Graf funkcie

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Vieme, že funkcia vyjadruje určitú závislosť medzi dvoma veličinami. Akým spôsobom by mohla byť funkcia zadaná?

Ž: *Stretol som sa najmä srovnicami, napríklad $y = 2x$.*

U: Je to naozaj najpoužívanejší spôsob. Jeho výhodou je to, že umožňuje vypočítať hodnotu funkcie vktoromkoľvek bode definičného oboru a tiež zistiť rôzne vlastnosti funkcie.
Ďalším spôsobom zadania funkcie je slovný opis. Napríklad veta – objem kocky je rovný tretej mocnine dĺžky jej hrany – vyjadruje funkčnú závislosť medzi objemom ahranou. Vedel by si ju vyjadriť rovnicou?

Ž: *Na objem kocky máme vzorec $V = a^3$.*

U: Dobre, mohli by sme ho vyjadriť aj v tvare

$$y = x^3,$$

kde x by bola veľkosť hrany kocky ay by bol objem. Určite si sa ale stretol aj sďalším spôsobom zadania funkcie. Napríklad, ak ste na fyzike robili nejaké merania. Ako ste zapisovali výsledky meraní?

Ž: *Do tabuľky, do jedného riadku jednu veličinu, do druhého druhú.*

U: Tabuľku používame najmä vtedy, ak definičným oborom je konečná množina, napríklad

x	2	3	4	5
y	4	9	16	25

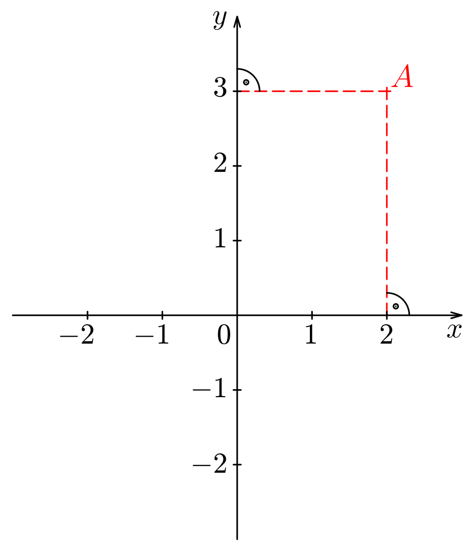
Ž: *Niekedy však na fyzike znameraných hodnôt zostrojujeme aj grafy.*

U: Výborne, to je ďalší spôsob určenia funkcie, povieme si oňom podrobnejšie. Grafy funkcií zostrojujeme vpravouhlej súradnicovej sústave vrovine, ktorá je tvorená dvoma kolmými priamkami.

Ž: *Vodorovná sa volá x-ová os, zvislá je y-ová os aich priesečník je začiatok súradnicovej sústavy.*

U: Áno. Ďalej sú na osiach určené dĺžkové jednotky. Ak sú rovnaké, hovoríme otzv. karteziánskej súradnicovej sústave.

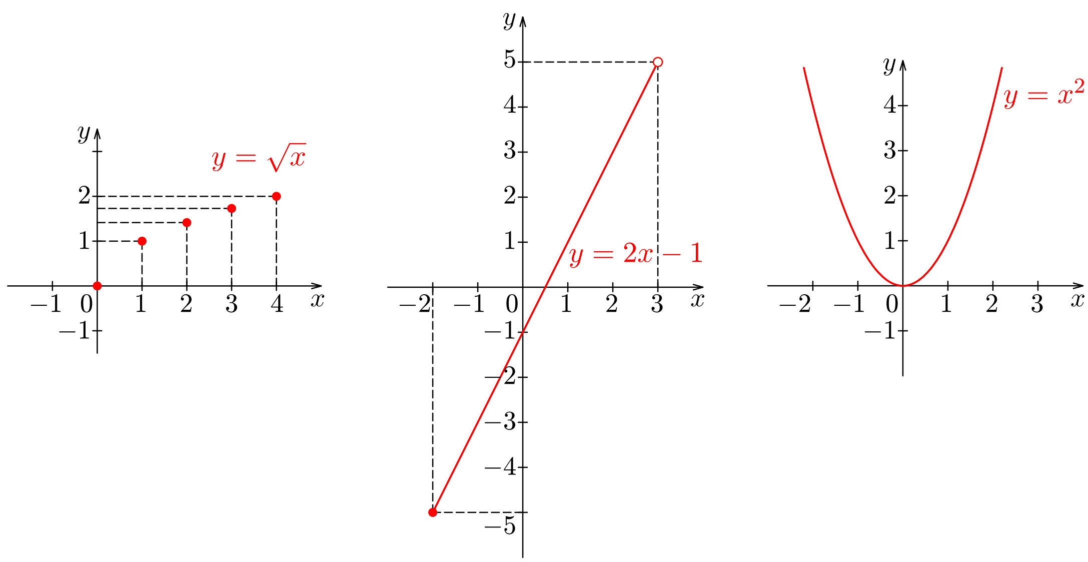
Ž: *Aak chcem vyznačiť vobrázku bod Aso súradnicami $[2; 3]$, znamená to, že x-ová súradnica bodu Abude 2 ay-ová bude 3, čo nakreslím takto:*



U: Dobre. Keď sú nám jasné tieto základné pojmy, povedzme si otom, ako zostrojiť graf funkcie. Keďže funkcia priraďuje číslam zdefiničného oboru čísla zoboru hodnôt, vytvára tak vlastne usporiadané dvojice $[x; f(x)]$, ktoré môžeme znázorniť ako body vsúradnicovej sústave. Teda:

Grafom funkcie f nazývame množinu všetkých bodov so súradnicami $[x; f(x)]$, zostrojenú vpravouhlej súradnicovej sústave, pričom $x \in \mathcal{D}(f)$.

Tu máme tri ukážky:



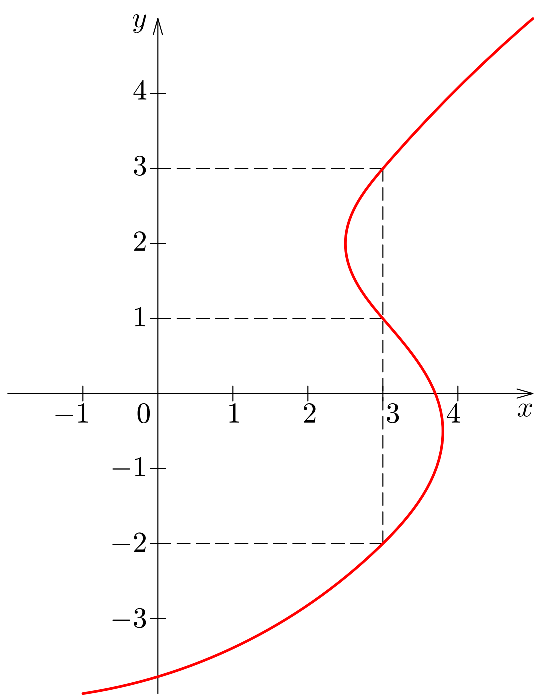
U: Na prvom obrázku je graf funkcie $f : y = \sqrt{x}$, pričom $\mathcal{D}(f) = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Keďže definičným oborom je konečná množina, grafom bude množina izolovaných bodov. Na druhom obrázku je graf funkcie $g : y = 2x - 1$, pričom $\mathcal{D}(g) = \langle -2; 3)$. Grafom bude úsečka. Vtreťom prípade sme zvolili funkciu $h : y = x^2$ definovanú na celej množine reálnych čísel, grafom tejto funkcie je krivka – parabola.

