Kružnica a dotyčnica

RNDr. Marián Macko

U: Spomínaš si na ***množiny bodov danej vlastnosti***, ktoré sme často využívali pri konštrukcii trojuholníkov a mnohouholníkov?

Ž: *Samozrejme, že si spomínam. Zostrojovali sme priamky rovnobežné so zadanými úsečkami v požadovanej vzdialenosti, osi úsečiek, osi uhlov, ale aj Thalesovu kružnicu …*

U: A pri pojme ***kružnica*** sa teraz zastavíme. Bude nás zaujímať hlavne kružnica dotýkajúca sa danej priamky alebo danej kružnice. Vyriešime však aj situácie, keď bude daných viac priamok, či kružníc.

Ž: *Už sa na to teším. Veď mnohé si pamätám zo základnej školy.*

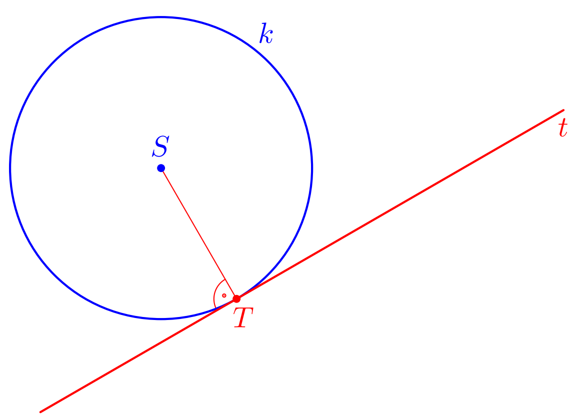
U: V tom prípade, ti nebude robiť problém definovať pojem kružnica.

Ž: **Kružnicou** *nazývame* **množinu všetkých bodov v rovine, ktoré majú od daného bodu** S **tejto roviny danú vzdialenosť** r. *Bod S nazývame* **stredom kružnice** *a číslo r* **polomerom kružnice**.

U: Uvedomuješ si dúfam, že aj kružnica je množinou bodov danej vlastnosti. Pozrime sa však teraz na jeden z prípadov vzájomnej polohy kružnice a priamky. Ako nazývame priamku, ktorá má s kružnicou ***práve jeden spoločný bod***?

Ž: *Máte na mysli* **dotyčnicu ku kružnici**?

U: Presne tak. Pokús sa bližšie charakterizovať túto vzájomnú polohu kružnice a priamky.



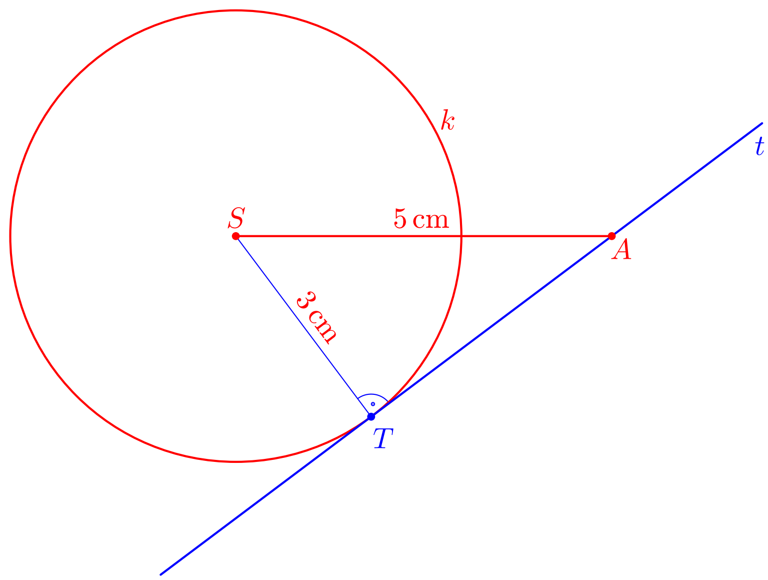
Ž: *Jediný spoločný bod kružnice a dotyčnice nazývame* **dotykový bod**. *Na našom obrázku je to bod T. Zároveň platí, že úsečka spájajúca stred kružnice a dotykový bod je* **kolmá** *na dotyčnicu. Preto platí*

$$ST \perp t,$$

kde t je dotyčnica ku kružnici.

