Definícia funkcie

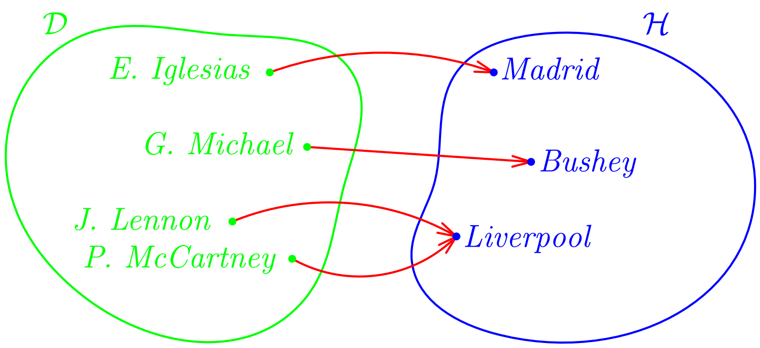
RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Keďže funkcia je vlastne istý spôsob priradenia, tak si najprv vysvetlíme pojem priradenie. Napríklad môžeme k svojim obľúbeným spevákom priradiť ich miesto narodenia. Môžeš začať.

Ž: *Mám rád piesne Enrique Iglesiasa, ten sa narodil v Madride a povedzme ešte by mohol byť George Michael, ten sa narodil v Anglicku, v Bushey.*

U: Dobre, ja pridám svojich obľúbencov zo skupiny Beatles – Johna Lennona a Paula McCartneyho, obaja pochádzajú z Liverpoolu v Anglicku. Teraz celú situáciu znázorníme šípkovým diagramom. Nakreslíme si dve množiny. Prvú budeme nazývať ***definičný obor*** a označovať $\mathcal{D}$, v našom prípade v nej budú speváci. Druhú množinu, u nás obsahuje mestá, nazveme ***oborom hodnôt*** a označíme $\mathcal{H}$. Skúsiš to dokončiť?

Ž: *To je ľahké. Jednoducho pospájame odpovedajúce dvojice, teda každému spevákovi priradíme mesto, v ktorom sa narodil. Takže celý diagram vyzerá tak, ako ho vidíme na obrázku:*



U: Mohli by ísť od jedného mena dve šípky?

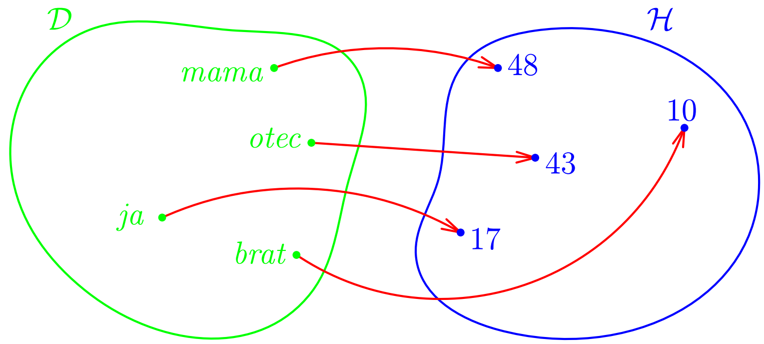
Ž: *To teda nie, nikto sa predsa nemohol narodiť naraz na dvoch miestach! Ale môže viac šípok smerovať k jednému mestu, ako to vidíme u dvojice Lennon, McCartney.*

U: Výborne, toto je dôležitá myšlienka, ešte sa k nej vrátime. Aby sme sa dostali k pojmu funkcia, potrebujeme vymyslieť také priradenie, ktoré bude prvkom nejakej množiny priraďovať čísla.

Ž: *Iba čísla? Hm . . . Napríklad vek?*

U: Môže byť, skús konkrétne.

Ž: *Tak môžem priradiť vek členom našej rodiny. Moja mama má* 43 *rokov, otec* 48*, ja* 17 *a môj brat* 10*. Šípkový diagram bude vyzerať takto:*



U: Opäť zdôraznime, že každému členovi rodiny sme priradili právě jedno číslo. Avšak viacerí členovia v rodine môžu mať ten istý vek.

Ž: *Napríklad, keby tam mali pätorčatá.*

U: Áno. Táto situácia s ľuďmi a ich vekom bola prvým príkladom funkcie. Takže môžeme vysloviť jej definíciu:

Funkciou na množine $\mathcal{D}$ nazývame ľubovoľný predpis, ktorý každému prvku množiny $\mathcal{D}$ priradí práve jedno reálne číslo. Množinu $\mathcal{D}$ nazývame definičný obor funkcie.