Ž: *To ale vyzerá, že grafy môžu byť veľmi rôznorodé, teda keď si nakreslím hocijakú krivku, bude to graf nejakej funkcie?*

U: To určite nie, vráťme sa pekne kdefinícii funkcie.

Ž: *Funkciou nazývame predpis, ktorý každému prvku definičného oboru priradí práve jedno reálne číslo.*

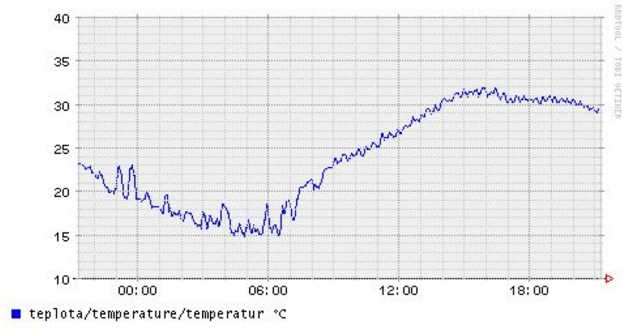
U: Preto napríklad krivka na ďalšom obrázku nemôže predstavovať graf žiadnej funkcie, keďže číslu 3 priradila až tri hodnoty: 3; 1 a 2.



U: Ak máme rozhodnúť, či krivka na obrázku predstavuje graf funkcie alebo nie, pomôžeme si týmto poznatkom:

Množina bodov vrovine je grafom funkcie vtedy alen vtedy, keď každá priamka rovnobežná sosou y má stouto množinou spoločný najviac jeden bod.

Ešte doplním, že sfunkciou zadanou grafom sa stretávame utzv. empirických funkcií, napr. prístroj termograf nám graficky zachytáva závislosť teploty ovzdušia od času, výsledok môže vyzerať takto:



Ž: *Niečo také som videl aj na seizmografe.*

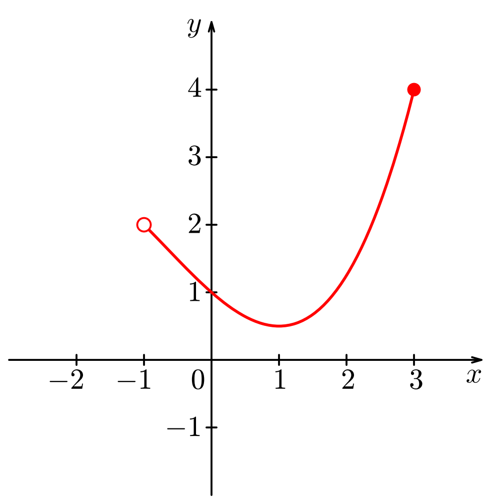
U: Áno, podobne pracuje aj elektrokardiograf aďalšie prístroje. Dávajú nám informácie otom, ako sa správa funkcia na istom intervale, ale nevieme získať dostatočné informácie o funkcii mimo toho intervalu.
Ak vnašich ďalších úvahách budeme zadávať funkcie pomocou grafov, budú mať buď ohraničený definičný obor alebo budeme predpokladať, že sa funkcia správa „rozumne", teda ženezmení svoj charakter včasti, ktorú sme nenakreslili.

U: Zhrňme – najčastejšie spôsoby určenia funkcií sú:

- rovnicou
- slovným opisom
- tabuľkou
- grafom

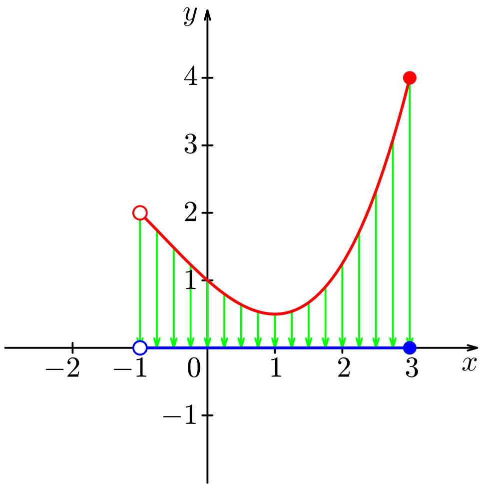
Ž: *Načo nám budú dobré grafy funkcií?*

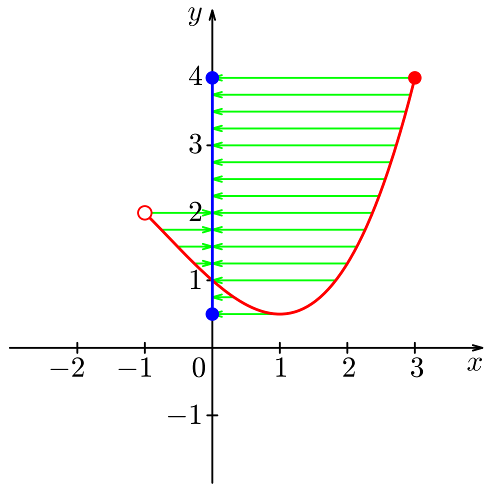
U: Zgrafu vieme zistiť veľmi veľa ovlastnostiach funkcií, pomáhajú nám lepšie si zapamätať arozlíšiť jednotlivé typy funkcií. Ukážme si hneď prvú úlohu. Ako by si z grafu funkcie na obrázku určil jej definičný obor a obor hodnôt?



Ž: *Definičný obor, to sú vlastne x, ale čo s tým?*

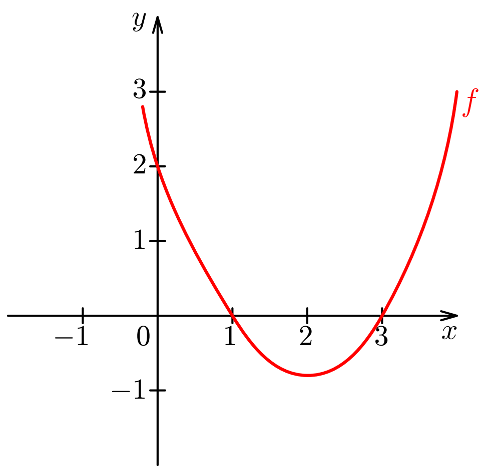
U: Definičný obor tvoria tie reálne čísla x, ktorým funkcia priradila určité číslo y. Nájsť ich môžeš tak, že si z každého bodu na grafe spustíš šípku kolmo na os x. Teda ak nájdeš kolmý priemet každého bodu grafu funkcie na os x. Šípky ti ukážu, že definičným oborom je interval $\mathcal{D} = (-1; 3\rangle$.





Ž: *Aha, a s oborom hodnôt to bude asi rovnako, len spravím kolmý priemet bodov grafu na os y, teda $\mathcal{H} = \left\langle \frac{1}{2}; 4 \right\rangle$.*

U: Výborne. Vedel by si na ďalšom obrázku určiť priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami?



Ž: *To je ľahké, s osou x sú to body $[1; 0]$ a $[3; 0]$, s osou y je to bod $[0; 2]$.*

U: Dobre a teraz sa spýtam, ako by sa tieto priesečníky hľadali výpočtom, ak by sme poznali rovnicu funkcie.