U: Ako by si teda zostrojil ***všetky dotyčnice ku kružnici*** $k(S;\ 3\ \mathrm{cm})$ ***prechádzajúce daným bodom*** A***, ak*** $|SA| = 5\ \mathrm{cm}$? Stačí, ak mi povieš základnú myšlienku konštrukcie. Túto úlohu nebudeme riešiť precízne ako konštrukčnú úlohu so všetkými jej fázami.

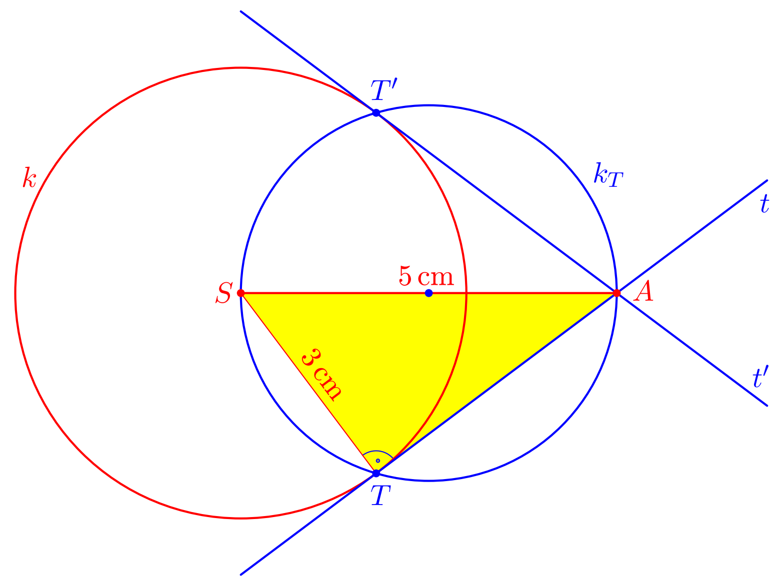
Ž: *Skúsim si urobiť náčrt. Vyznačím v ňom kružnicu a jednu jej dotyčnicu* t*. Na tejto dotyčnici si zvolím bod* A*. Je to vonkajší bod kružnice, lebo jeho vzdialenosť je väčšia ako polomer kružnice.*



Ž: *Teraz sa musím na obrázok pozrieť podľa zadania. Mám danú kružnicu* k *so stredom v bode* S *a polomerom* 3 *centimetre a bod* A *vo vzdialenosti* 5 *centimetrov od stredu kružnice.*

U: Ideš na to správne. Potrebuješ zostrojiť dotyčnicu t.

Ž: *Dotyčnica je určená bodmi* A *a* T*. Musím teda nájsť* **dotykový bod** T*. Ten patrí zadanej kružnici* k *a zároveň viem, že* **uhol** ATS **je pravý***. Bod* T *je vrcholom tohto pravého uhla. Preto zostrojím* **Thalesovu kružnicu***, ktorej priemerom je úsečka* AS*. Vrcholy* T *pravých uhlov ležia na Thalesovej kružnici* k_T*.*



U: Dotykový bod T dostaneme teda ako ***priesečník*** danej kružnice k a Thalesovej kružnice. Ako vidieť z obrázka, získali sme dva dotykové body T a T'.

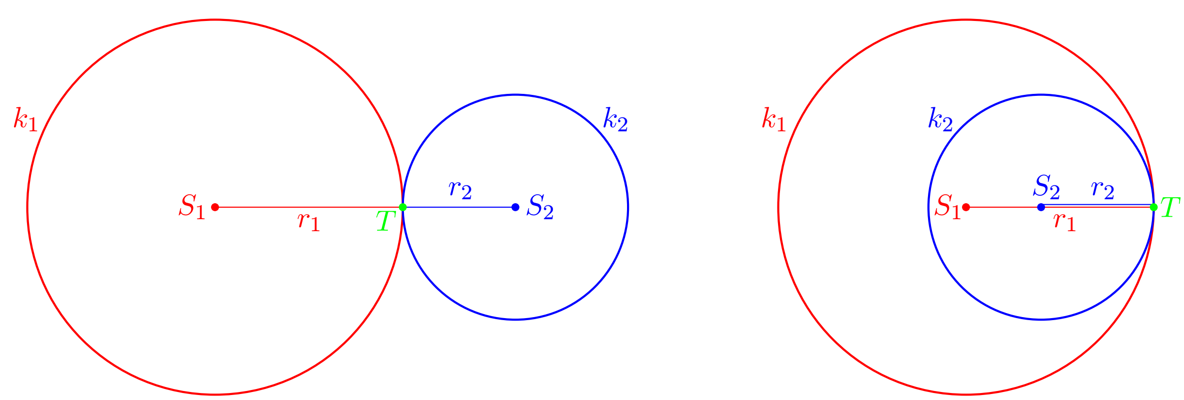
Ž: *Existujú teda* **dve dotyčnice ku kružnici** k **prechádzajúce daným bodom** A.