My sa budeme zaoberať iba takými funkciami, ktorých definičný obor aj obor hodnôt sú podmnožiny množiny všetkých reálnych čísel.

Ž: *Takže budeme reálnym číslam priraďovať reálne čísla?*

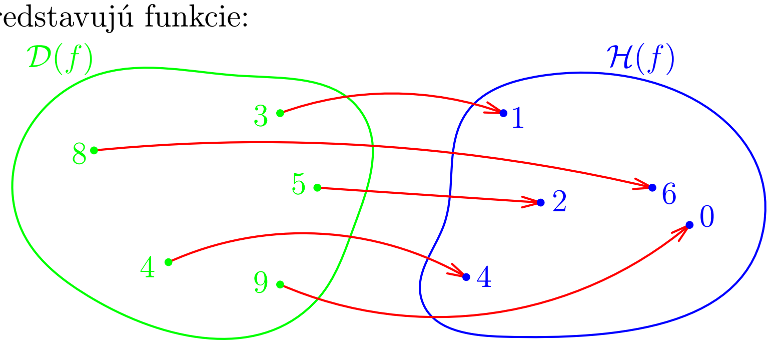
U: Presne tak, symbolicky to môžeme zapísať takto:

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{H} \subset \mathbb{R}.$$

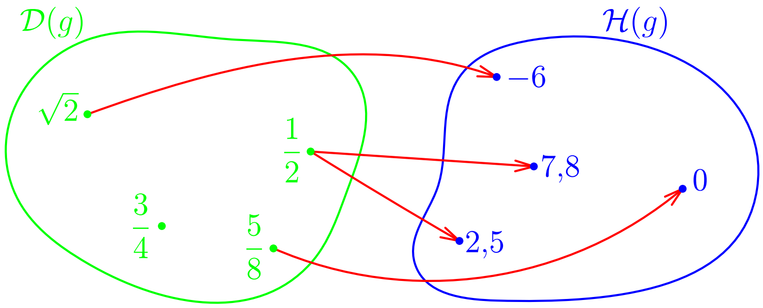
Funkcie budeme obvykle označovať malými písmenami f, g, h $\ldots$, ich definičné obory potom $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(g)$, $\mathcal{D}(h)$ alebo len $\mathcal{D}$. Dodajme, že:

Oborom hodnôt funkcie f budeme nazývať množinu všetkých reálnych čísel, ktoré sú danou funkciou priradené prvkom definičného oboru. Označíme ju $\mathcal{H}(f)$.

U: Aby sme si overili, či si dobre porozumel pojmu funkcia, pozri sa na nasledujúce diagramy a povedz, či predstavujú funkcie:

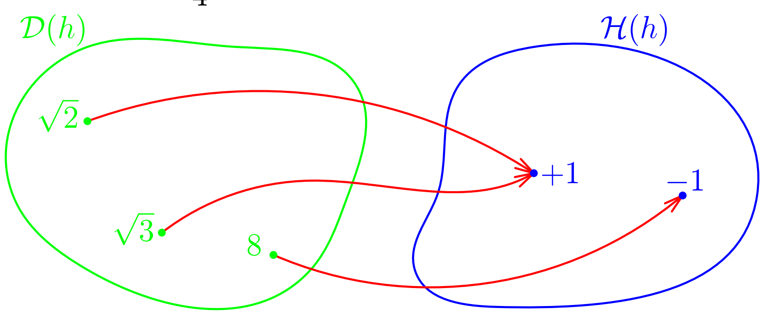


Ž: *Na prvom obrázku je všetko v poriadku, každému prvku z definičného oboru je priradené práve jedno číslo z oboru hodnôt, takže f je funkcia.*



Ž: *Na druhom obrázku to však nesedí, lebo číslu* $\frac{1}{2}$ *sú priradené dve rôzne čísla* $7,8$ *a* $2,5$*, teda g nie je funkcia.*

U: Máš pravdu, navyše tu číslu $\frac{3}{4}$ nie je priradená žiadna hodnota, čo tiež nemôže byť.



Ž: *No a na treťom obrázku je* $\sqrt{2}$ *priradená jednotka,* $\sqrt{3}$ *tiež jednotka, osmičke je priradená mínus jednotka. Takže h je funkcia.*

U: Mohla by byť zadaná aj iným spôsobom, napríklad takouto tabuľkou:

x	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	8
y	1	1	-1

Vedel by si zapísať jej definičný obor a obor hodnôt?