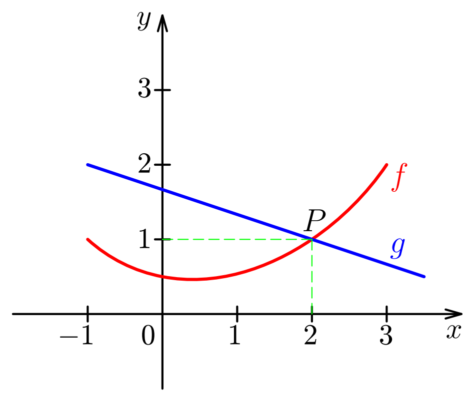
Ž: *Priesečník s osou y sa hľadá ľahko, lebo je to bod, ktorý má x-ovú súradnicu nula, stačí teda dosadiť nulu.*

U: Presnejšie povedané, bude to bod so súradnicami $[0; f(0)]$.

Ž: *Priesečníky s osou x majú zase y-ovú súradnicu nulovú.*

U: Nájdeme ich teda riešením rovnice $f(x) = 0$, ak existujú.

U: Posledná vec, na ktorú sa spýtam – ako by sme našli priesečník grafov dvoch funkcií?



Ž: *Je to bod $P[x; y]$, ktorý leží na oboch grafoch, teda preň platí $y = f(x)$ aj $y = g(x)$. Ypsilony sú rovnaké, teda porovnaním dostaneme*

$$f(x) = g(x).$$

U: Výborne. A riešením tejto rovnice získame x-ové súradnice priesečníkov grafov, ich dosadením do predpisu funkcie získame y-ové súradnice.

Príklad 1: *Určte definičné obory, obory hodnôt a rovnice funkcií daných nasledujúcimi tabuľkami. Načrtnite grafy týchto funkcií:*

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

b)

x	0	$1,2$	$3,6$	5
y	2	2	2	2

c)

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24

Ž: *Začnem prvou tabuľkou:*

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

Do definičného oboru funkcie patria čísla z prvého riadku a do oboru hodnôt patria čísla, ktoré sú k nim funkciou priradené, teda tie z druhého riadku. Preto

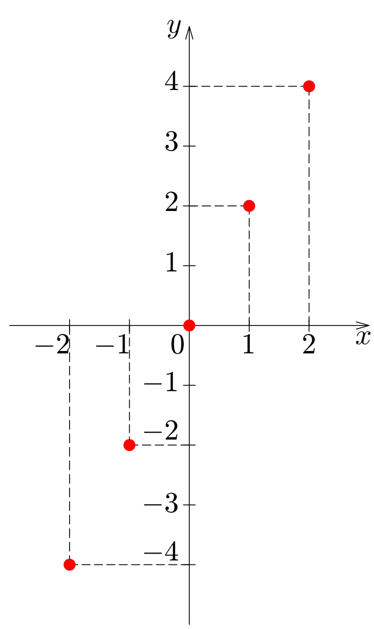
$$\mathcal{D} = \{-2; -1; 0; 1; 2, \} \qquad \mathcal{H} = \{-4; -2; 0; 2; 4\}\,.$$

Rovnicu tejto funkcie tiež nie je problém napísať, pretože som si všimol, že každému číslu priradí jeho dvojnásobok, teda

$$y = 2x.$$

U: Výborne, skús ešte načrtnúť graf.

Ž: *Nakreslím si pravouhlú súradnicovú sústavu. Do nej potom dokreslím bod so súradnicami* $[-2; 4]$*, bod so súradnicami* $[-1; -2]$*, ďalší bod má súradnice* $[0; 0]$*, teda je to vlastne začiatok súradnicovej sústavy. No a ešte tam budú posledné dva body* $[1; 2]$ *a* $[2; 4]$*. A je to:*



U: Grafom je teda množina piatich izolovaných bodov. Ležia na jednej priamke, ktorej smernicový tvar je $y = 2x$.

Ž: *Idem na druhú tabuľku:*

x	0	1,2	3,6	5
y	2	2	2	2

Toto je taký zvláštny prípad funkcie, pretože každému x je priradená ako hodnota vždy dvojka. Teda definičný obor síce bude obsahovať štyri čísla

$$\mathcal{D} = \{0; 1,2; 3,6; 5\},$$

ale obor hodnôt bude obsahovať len jedno číslo

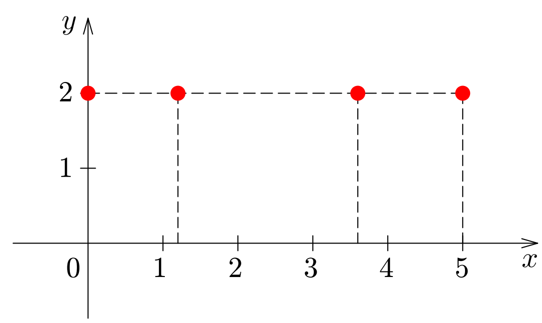
$$\mathcal{H} = \{2\}.$$

U: V takomto prípade hovoríme o konštantnej funkcii, jej rovnica bude

$$y = 2.$$

Aj jej graf bude niečím zvláštny, skús ho načrtnúť.

Ž: *Idem na to, do súradnicovej sústavy si potrebujem vyznačiť štyri body, ktorých súradnice budú* $[0; 2]$, $[1{,}2; 2]$, $[3{,}6; 2]$ *a* $[5; 2]$. *Mám to, grafom je opäť množina izolovaných bodov.*



U: Áno, a keďže táto funkcia priraďuje každému prvku definičného oboru rovnakú hodnotu, ležia tieto body na priamke rovnobežnej s osou x. Rovnica tejto priamky je $y = 2$.

Ž: *Ostala mi ešte posledná tabuľka:*

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24

Definičný obor tvoria prirodzené čísla od 1 do 5, ktoré sú v prvom riadku a obor hodnôt čísla k nim priradené v druhom riadku, preto

$$\mathcal{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}, \mathcal{H} = \{0; 3; 8; 15; 24\}.$$

Lenže akým spôsobom sú k nim priradené? Jednotke nula, to je o jedno menšie, dvojke trojka, to je o jedno väčšie, ďalej trojke osmička … No ja tu veru žiadnu súvislosť nevidím!

U: A pritom tam je jednoduchá závislosť. Pozri sa ešte raz na druhý riadok, na čísla $0; 3; 8; 15; 24$. Nevidíš medzi nimi žiaden vzťah?

Ž: *Asi som slepý, ale nevidím.*

U: Tak ti pomôžem. Pridaj si do tabuľky tretí riadok, v ktorom vypočítaš hodnotu $y + 1$.