U: Musím uznať, že to máš namakané.

U: Môžu sa dotýkať aj dve kružnice?

Ž: *Prečo nie. Dve kružnice sa budú dotýkať, ak budú mať jeden spoločný bod.*

U: Dve kružnice môžu mať vonkajší dotyk alebo vnútorný dotyk, tak ako je to znázornené na nasledujúcom obrázku. Dôležité je, že ich spoločný ***dotykový bod*** leží na ***priamke spájajúcej stredy*** S_1 ***a*** S_2 ***kružníc***.



Ž: *Dobre, že ste to pripomenuli. Stále na to zabúdam a vo väčšine úloh, aj výpočtového charakteru, je to dôležité.*

U: Máš pravdu. Vďaka tejto vlastnosti sa dá vyjadriť vzťah medzi vzdialenosťou stredov kružníc a ich polomermi. Pozri sa ešte raz na obrázok.

Ž: *Pre vonkajší dotyk dvoch kružníc platí, že vzdialenosť ich stredov je rovná súčtu ich polomerov.*

$$\boxed{|S_1S_2| = r_1 + r_2}$$

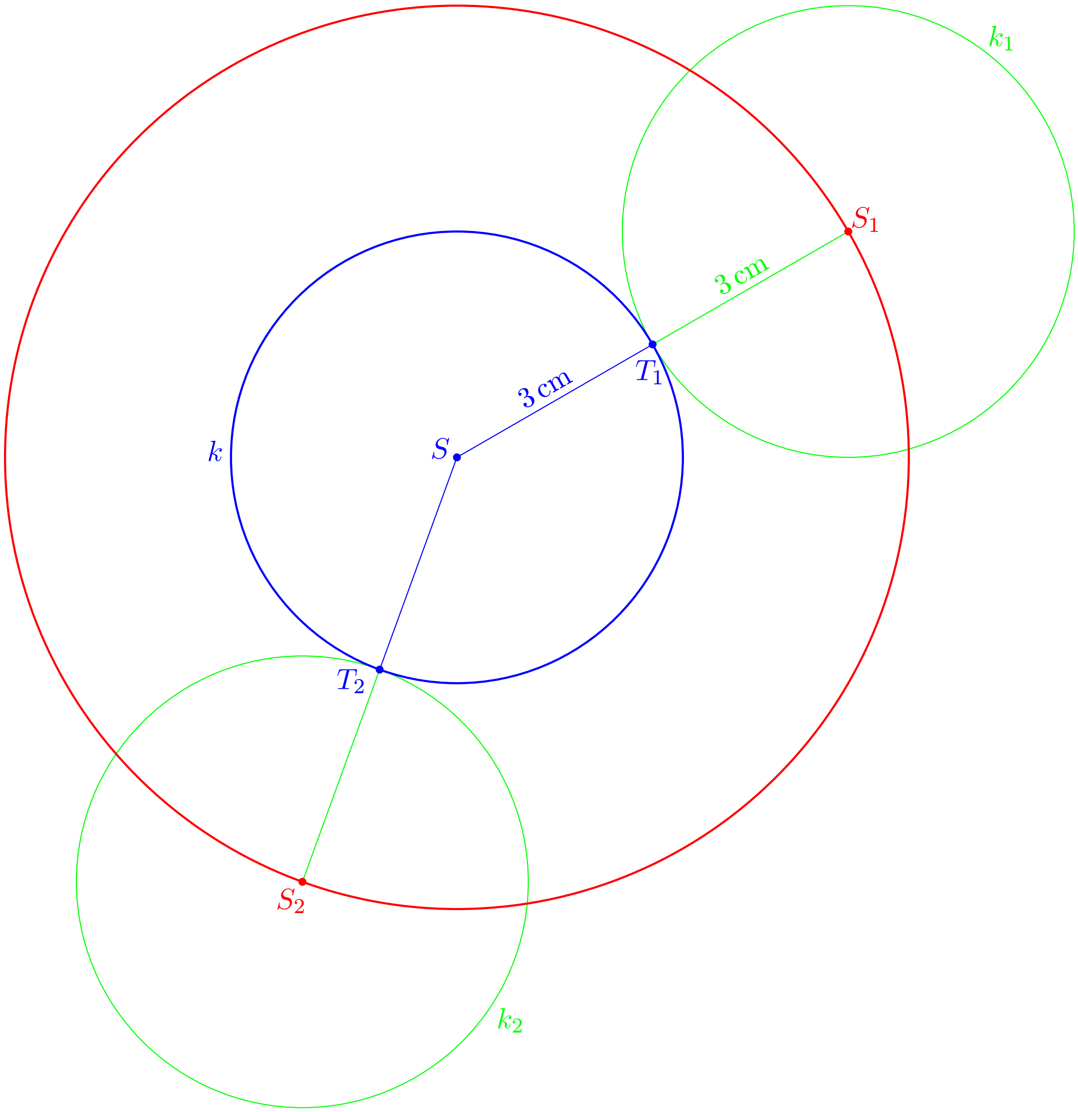
Ž: *Pri vnútornom dotyku je vzdialenosť stredov rovná rozdielu ich polomerov.*

