďte, aké majú zvoliť rozmery skladu v tvare kvádra, aby sa doň zmestilo čo najviac tovaru.*

Ž: *Začnem náčrtom a zápisom úlohy. Sklad si nakreslím ako kváder a jeho rozmery označím a – dĺžka, b – šírka, c – výška.*



Ž: *Nerozumiem ale dobre tej vete, že majú materiál na obvodové steny dĺžky 32 m a výšky 4 m.*

U: Predstav si, že nakúpili stavebné panely, ktoré majú výšku 4 m, tá sa nedá zmeniť. A tých panelov majú toľko, že keby ich poukladali vedľa seba, mali by múr dlhý 32 m.

Ž: *Aha, lenže sklad má štyri steny, takže z tých 32 m treba poskladať štyri múry okolo skladu.*

U: Presne tak, skúsme sa vrátiť k zápisu úlohy.

Ž: *Výška skladu je nemenná, takže $c = 4\,m$. A tých 32 m predstavuje vlastne obvod dolnej podstavy skladu, takže*

$$2a + 2b = 32\,m.$$

No a keď chceme, aby sa toho do vnútra zmestilo čo najviac, musí byť objem čo najväčší.

U: Zhrniem teda zápis úlohy:

$$c = 4\,m$$

$$2a + 2b = 32\,m$$

$$V = a \cdot b \cdot c \to \max$$

Ž: *Za c si hneď dosadím štvorku, $V = a \cdot b \cdot 4$. Teraz ešte zo vzťahu $2a + 2b = 32\,m$ vyjadrím hoci aj b:*

$$2b = 32 - 2a$$

$$b = 16 - a.$$

Tak dostávam nový vzorec pre objem

$$V = a \cdot (16 - a) \cdot 4.$$

U: Výborne, tento predpis nám vystihuje funkčnú závislosť objemu skladu od jeho dĺžky a my potrebujeme nájsť maximum tejto funkcie.

Ž: *Idem na to, najprv upravím*

$$V = a \cdot (16 - a) \cdot 4 = 64a - 4a^2 = -4(a^2 - 16a).$$

Vybral som -4 *pred zátvorku a ďalej doplňam úpravou na štvorec:*

$$V = -4(a^2 - 16a) = -4[(a^2 - 16a + 64) - 64] = -4[(a-8)^2 - 64] = -4(a-8)^2 + 256.$$

U: Keďže pre všetky reálne čísla a je $(a-8)^2 \geqq 0$, tak

$$-4(a-8)^2 \leqq 0,$$

potom

$$-4(a-8)^2 + 256 \leqq 256,$$

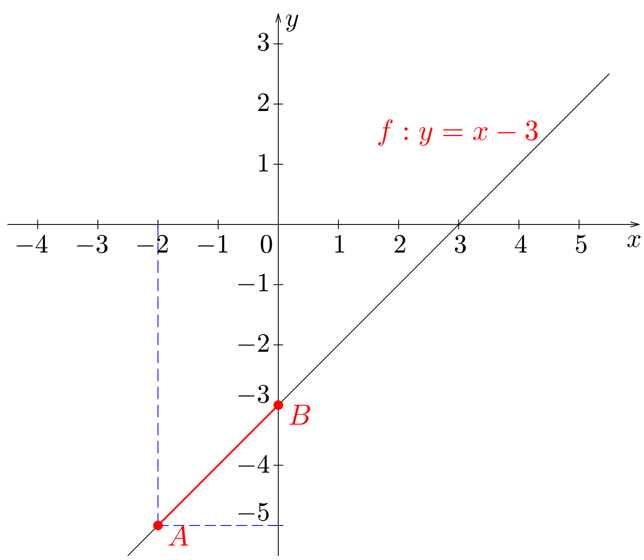
teda $V \leqq 256$. Maximálny objem skladu teda môže byť $256\,m^3$ a to vtedy, keď $a = 8\,m$.