Ž: *Teda každé číslo zväčším o jedna? Potom to bude vyzerať takto:*

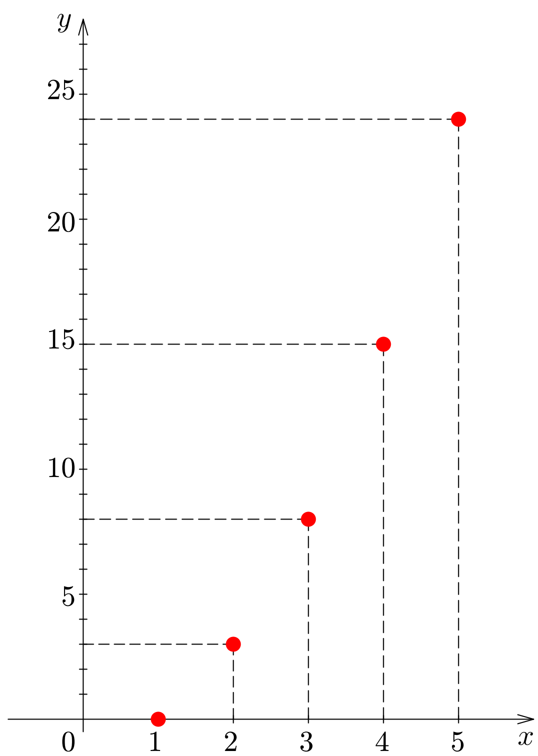
x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24
$y+1$	1	4	9	16	25

Objavili sa mi čísla $1; 4; 9; 16; 25$. *No jasné! Veď to sú druhé mocniny! Ale ako to teraz zapísať?*

U: Naša funkcia funguje tak, že každému x z prvého riadku priradí najprv jeho druhú mocninu (to máme v treťom riadku), ale tú potom ešte zmenší o jednotku a dostaneme y v druhom riadku. Teda

$$f : y = x^2 - 1, x \in \mathcal{D}.$$

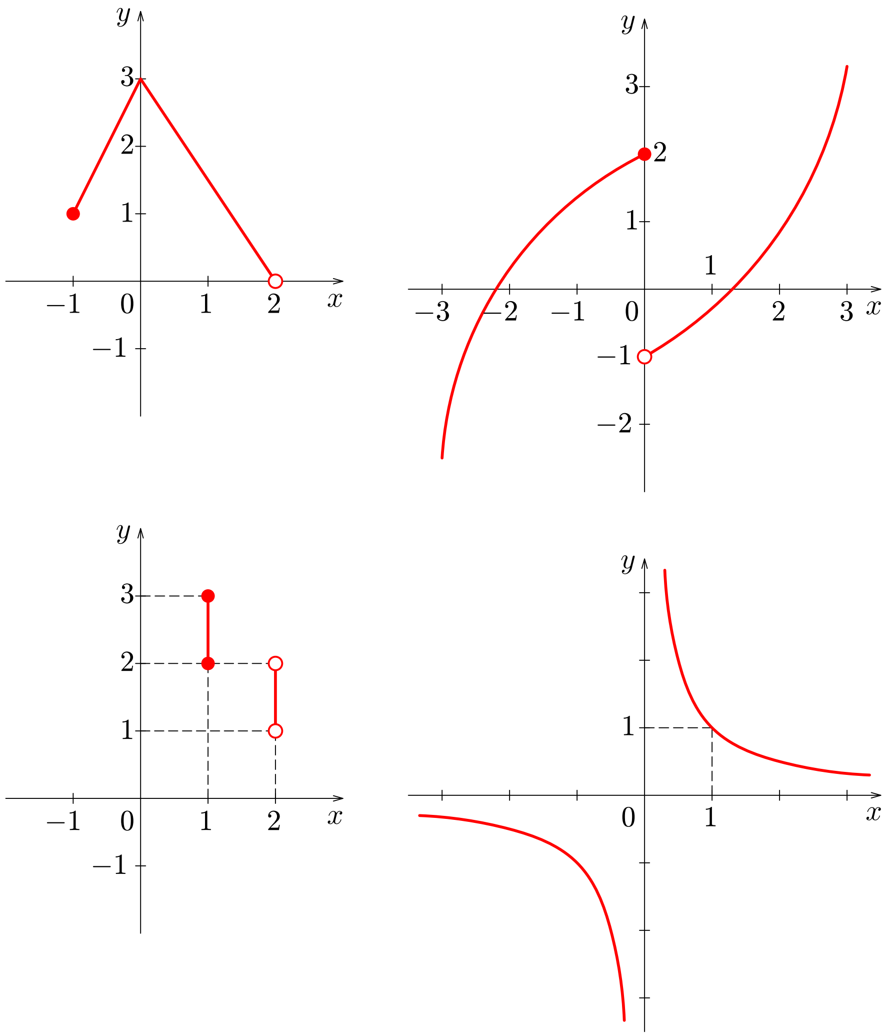
Ž: *Ostáva mi ešte graf, ale to nebude problém. Zostrojím si body so súradnicami* $[1; 0]$, $[2; 3]$, $[3; 8]$, $[4; 15]$ *a* $[5; 24]$ *takto:*



Ž: *Opäť je to množina izolovaných bodov, ale teraz to nevyzerá, že by mali ležať na priamke.*

U: A ani neležia, tentokrát sú súčasťou krivky, ktorá sa nazýva parabola. Jej analytické vyjadrenie je presne také ako predpis funkcie, t. j. $f : y = x^2 - 1$.

Príklad 2: *Rozhodnite, či nasledujúce krivky predstavujú grafy funkcií. Ak áno, určte ich definičné obory a obory hodnôt.*

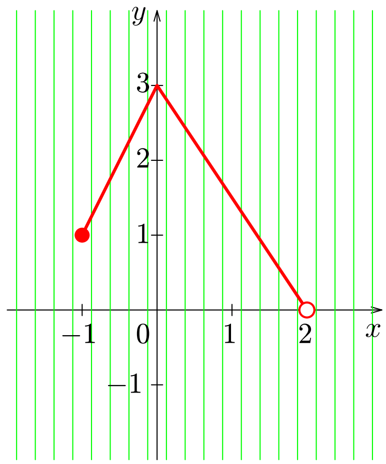


U: Najprv si pripomeňme, že funkciou na množine $\mathcal{D}$ nazývame ľubovoľný predpis, ktorý každému prvku množiny $\mathcal{D}$ priradí práve jedno reálne číslo. Preto nie každá krivka, ktorú si nakreslíme do súradnicovej sústavy, musí byť grafom nejakej funkcie.

Ž: *Máme na to aj pomôcku – predstavím si, že zostrojím všetky rovnobežky s osou y. Ak krivka je grafom funkcie, tak ju žiadna z týchto rovnobežiek nemôže pretnúť viac ako raz.*

U: To je veľmi dobrá pomôcka.

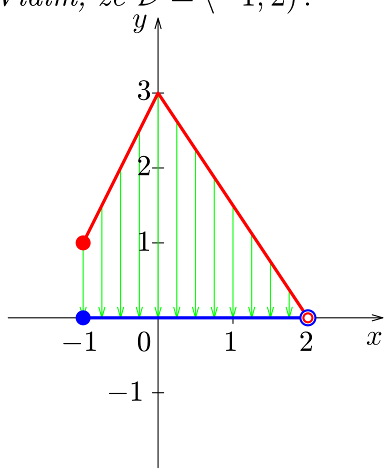
Ž: *Začnem prvým grafom, dokreslím si pomocné čiary:*



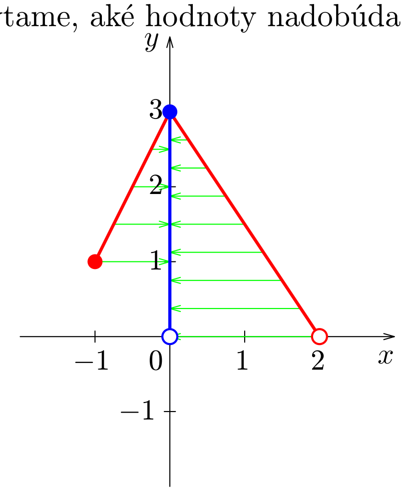
Ž: *Vidím, že je to v poriadku, každá z čiar pretne graf iba raz alebo ho nepretne. Teda je to graf funkcie.*

U: Dobre, máme ešte určiť definičný obor a obor hodnôt.