U: Musím ťa opraviť. Nemusí byť vždy zrejmé, ktorá kružnica má väčší polomer. Zápis podmienky preto ošetríme absolútnou hodnotou z rozdielu polomerov kružníc.

$$\boxed{|S_1S_2| = |r_1 - r_2|}$$

U: Skúsme situáciu dvoch dotýkajúcich sa kružníc trochu zmeniť. Zadaná je kružnica $k(S;\ 3\ \mathrm{cm})$. Máme ***zostrojiť množinu stredov všetkých kružníc*** l ***s polomerom*** 3 ***centimetre, ktoré sa kružnice*** k ***dotýkajú***.

Ž: *Kružnice majú mať rovnaký polomer? Nóóó ... Jednu takú by som vedel zostrojiť. Jej stred by bol vzdialený* 6 *centimetrov od zadaného bodu* S*. Vlastne, takých kružníc by bolo nekonečne veľa. Stredy všetkých týchto kružníc by ležali na kružnici so stredom v bode* S *a polomerom* 6 *centimetrov.*



U: Práve si popísal ďalšiu z množín bodov danej vlastnosti. Výsledok riešenia našej úlohy zovšeobecníme. ***Množinou stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer*** r ***a dotýkajú sa danej kružnice*** $k(S;\ r)$ ***je kružnica*** k' ***so stredom v bode*** S ***a polomerom*** $2r$.

Ž: *Musia mať kružnice, ktoré sa dotýkajú zadanej kružnice* k *s polomerom* r*, tiež polomer* r*?*