Ž: *Lenže potom aj* $b = 16 - a = 8\,m$, *teda sklad bude mať štvorcovú podstavu.*

Príklad 6: *Dané sú funkcie* $f: y = x - 3$, $g: y = 3$, $h: y = \sin x$. *Načrtnite ich grafy a rozhodnite, či dané funkcie majú maximum, ostré maximum, minimum, ostré minimum na množinách: a)* $M = \langle -2; 0\rangle$*; b)* $M = (1; 3\rangle$*; c)* $M = \mathbb{R}$.

U: Postupne zoberieme každú funkciu. Začneme prvou

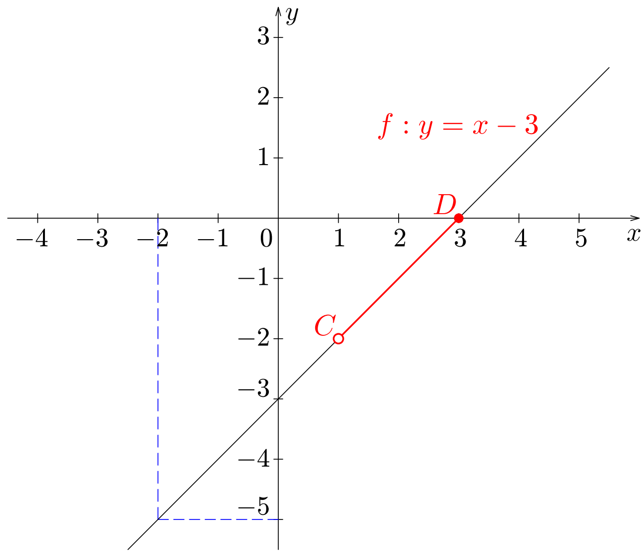
$$f: y = x - 3.$$



Ž: *Je to jednoduchá lineárna funkcia, jej grafom je priamka. Ale keď budem uvažovať len interval* $\langle -2; 0\rangle$*, grafom bude úsečka* AB*. V jednom krajnom bode* $x = -2$ *bude ostré minimum, pretože* $f(-2) = -4$ *je najnižšia hodnota zo všetkých, ktoré funkcia na tomto intervale nadobúda. A v druhom krajnom bode* $x = 0$ *bude ostré maximum, maximálna funkčná hodnota je* $f(0) = 3$.

U: Dobre, teraz sa pozrime, či sa niečo zmení, ak budeme uvažovať o extrémoch na intervale $M = (1; 3\rangle$.

Ž: *Teraz je grafom funkcie úsečka* CD*, ale bez krajného bodu* C*. No ale to teraz neviem, ako to bude s minimom.*



U: V tejto situácii funkcia f nemá minimum na množine M. Nech by sme ktorýkoľvek bod, napríklad $x = 1,01$ chceli prehlásiť za minimum, vždy by sa našiel v intervale $(1;3\rangle$ ďalší bod, napríklad $x = 1,001$, v ktorom by funkcia nadobudla menšiu hodnotu.

Ž: *Ale maximum funkcia nadobudne v druhom krajnom bode intervalu* $x = 3$.

U: Áno, bude to ostré maximum. Skúsme ešte poslednú časť, ak $M = \mathbb{R}$.

Ž: *Tak tu potom funkcia vôbec nenadobúda ani maximum, ani minimum.*

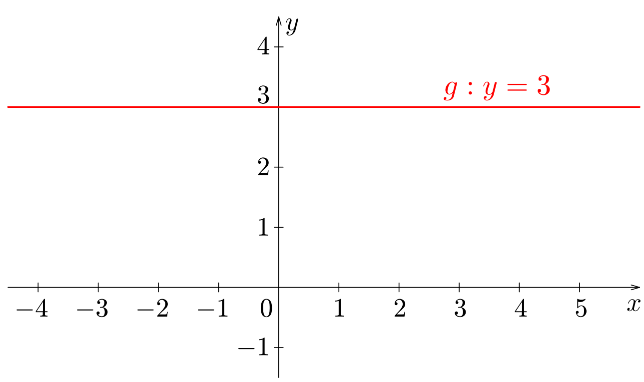
U: Skôr než pôjdeme ďalej, povedz mi ešte, ako to je s ohraničenosťou funkcie f v jednotlivých situáciách.