Ž: *Na to máme tiež pomôcky. Pri definičnom obore sa pýtam, pre ktoré x je táto funkcia definovaná a nájdem ich tak, že si z bodov grafu spustím šípky kolmo na os x, teda graf premietnem kolmo na os x. Vidím, že* $\mathcal{D} = \langle -1; 2)$.



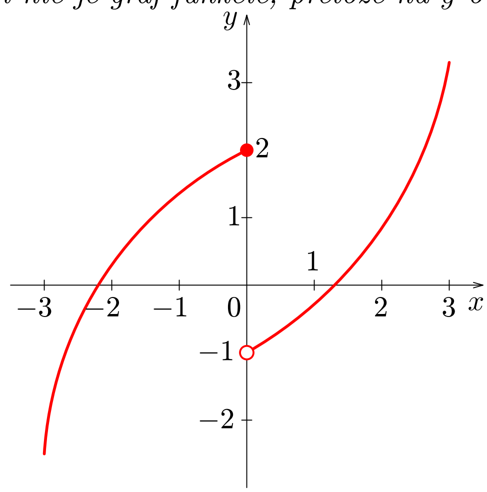
U: Pri obore hodnôt sa zase pýtame, aké hodnoty nadobúda naša funkcia.



Ž: *Tu si tiež pomôžem šípkami, ale teraz budú kolmé na os y. Čiže urobím kolmý priemet grafu na os y. Potom oborom hodnôt je interval* $\mathcal{H} = (0; 3\rangle$.

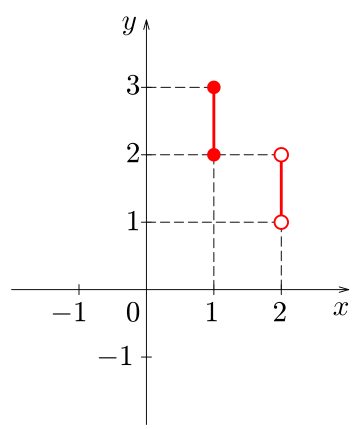
U: Ide ti to výborne, pokračuj.

Ž: *Na druhom obrázku to asi nie je graf funkcie, pretože na y-ovej osi sú dva krúžky:*



U: Mal by si pravdu, ak by oba krúžky boli plné, vtedy by to znamenalo, že bodu nula sú priradené dve hodnoty, -1 a 2. Ale keďže pri -1 je prázdny krúžok, tak bodu nula je priradená iba jedna hodnota a to 2. Teda na obrázku máme graf funkcie. Predpokladáme, že tento graf zachováva svoje správanie sa aj v časti, kde už nie je zakreslený (v našom prípade napr. pre $x > 3$). Potom $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \mathcal{H} = \mathbb{R}$.

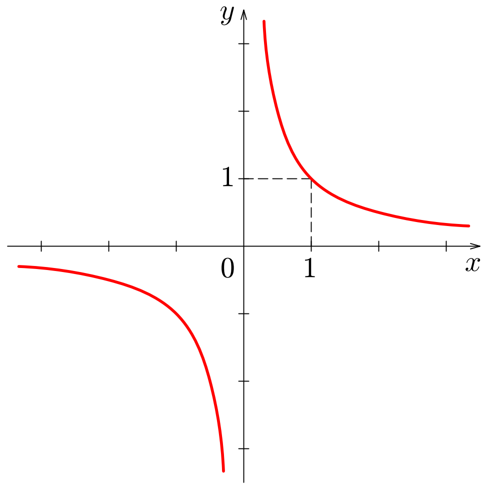
Ž: *Skúsim ďalší obrázok:*



Ž: *Tak toto určite nemôže byť funkcia, keďže jednotke sú priradené dve čísla:* 2 *aj* 3.

U: Máš pravdu, ja len doplním, že jednotke sú podľa obrázka priradené všetky čísla z intervalu $\langle 2; 3\rangle$.

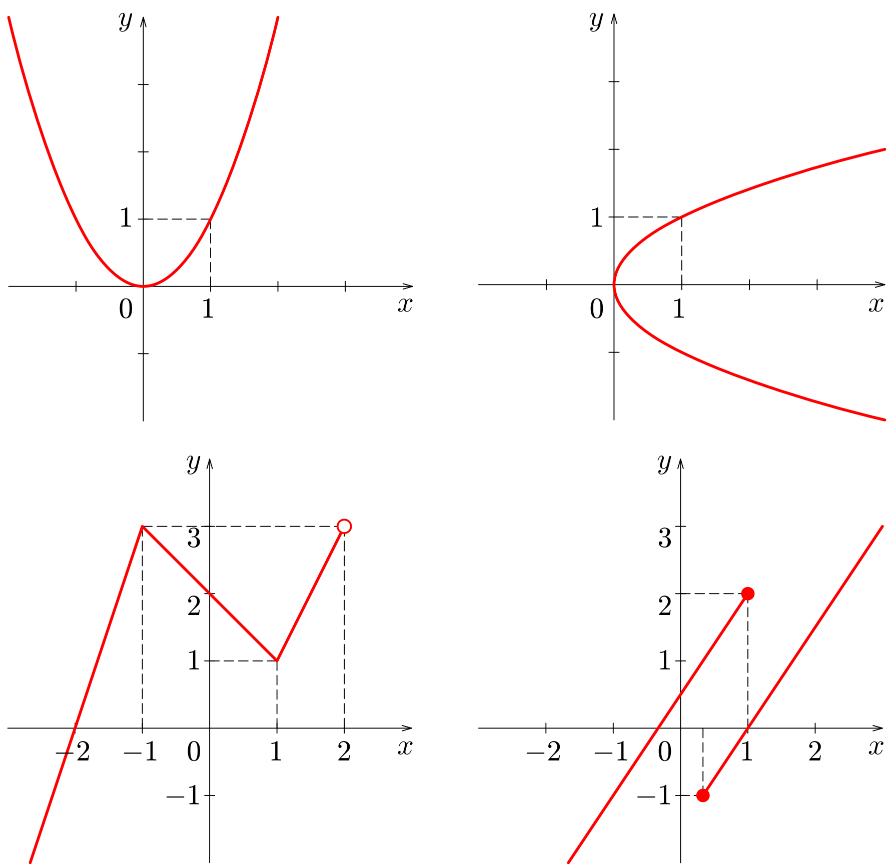
Ž: *Krivka na poslednom obrázku je grafom funkcie, neviem však, čo s tou nulou.*



U: Graf tejto funkcie sa približuje k obom osiam, ale nikdy sa ich nedotkne. Preto táto funkcia nie je definovaná v bode 0 a ani nikdy nenadobudne hodnotu 0.

Ž: *Z toho vyplýva, že jej definičný obor a obor hodnôt sú rovnaké, sú to množiny všetkých reálnych čísel okrem nuly:* $\mathcal{D} = \mathcal{H} = \mathbb{R} - \{0\}$

Úloha 2: *Rozhodnite, či nasledujúce krivky predstavujú grafy funkcií. Ak áno, určte ich definičné obory a obory hodnôt.*



Výsledok: a) áno, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \mathbb{R}_0^+$, b) nie, c) áno, $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$, $\mathcal{H} = (-\infty; 3\rangle$, d) nie

Príklad 3: *Zapíšte rovnicou funkčnú závislosť*
a) doby sťahovania súborov z internetu v závislosti od ich veľkosti, ak rýchlosť pripojenia je 100 *Mb/s*
b) času, za ktorý prejdeme vzdialenosť 120 *km v závislosti od priemernej rýchlosti auta.*

Ž: *Odkiaľ mám začať?*

U: Označ si veličiny, ktoré v úlohe vystupujú a uvedom si, ktorá od ktorej závisí.