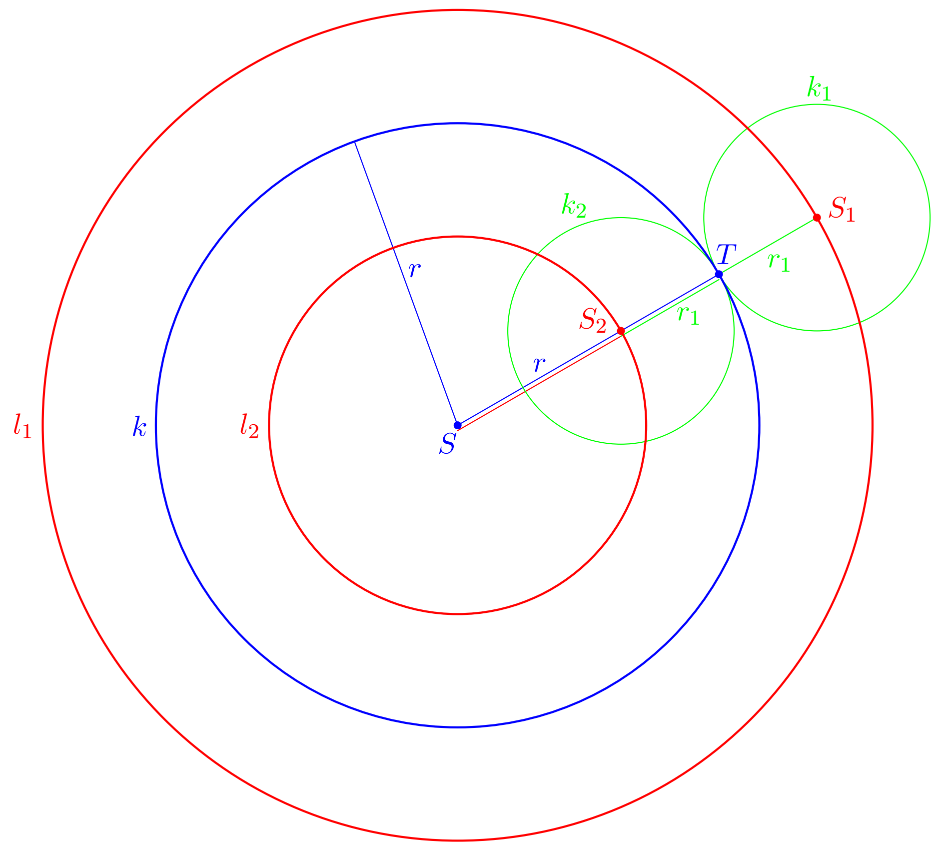
U: Správna otázka. Polomery nemusia byť rovnaké. Vedel by si určiť množinu stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer r_1 a dotýkajú sa danej kružnice $k(S;\ r)$, ak $r < r_1$?

Ž: *Výsledok bude taký istý ako v prípade, keď polomery boli rovnaké. Polomer* r' *výslednej kružnice bude* **súčtom polomerov uvažovaných kružníc**, *teda*

$$r' = r + r_1.$$

U: A čo v prípade, keď $r > r_1$?

Ž: *Aj vtedy bude polomer kružnice, ktorá je hľadanou množinou bodov danej vlastnosti súčtom polomerov. Počkajte! … Myslím, že vtedy bude ešte aj druhé riešenie. Kružnice s polomerom r_1 sa môžu zadanej kružnice k dotýkať aj z vnútra. Druhým riešením preto bude kružnica so stredom v bode S a polomerom $r - r_1$.*

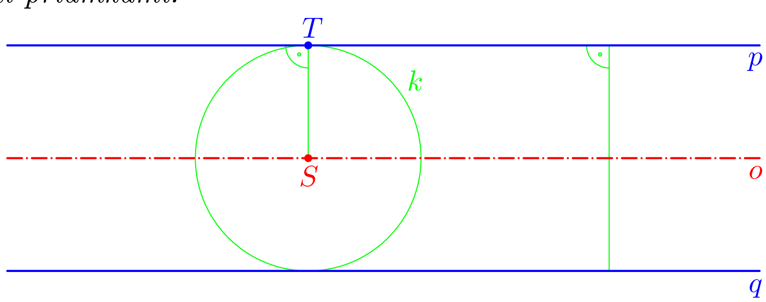


U: Správne. Vzhľadom na polomery sme teda vyriešili všetky prípady dotyku dvoch kružníc.

Ž: *Trochu vás v úvahách predbehnem. Povedali ste, že kružnica sa môže dotýkať aj viacerých priamok.*

U: Áno. Pre jednoduchosť zoberme najskôr dve navzájom rovnobežné priamky p a q. Aký geometrický útvar vytvárajú stredy všetkých kružníc dotýkajúcich sa týchto priamok?