Ž: *Pravdaže,* $\mathcal{D}(h) = \left\{\sqrt{2}; \sqrt{3}; 8\right\}$ *a* $\mathcal{H}(h) = \{1; -1\}$*.*

U: Výborne.

U: Vráťme sa teraz trochu k pomenovaniu a označeniu. Symbolom x zvykneme označovať prvky definičného oboru $\mathcal{D}$ a tento symbol nazývame ***nezávisle premenná*** alebo ***argument funkcie***. Prvky oboru hodnôt $\mathcal{H}$ označujeme symbolom y. Keďže y je priradené ku x, teda od neho závisí, hovoríme mu ***závisle premenná*** alebo tiež ***funkčná hodnota***. Ak chceme povedať, že funkcia f priradila číslu x číslo y, zapíšeme to takto: $y = f(x)$.

$$y = f(x)$$

f ... funkcia
x ... nezávisle premenná, argument funkcie
y ... závisle premenná, funkčná hodnota

U: Funkcie najčastejšie zadávame pomocou predpisov. Môže to napríklad vyzerať takto:

$$f : y = x^2 \text{ prípadne } f(x) = x^2.$$

Ž: *Ak tomu dobre rozumiem, tak táto funkcia priradí číslu jeho druhú mocninu, napríklad osmičke priradí* 64*, mínus trojke priradí deviatku.*

U: Áno, hovoríme, že funkčná hodnota funkcie f v bode 8 je 64 alebo tiež hodnota funkcie f v bode -3 je 9. Symbolicky by sme to zapísali tak, ako to vidno v rámčeku:

$$\boxed{f(8) = 64, \quad f(-3) = 9}$$

Vedel by si určiť definičný obor tejto funkcie?

Ž: *No teraz ste ma zaskočili. Nemal by byť daný na začiatku?*

U: Máš pravdu, definičný obor by mal byť naozaj zadaný spolu s predpisom funkcie. Väčšinou to tak však nie je, pretože platí takýto dohovor:

Ak nie je uvedené inak, rozumieme pod definičným oborom funkcie množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré majú všetky výrazy, vystupujúce v predpise funkcie, zmysel.

Ž: *To mi pripomína určovanie podmienok pri výrazoch!*

U: Veď to aj je presne to isté! V našom prípade môžeme druhú mocninu vypočítať z ktoréhokoľvek reálneho čísla, teda definičný obor funkcie f bude množina všetkých reálnych čísel

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Ako to bude s oborom hodnôt?

Ž: *Druhá mocnina je vždy číslo kladné...*

U: Určite? A koľko je nula na druhú?

Ž: *Nula. Ahá, takže druhá mocnina je vždy číslo nezáporné, teda oborom hodnôt budú všetky nezáporné reálne čísla, ktoré označujeme symbolom* $\mathbb{R}_0^+$ *a teda*

$$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+.$$

Ž: *A načo sú vlastne dobré funkcie?*

U: Skús si uvedomiť, že funkcia vyjadruje, resp. zachycuje určitú závislosť medzi dvoma veličinami. Teda funkcia nám umôžňuje zapisovať napríklad spotrebu benzínu v závislosti od prejdenej vzdialenosti. V takom prípade by prejdená vzdialenosť predstavovala nezávisle premennú, označili by sme ju x. No a samotná spotreba závisí od toho, koľko kilometrov prejdeme, teda by predstavovala závisle premennú a označili by sme ju y.
Dajme tomu, že naše auto má priemernú spotrebu 7 litrov benzínu na 100 kilometrov. Potom by tabuľka našej funkčnej závislosti mohla vyzerať napríklad aj takto:

x	100	200	300
y	7	14	21

Ž: *Myslím, že táto funkcia sa dá jednoducho zapísať, pretože stačí počet kilometrov vynásobiť siedmimi a vydeliť stomi, teda*

$$y = \frac{7.x}{100}.$$

U: Presne tak. Ďalšími situáciami, ktoré vieme popísať pomocou funkcií môžu byť - koľko úrokov dostaneme v banke za rok v závislosti od nášho vkladu alebo ako dlho bude padať na zem kameň, ktorý pustíme z určitej výšky.

Ž: *Aj to, koľko kilometrov najazdím na bicykli za hodinu? Alebo o koľko pesničiek stiahnem viac z internetu ako kamarát, ak mám rýchlejšie pripojenie?*

U: Áno. Pojem funkcie vznikol práve pri sledovaní zmien a závislostí rôznych javov, s ktorými sa človek stretával v bežnom živote. Najviac sa rozvíjal v 17. až 19. storočí a dnes patrí medzi najvýznamnejšie pojmy v matematike.