Ž: *Doba sťahovania súborov závisí od ich veľkosti, teda si označím:*

$$x \ldots \textit{veľkosť súboru}$$
$$y \ldots \textit{doba sťahovania}$$

U: Dobre a teraz si môžeš do tabuľky zapísať niekoľko konkrétnych príkladov.

Ž: *Ak rýchlosť pripojenia je* 100 *Mb/s, tak povedzme* 300 *Mb súbor bude počítač sťahovať* 3 *sekundy,* 700 *Mb súbor mu potrvá* 7 *sekúnd, ale na* 2 *GB potrebuje* 20 *sekúnd. Tabuľka vyzerá takto:*

x $[Mb]$	300	700	2000
y $[s]$	3	7	20

U: Teraz ešte vyjadri túto závislosť rovnicou.

Ž: *To nie je ťažké, stačí veľkosť súboru vydeliť stomi, teda*

$$f : y = \frac{x}{100}.$$

U: Pekne. Ja len doplním, že $x \in \langle 0; \infty)$. Podobnými úvahami zvládneš aj ďalšiu časť.

Ž: *V druhej úlohe mám vyjadriť čas, za ktorý prejdeme vzdialenosť* 120 *km v závislosti od priemernej rýchlosti auta. Mám si rýchlosť označiť x alebo v ako na fyzike?*

U: Kľudne použi označenie v, pretože je to zaužívaný symbol pre rýchlosť.

Ž: *Dobre, v je priemerná rýchlosť auta v km/h, t je čas v hodinách. Čas bude závisieť od rýchlosti, pretože čím väčšou rýchlosťou pôjdeme, tým kratší čas potrebujeme na prejdenie* 120 *kilometrov. Pri rýchlosti* 60 *km/h nám to potrvá* 2 *hodiny, pri rýchlosti* 40 *km/h až* 3 *hodiny, môžeme si to opäť zapísať do tabuľky:*

v $[km/h]$	60	40	30	120
t $[h]$	2	3	4	1

Teraz vidím, že

$$g : t = \frac{120}{v}.$$

U: Ak z fyziky poznáme vzťah medzi rýchlosťou, časom a dráhou

$$s = v \cdot t,$$

tak vyjadríme z neho čas

$$t = \frac{s}{v},$$

pričom $v \in \langle 0; \infty)$. V našom prípade $s = 120$ km, teda

$$g : t = \frac{120}{v}.$$

Dospeli sme k tomu istému vyjadreniu.

Úloha 3:
Zapíšte rovnicou funkčnú závislosť
a) obsahu štvorca od jeho obvodu
b) polomeru kruhu od obsahu kruhu.

Výsledok: a) $S = \left(\frac{o}{4}\right)^2$, b) $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Príklad 4: *Zostrojte graf funkcie*

$$f(x) = \begin{cases} x & pre -3 \leqq x < 2 \\ 1 & pre -2 \leqq x < -1 \\ -x & pre -1 \leqq x \leqq 0. \end{cases}$$

Potom určte hodnoty tejto funkcie v bodoch $-2,5$; -2; -1; 0 *a* 3.

Ž: *S takýmto zápisom som sa ešte nestretol. Znamená to, že funkcia sa skladá z viacerých častí?*

U: Áno, tento zápis signalizuje, že funkcia f je určená na dielčích intervaloch rôznymi predpismi.

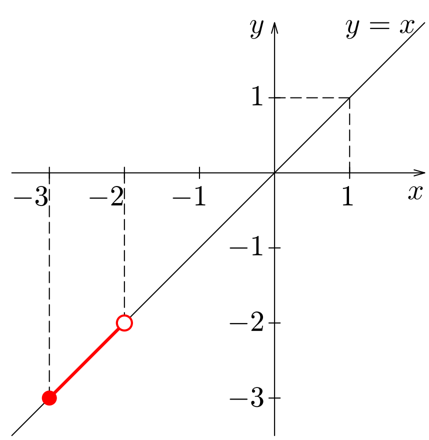
Ž: *Budeme teda kresliť tri grafy?*

U: Môžeme to tak urobiť a nakoniec ich spojíme do jedného.
V prvej časti je funkcia daná predpisom

$$f(x) = x.$$

Ž: *Grafom je teda priamka prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy a bodom* $[1; 1]$.

U: Áno a my ešte zvýrazníme tú časť, ktorá nás zaujíma, teda $-3 \leqq x < 2$.

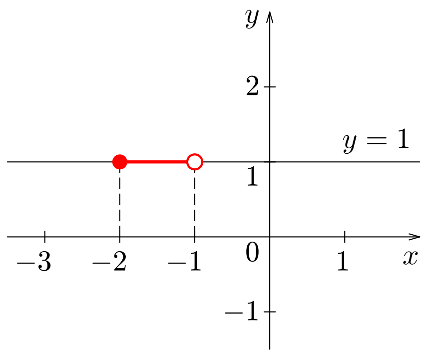


Ž: *V druhej časti máme predpis*

$$f(x) = 1,$$

čo je konštantná funkcia, teda grafom bude rovnobežka s osou x.

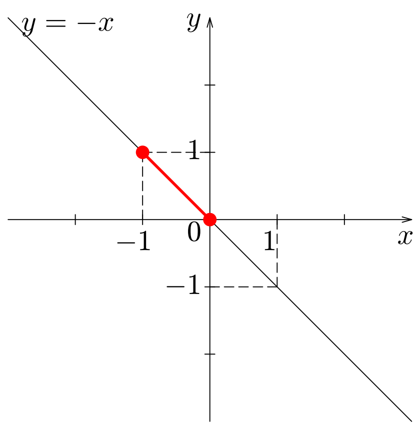
U: Opäť zvýraznime, že pre nás platí len časť pre $x \in \langle -2; -1)$.



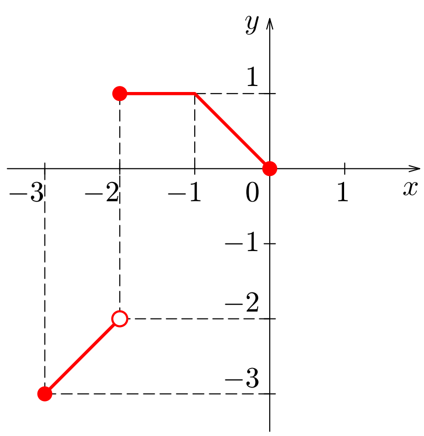
Ž: *V poslednej časti je funkcia daná predpisom*

$$f(x) = -x,$$

grafom je priamka prechádzajúca bodmi $[0; 0]$ *a* $[1; -1]$. *A zvýrazníme časť, kde* $-1 \leqq x \leqq 0$.



U: Výborne, teraz to už len spojíme a zistíme, že graf našej funkcie vyzerá takto:



U: Ešte máme určiť hodnoty funkcie v niektorých bodoch.