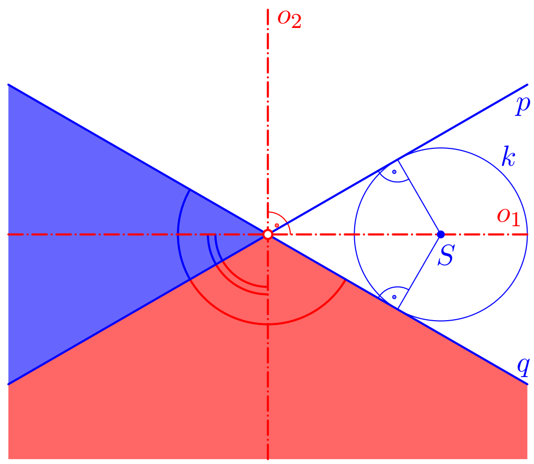
Ž: *Toto je jednoduchá úloha. Ak sa kružnice majú dotýkať oboch priamok, tak ich polomer musí byť polovicou zo vzdialenosti priamok p a q. Stredy tak vytvoria priamku v strede medzi zadanými priamkami.*



U: Hovoríme tomu ***os pásu vymedzeného rovnobežnými priamkami p a q***. Patrí medzi ďalšie množiny bodov danej vlastnosti, ktoré súvisia s kružnicami. Ako by sa situácia zmenila, ak by priamky p a q boli ***rôznobežné***?

Ž: *Rôznobežné priamky mi pripomínajú uhol. Pokiaľ sa pamätám, tak aj v trojuholníku, ak som chcel nájsť stred kružnice vpísanej, tak som zostrojil os vnútorných uhlov. Preto aj teraz urobím to isté. Dostanem jednu priamku, ktorá je osou uhla tvoreného zadanými rôznobežnými priamkami p a q.*

U: Prirovnanie so stredom kružnice do trojuholníka vpísanej sa mi páčilo. Os uhla je však iba polpriamka. Trochu si však pozabudol, že rôznobežné priamky vytvárajú až ***štyri uhly***. Štyri polpriamky dajú ***dve na seba kolmé priamky***, ktoré budú hľadanou množinou.



Ž: *Máte pravdu. Ja som uvažoval iba dva* **vrcholové uhly**, *preto som povedal, že výsledkom je priamka. Súhlasím s vami, že to majú byť dve priamky. Ale prečo sú na seba kolmé?*

U: Pozri sa na posledný obrázok ešte raz. Os modrého uhla rozdeľuje uhol na dva zhodné uhly. Os susedného uhla, ktorý je vyznačený červenou farbou, tiež rozdeľuje tento uhol na dva zhodné uhly. Súčet veľkostí dvoch susedných uhlov je 180 stupňov. Preto je súčet ich polovíc 90 stupňov.

Ž: *Mám si teda pamätať, že* **množinou stredov všetkých kružníc**, *ktoré sa* **dotýkajú dvoch rôznobežných priamok p a q** *je* **dvojica navzájom kolmých osí o_1, o_2 uhlov vytvorených priamkami p a q**.

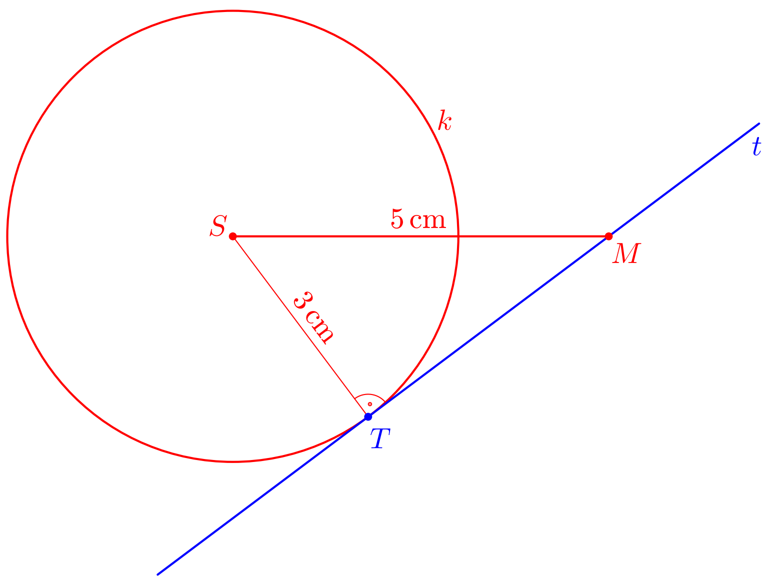
U: Máš pravdu. Ja len doplním, že do výsledku ***nepatrí priesečník priamok p a q***. V riešených úlohách sa stretneš aj s prípadmi, kedy kružnica dotýkajúca sa zadaných rovinných geometrických útvarov, sa bude dať zostrojiť jednoznačne. Poslúžia ti k tomu aj vedomosti, ktoré sme si v tejto téme pripomenuli.