Ž: *V prvých dvoch prípadoch, keď grafom funkcie boli len úsečky AB a CD, bola funkcia ohraničená. V poslednom prípade už nie je ohraničená zhora ani zdola.*

U: Zaujímavý je najmä ten druhý prípad s úsečkou CD, keď funkcia na danej množine M je zdola ohraničená, ale nemá minimum.

U: Môžeme prejsť k ďalšej funkcii

$$g : y = 3.$$



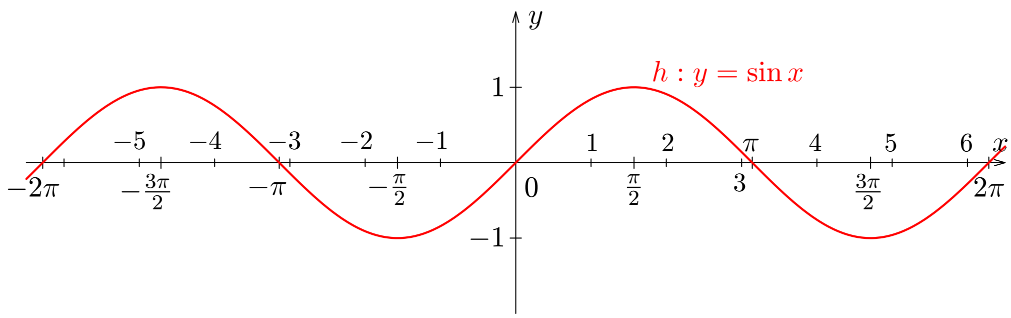
Ž: *Toto je veľmi jednoduchá situácia, ide o konštantnú funkciu, jej grafom je priamka rovnobežná s osou x. Takáto funkcia v každom bode nadobúda maximum aj minimum, ale nie ostré.*

U: Takže je jedno, o ktorej z množín M v zadaní uvažujeme, nezmení sa tým odpoveď na otázku.

Ž: *Môžem prejsť k tretej funkcii*

$$h : y = \sin x.$$

Je to goniometrická funkcia. S jej grafom som sa už stretol, je ním takáto pekná krivka:



U: Hovorí sa jej tiež sínusoida.

Ž: *Najprv uvažujem o intervale* $M = \langle -2; 0\rangle$*. Tak na ňom funkcia nadobúda ostré minimum v bode* $x = -\dfrac{\pi}{2}$ *a platí* $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$*. A ostré maximum vidím v bode* $x = 0$*, pričom* $h(0) = 0$*.*

U: Dobre, zmeníme interval na $M = (1; 3\rangle$.

Ž: *S maximom nebude problém, ten je jasne v bode* $x = \dfrac{\pi}{2}$*, jeho hodnota je* 1*. Minimum si myslím, že by mohlo byť v bode* $x = 3$*, tam je graf nižšie ako v bode* $x = 1$*.*

U: Skús to overiť výpočtom.

Ž: *Dobre, ale vezmem si na to kalkulačku. Takže* $\sin 1 \doteq 0,017452$ *a* $\sin 3 \doteq 0,052335$*. No počkať, to je nejaká hlúposť, vyšlo mi to naopak! Prečo?*

U: Pretože si dosadil v stupňoch a nie v radiánoch. Prepni si kalkulačku z DEG na RAD a skús znova.

Ž: *Teda ešte raz*

$$\sin 1 \doteq 0,841471$$

$$\sin 3 \doteq 0,14112.$$

Vyšlo to, v bode 3 je menšia hodnota.

U: Dobre, ostala nám ešte posledná časť, keď $M = \mathbb{R}$.