Ž: *To nie je ťažké:*

$$f(-2,5) = -2,5$$
$$f(-2) = 1$$
$$f(-1) = 1$$
$$f(0) = 0.$$

Akurát v bode 3 sa nedá vypočítať funkčná hodnota, pretože v trojke funkcia nie je definovaná.

Príklad 5: *Nájdite priesečníky grafov funkcií $f : y = 4x^2 - 1$ a $g : y = \sqrt{3x - 9}$ so súradnicovými osami.*

Ž: *Začnem s funkciou $f : y = 4x^2 - 1$. Priesečník s osou y je taký bod, ktorý má x-ovú súradnicu nula, teda ju dosadím za x:*

$$y = 4 \cdot 0^2 - 1 = -1.$$

U: Priesečník grafu funkcie f s osou y je preto bod $Y[0; -1]$.

Ž: *Idem na priesečník s osou x, ten je zase výnimočný tým, že má y-ovú súradnicu nula, ktorú dosadím za y:*

$$0 = 4x^2 - 1.$$

Toto už nepôjde tak ľahko.

U: Ale pôjde, dostali sme jednoduchú kvadratickú rovnicu bez lineárneho člena. Pusť sa do nej.

Ž: *Prehodím jednotku na druhú stranu a vydelím štyrmi, dostanem*

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

ešte odmocním a bude

$$x = \frac{1}{2}.$$

U: Počkaj, počkaj. Existujú predsa dve také reálne čísla, ktorých druhá mocnina je $\frac{1}{4}$.

Ž: *Aha, je to $\frac{1}{2}$ aj $-\frac{1}{2}$. Zabudol som na absolútnu hodnotu pri odmocňovaní.*

U: Teda vráťme sa ku kroku $x^2 = \frac{1}{4}$.

Ž: *Odtiaľ $|x| = \frac{1}{2}$, čiže $x = \pm\frac{1}{2}$. Takže budú dva priesečníky grafu s osou x a to budú body $X_1\left[\frac{1}{2}; 0\right]$ a $X_2\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.*

U: Dobre, skús druhú funkciu $g : y = \sqrt{3x - 9}$.

Ž: *Priesečník s osou y opäť získam dosadením nuly za x, teda $y = \sqrt{3.0 - 9} = \sqrt{-9}$. Ale to sa predsa nedá, odmocniť záporné číslo!*

U: Áno, neexistuje požadované y, a preto graf tejto funkcie os y-ovú nepretína.

Ž: *Skúsim os x-ovú, teda za y dám nulu:*

$$0 = \sqrt{3x - 9}.$$

U: To je iracionálna rovnica, nezabudni na podmienky.

Ž: *Podmienka je $3x - 9 \geqq 0$, odkiaľ $x \geqq 3$. Môžem rovnicu $0 = \sqrt{3x - 9}$ umocniť, dostanem*

$$0 = 3x - 9.$$

Čiže $9 = 3x$, riešením je $x = 3$.

U: Toto číslo vyhovuje podmienke, teda funkcia g pretne x-ovú os v bode $X[3;0]$.

Úloha 5: *Určte súradnice priesečníkov grafov funkcií so súradnicovými osami:*

$$f : y = \frac{3x-2}{2x+1}$$

$$g : y = \begin{cases} 2x-3 & \text{pre } x \geqq 2 \\ x^2-1 & \text{pre } x < 2. \end{cases}$$

Výsledok: $f : Y\,[0;-2],\ X\left[\frac{2}{3};0\right]$
$g : Y\,[0;-1],\ X_1\,[1;0],\ X_2\,[-1;0]$

Príklad 6: *Zistite, v ktorých bodoch sa pretnú grafy funkcií* $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 2$ *a* $g(x) = x^3 + x^2 - 3x + 8$.

U: Hľadáme vlastne spoločné body, teda také, v ktorých platí

$$f(x) = g(x).$$

Ž: *Z toho dostanem takúto rovnicu:*

$$x^3 + 2x^2 - 8x + 2 = x^3 + x^2 - 3x + 8.$$

Našťastie x^3 *z nej vypadne, prehodím všetko na jednu stranu*

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

To je obyčajná kvadratická rovnica, viem ju Vietovými vzťahmi rozložiť na súčin

$$(x - 6)(x - 1) = 0,$$

takže riešením sú čísla $x_1 = 6$ *a* $x_2 = -1$.

U: Pekne si to zvládol, to sú však iba x-ové súradnice. Naša úloha požaduje nájsť priesečníky.

Ž: *K tomu mi ešte chýbajú ypsilony. Nájdem ich tak, že si dosadím* x_1 *a* x_2 *do rovnice. Teraz rozmýšľam, či do* $f(x)$ *alebo do* $g(x)$. *Ale to by vlastne malo byť jedno, do ktorej funkcie to dosadím, keď hľadám spoločné body.*

U: Áno, v oboch prípadoch, ak si dobre počítal, dostaneš rovnaké výsledky.

Ž: *Tak to dosadím do funkcie* f*:*

$$f(6) = 6^3 + 2.6^2 - 8.6 + 2 = 216 + 72 - 48 + 2 = 242$$

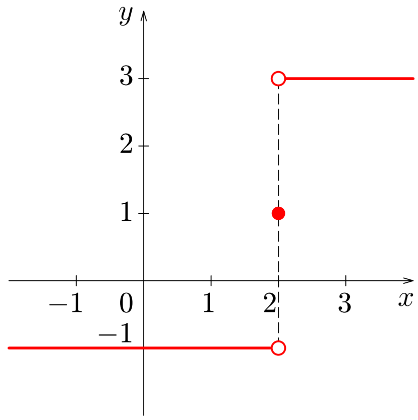
$$f(-1) = (-1)^3 + 2.(-1)^2 - 8.(-1) + 2 = -1 + 2 + 8 + 2 = 11.$$

U: Grafy funkcií f a g sa pretínajú v bodoch $A[6; 242]; B[-1; 11]$.

Úloha 6: *Určte súradnice priesečníkov grafov funkcií* $f : y = 4x^2 - 2x + 7$ *a* $g : y = 13 - 7x$.

Výsledok: $A\left[\frac{3}{4}; \frac{31}{4}\right]$, $B[-2; 27]$

Príklad 7: *Daný je graf funkcie*



Určte hodnoty tejto funkcie v bodoch -2; 0; 2; 5. *Vedeli by ste zapísať, ako je funkcia zadaná?*

Ž: *Hodnoty funkcie môžeme vyčítať z grafu,*

$$f(-2) = -1$$

$$f(0) = -1$$

$$f(2) = 1$$

$$f(5) = 3.$$

U: Pekne. Teraz skús vysvetliť, ako je táto funkcia vlastne vytvorená a zapísať to.

Ž: *Všetkým číslam, ktoré sú väčšie ako* 2 *priradí trojku, číslam menším ako* 2 *priradí mínus jednotku. A pri čísle* 2 *je plný krúžok nakreslený tak, že udáva hodnotu* 1. *Teda*

$$f: y = \begin{cases} 3 \\ 1 \\ -1. \end{cases}$$

U: To si síce správne zapísal, ktoré hodnoty funkcia nadobúda, ale neuviedol si, kedy nastáva ktorá možnosť, pripíšeme to tam takto:

$$f: y = \begin{cases} 3; & \text{pre} \quad x > 2 \\ 1; & \text{pre} \quad x = 2 \\ -1; & \text{pre} \quad x < 2. \end{cases}$$

Príklad 8: *Zostavte tabuľku funkcie f, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:*
a) definičným oborom je množina všetkých jednociferných prirodzených čísel
b) oborom hodnôt je množina všetkých párnych jednociferných prirodzených čísel
c) číslo 8 je obrazom práve troch čísel z definičného oboru
d) funkcia je neklesajúca.