Príklad 1: *Daná je kružnica $k(S;\ 3\ \text{cm})$ a bod M, pričom $|SM| = 5$ cm. Zostrojte všetky dotyčnice ku kružnici k, ktoré prechádzajú bodom M.*

U: Pripomeňme si najskôr, ktoré fázy má konštrukčná úloha.

Ž: *Prvou fázou konštrukčnej úlohy je rozbor. Potom nasleduje konštrukcia, dôkaz správnosti konštrukcie a diskusia. Spolu sú to teda štyri fázy konštrukčnej úlohy.*

U: Začnime teda rozborom konštrukčnej úlohy. Obsahuje náčrt a podmienky pre hľadané body. Pokús sa okomentovať nasledujúci obrázok.



Ž: *Červenou farbou sme vyznačili zadané prvky, teda kružnicu k so stredom v bode S a bod M vo vzdialenosti 5 centimetrov od stredu kružnice. Tieto útvary teda považujeme za* **známe**. *Našou úlohou je zostrojiť dotyčnicu t. Tá je určená dvoma bodmi, zadaným bodom M a* **dotykovým bodom** *T. Dotyčnicu teda zostrojím, ak určím bod T.*

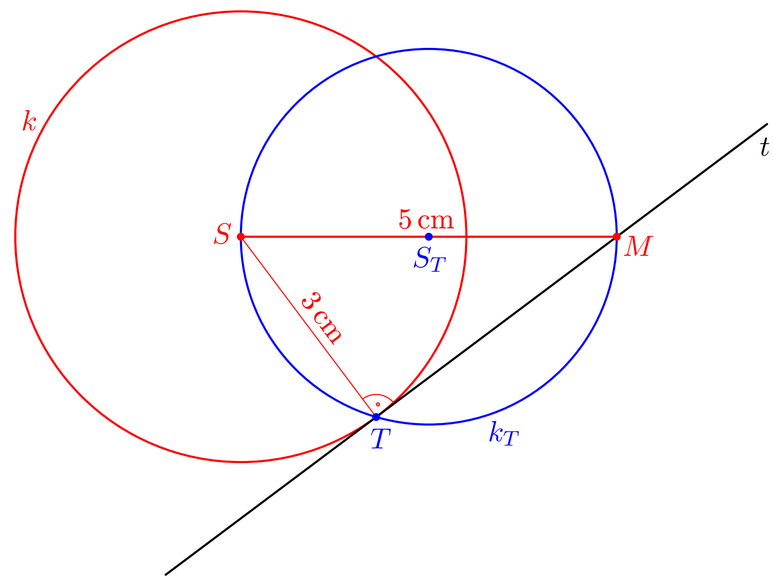
U: Dotykový bod T považujeme v tejto úlohe za hľadaný bod. Na jeho určenie potrebujeme využiť dve podmienky.

Ž: *Jedna podmienka je triviálna. Keďže je to dotykový bod, tak bod T* **leží na kružnici** *k.*

U: V poriadku. Toto bolo jednoduché. Čo využiješ ako druhú podmienku?

Ž: *Asi by som mal využiť pravý uhol pri vrchole T. Viem, že polomer ST je na dotyčnicu t kolmý. Ale ako to využijem, to vôbec netuším.*

U: Máš pravdu, že bod T je vrcholom pravého uhla, lebo $|\sphericalangle STM| = 90°$. Vrcholy pravých uhlov ležia na ***Thalesovej kružnici***. Jej priemerom bude v našom prípade úsečka SM.



Ž: *Jasné! Ako som mohol na to zabudnúť. Stred úsečky SM bude stredom tejto Thalesovej kružnice. To ale znamená, že dotykový bod T nájdem ako priesečník danej kružnice k a Thalesovej kružnice k_T.*

U: Presne tak. Zápis podmienok pomocou matematickej symboliky si môžeš pozrieť v nasledujúcej tabuľke.