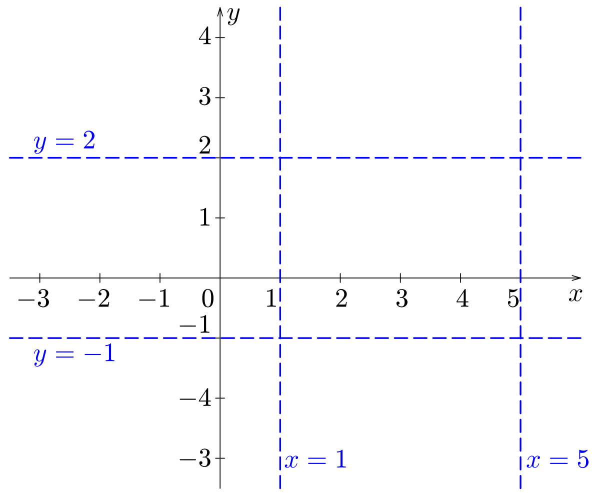
Ž: *Potom má funkcia nekonečne veľa ostrých lokálnych maxím a nekonečne veľa ostrých lokálnych miním. Ako to zapísať?*

U: Keďže funkcia $h : y = \sin x$ je periodická s najmenšou periódou 2π, tak sa maximá aj minimá pravidelne opakujú. Zapíšeme, že maximum je vo všetkých bodoch $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ a minimum je vo všetkých bodoch $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, pričom k je ľubovoľné celé číslo.

Príklad 7: *Načrtnite graf takej funkcie, pre ktorú platí, že má ostré maximum v bode* 2 *a v bodoch* 3 *a* 4 *má minimum, pričom platí:*

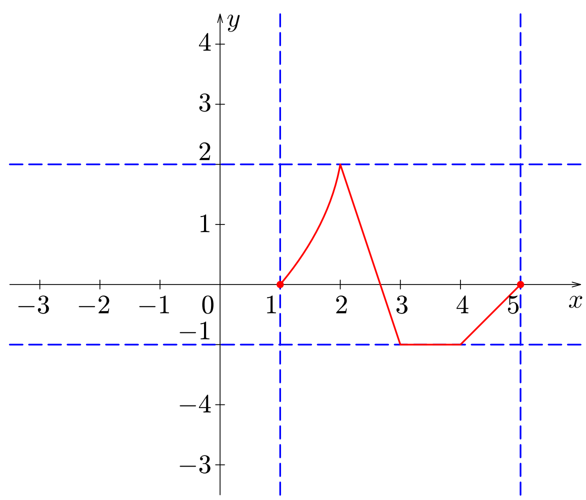
$$\mathcal{D} = \langle 1; 5\rangle\,, \quad \mathcal{H} = \langle -1; 2\rangle\,.$$

Ž: *Pripravím si súradnicovú sústavu a vyznačím pomocné priamky* $x = 1$; $x = 5$, *ktoré mi vymedzujú definičný obor* $\mathcal{D}$. *Potom načrtnem priamky* $y = -1$; $y = 2$, *ktoré mi vymedzujú obor hodnôt* $\mathcal{H}$. *Tak mi vznikol obdĺžnik, v ktorom musí ležať celý graf.*



U: To bol šikovný začiatok, teraz poďme na tie extrémy.

Ž: *Ak v bode* 2 *má byť maximum, môžem mu prisúdiť najväčšiu hodnotu z oboru hodnôt, teda dvojku. Keďže je to ostré maximum, tak vo všetkých okolitých bodoch bude funkcia nadobúdať menšie hodnoty, na grafe vznikne napríklad špic. No a v bodoch* 3 *a* 4 *má byť minimum, hodnota v týchto bodoch bude* -1, *a keďže to nemusí byť ostré minimum, môžem všetkým bodom od* 3 *do* 4 *priradiť tú istú hodnotu. Vyzerá to takto:*



U: Zvládol si to perfektne, toto je jedno z možných riešení úlohy.

Príklad 8: *Nech funkcia f je definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Rozhodnite o pravdivosti tvrdení:*
a) Ak je funkcia f párna, tak má v bode $x = 0$ lokálne maximum alebo minimum.
b) Ak funkcia f nadobúda v niektorom bode svojho definičného oboru $\mathcal{D}$ globálne maximum, tak je zhora ohraničená.
c) Ak je funkcia f zdola ohraničená, tak má v niektorom bode svojho definičného oboru globálne minimum.
d) Ak je funkcia f rastúca na $\mathcal{D}$, tak má na $\mathcal{D}$ maximum.
e) Ak f je funkcia, ktorej definičný obor zmeníme na konečnú množinu, tak má ostré maximum aj ostré minimum.