Ž: *To je veľa podmienok naraz. Idem postupne. Ak definičným oborom je množina všetkých jednociferných prirodzených čísel, tak môžem zapísať*

$$\mathcal{D} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

a tieto čísla budú v prvom riadku tabuľky. Oborom hodnôt má byť množina všetkých párnych jednociferných prirodzených čísel, teda

$$\mathcal{H} = \{2; 4; 6; 8\} .$$

Tieto čísla budú v druhom riadku tabuľky. Ale je ich menej, preto sa budú niektoré opakovať. Pripravím si tabuľku

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y									

Tretia podmienka hovorí, že číslo 8 je obrazom práve troch čísel z definičného oboru. Teda v druhom riadku budú tri osmičky. Kam ich mám dať? Ako chcem?

U: To nie, ešte tam máš štvrtú podmienku.

Ž: *Tej veľmi nerozumiem, že funkcia je neklesajúca.*

U: Znamená to, že hodnoty v druhom riadku sú usporiadané podľa veľkosti, každá ďalšia je väčšia alebo rovnaká ako tá pred ňou.

Ž: *Potom ale tie tri osmičky musíme dať na koniec, lebo od nich už väčšie číslo v obore hodnôt nemáme.*

U: A zase najmenšie číslo z oboru hodnôt, dvojku musíme priradiť jednotke.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2						8	8	8

Ž: *Osmičiek už nemôže byť viac, preto šestke priradíme šestku. Ešte nám chýba v druhom riadku štvorka, ale mohlo by ich byť aj viac, takže to bude mať asi viac riešení.*

U: Áno, skús zapísať tri rôzne riešenia.

Ž: *Tu sú:*

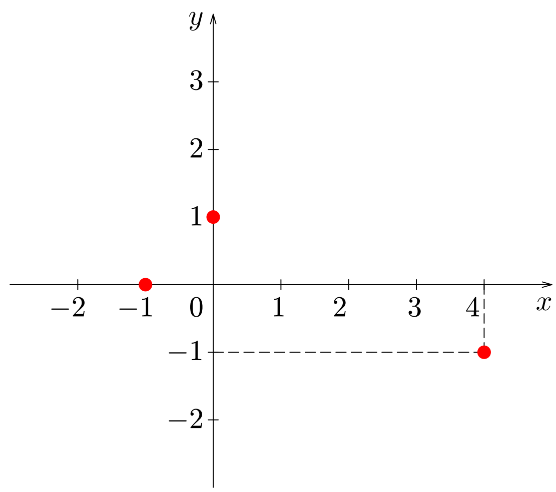
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	2	2	2	4	6	8	8	8

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	2	4	4	6	6	8	8	8

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	4	4	4	4	6	8	8	8

Príklad 9: *O funkcii sú známe tieto údaje $\mathcal{D} = \langle -1; 4\rangle$, $\mathcal{H} = \langle -2; 1\rangle$, funkčné hodnoty v bodoch -1; 0; 4 sú za radom 0; 1; -1.*
a) Koľko existuje funkcií, ktoré spĺňajú všetky tieto podmienky?
b) Načrtnite graf niektorej z nich.

Ž: *Najprv si pripravím súradnicovú sústavu a do nej vyznačím tie tri známe body $[-1; 0]$, $[0; 1]$, $[4; -1]$.*

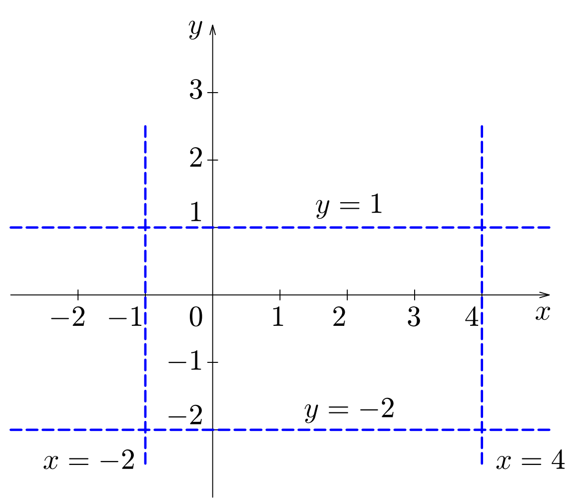


Ž: *Ďalej viem, že $\mathcal{D} = \langle -1; 4\rangle$. Ako to nakresliť?*

U: Priamky $x = -1$ a $x = 4$ nám ohraničia rovinný pás, v ktorom sa graf musí nachádzať.

Ž: *Tipujem, že s oborom hodnôt $\mathcal{H} = \langle -2; 1\rangle$ to bude podobne.*

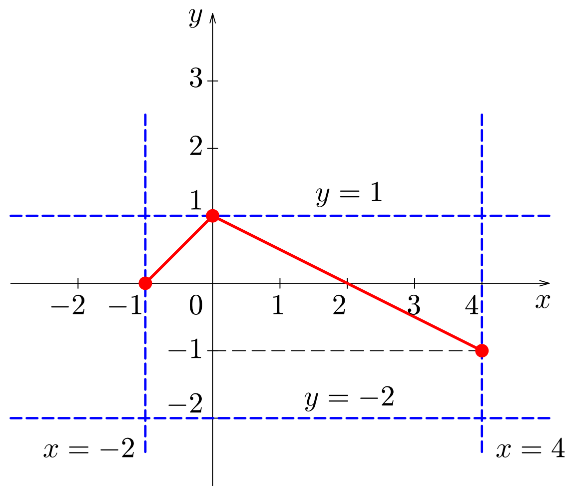
U: Tiež tu vznikne rovinný pás ohraničený priamkami $y = -2$ a $y = 1$. Vyzerá to takto:



Ž: *Celý graf je ohraničený obdĺžnikom. Ale takých grafov tam môžem nakresliť hocikoľko.*

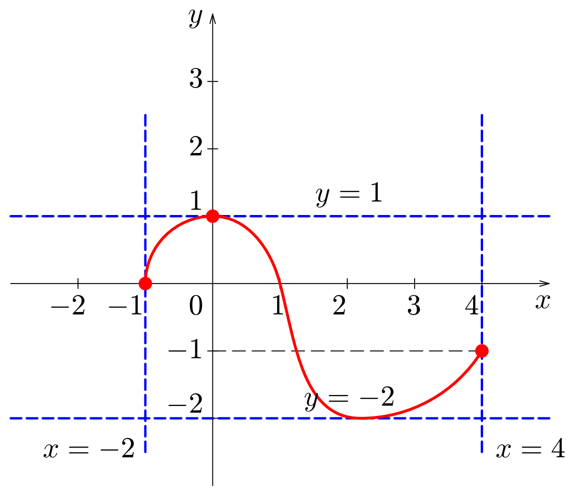
U: Tým si odpovedal na prvú otázku a teraz načrtni graf jednej z nich.

Ž: *Napríklad takto?*



U: Nie, tvoja funkcia má obor hodnôt iba interval $\langle -1; 1\rangle$ a my potrebujeme $\langle -2; 1\rangle$.

Ž: *Musím to potiahnuť trochu nižšie. A čo takto?*



U: Výborne.