U: Začnime prvým tvrdením.
a) Ak je funkcia f párna, tak má v bode $x = 0$ lokálne maximum alebo minimum.

Ž: *Vyjdem z toho, že funkcia f je párna. To znamená, že jej graf je súmerný podľa osi y. Preto ak je funkcia v pravom okolí bodu nula rastúca, v ľavom musí byť klesajúca, takže v nule musí byť minimum. Alebo maximum, ak by to celé bolo naopak.*

U: Áno, nemusí to však byť minimum či maximum na celom definičnom obore, teda globálne, ale len lokálne, nemusí byť ani ostré. Tvrdenie a) teda platí.

Ž: *Tvrdenie b) hovorí: Ak funkcia f nadobúda v niektorom bode svojho definičného oboru $\mathcal{D}$ globálne maximum, tak je zhora ohraničená. Toto podľa mňa je pravda, stačí hodnotu funkcie v tomto globálnom maxime prehlásiť za horné ohraničenie h.*

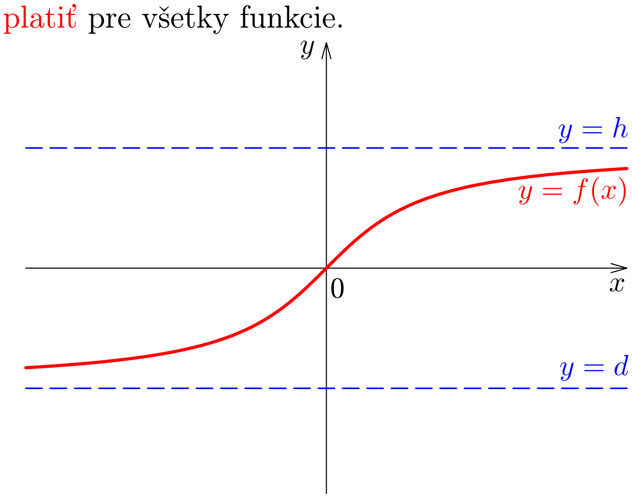
U: Máš pravdu, potom podľa definície maxima funkcie bude pre všetky čísla x z definičného oboru platiť

$$f(x) \leqq h,$$

čo však zároveň spĺňa definíciu zhora ohraničenej funkcie.

Ž: *Môžem prejsť k tvrdeniu c): Ak je funkcia f zdola ohraničená, tak má v niektorom bode svojho definičného oboru globálne minimum. To je podľa mňa to isté, čo pred chvíľou, ibaže s minimom, teda to tiež platí.*

U: Tentokrát veru nemáš pravdu, tu je veta obrátená. Protipríklad máš na ďalšom obrázku, funkcia je ohraničená, dokonca aj zdola aj zhora a pritom nemá žiadny extrém. Teda tvrdenie c) nemusí platiť pre všetky funkcie.



U: Skús ďalšie tvrdenie d).

Ž: *Po predchádzajúcej skúsenosti už budem opatrnejší a nepoviem hneď, čo mi napadne. Ešte stále sa dívam na ten posledný graf, čo ste mi ukázali. Myslím, že je na ňom rastúca funkcia a predsa nemá maximum na množine* $\mathbb{R}$.

U: Dobrý postreh, teda tvrdenie d) tiež nie je vo všeobecnosti pravdivé. Ostalo ti posledné tvrdenie e): Ak f je funkcia, ktorej definičným oborom je konečná množina, tak má ostré maximum aj ostré minimum.

Ž: *Ak definičným oborom je konečná množina, tak si môžem jednoducho vypísať do tabuľky všetky prvky definičného oboru, k nim vypočítať ich funkčné hodnoty a porovnať ich. Niektorá z týchto hodnôt musí byť najväčšia, to bude maximálna hodnota funkcie. Vlastne, moment .... Čo keď budú dve najväčšie hodnoty?*

U: Alebo aj všetky rovnaké ako pri konštantnej funkcii?

Ž: *Takže funkcia síce určite bude mať minimum aj maximum, ale nemusí byť ostré.*

U: Preto ani posledné tvrdenie nemôžeme prehlásiť za pravdivé.