1. $T \in k;\ k(S;\ 3\ \text{cm})$
2. $|\sphericalangle STM| = 90° \Rightarrow T \in k_T;\ k_T(S_T;\ 2{,}5\ \text{cm}),\ S_T = S \div M$

$T \in k \cap k_T$

Ž: *Úlohu máme teda vyriešenú. Stačí spojiť body T a M priamkou a získame takto dotyčnicu t.*

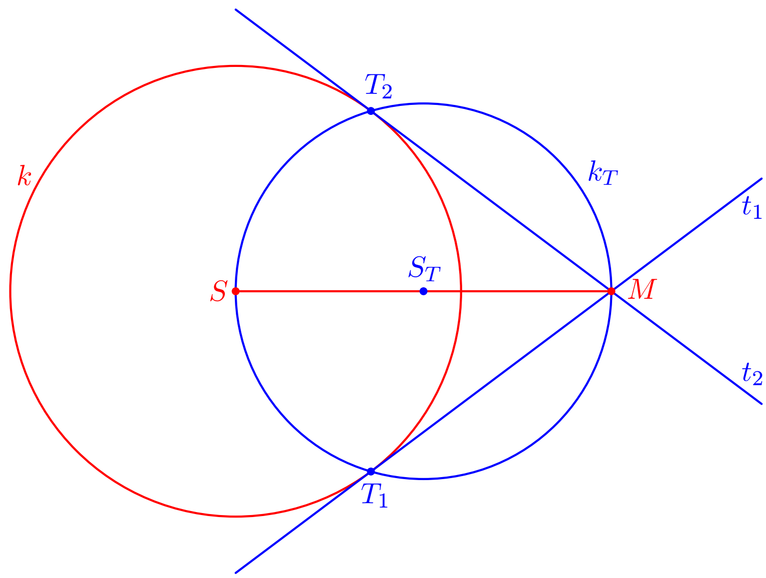
U: Dokončili sme zatiaľ iba rozbor konštrukčnej úlohy. Nasleduje jej druhá fáza, ktorou je konštrukcia. Najskôr urobíme ***zápis konštrukcie***. Sformuluj ho slovne a potom ho zapíšeme symbolikou.

Ž: *Nie je nič jednoduchšie. Stačí mi vlastne zopakovať myšlienky z rozboru. Najskôr, podľa podmienok zadania úlohy, narysujem kružnicu k a bod M. Potom zostrojím Thalesovu kružnicu. Jej stredom bude stred úsečky SM a polomer bude rovný* 2,5 cm. *Priesečník danej kružnice k a Thalesovej kružnice k_T označím ako bod T. Priamka TM bude dotyčnicou ku kružnici k prechádzajúcou bodom M.*

U: Môžem ťa iba pochváliť.

1. $k(S;\ 3\ \text{cm});\ M,\ |SM| = 5\ \text{cm}$
2. $k_T;\ k_T(S \div M;\ 2{,}5\ \text{cm})$
3. $T;\ T \in k \cap k_T$
4. $t;\ t = \overleftrightarrow{TM}$

Ž: *Vlastnú konštrukciu si môžete pozrieť na nasledujúcom obrázku.*



U: Z obrázka vyplýva, že v tomto prípade má úloha ***dve riešenia***. Aj keď táto úloha nie je parametrická, zovšeobecnime ju. Nech parameter r označuje polomer kružnice k a $|SM|$ vzdialenosť bodov S a M. Vieš povedať, v akom vzťahu musia byť tieto parametre, aby úloha mala vždy ***dve riešenia***?

Ž: *Mám dojem, že by sa to malo podobať na zadaný prípad. Teda bod M musí byť vonkajším bodom kružnice. Pre parametre r a $|SM|$ vtedy platí:*

$$r < |SM|.$$

U: Ide ti to celkom dobre. Mohla by mať úloha ***jedno riešenie***?

Ž: *Jednu dotyčnicu zostrojím, ak bod M bude patriť kružnici k. Bude totiž zároveň dotykovým bodom T. V tomto prípade platí:*

$$r = |SM|.$$

U: Ak by bod M bol vnútorným bodom kružnice, teda

$$r > |SM|,$$

nedostali by sme ***žiadnu dotyčnicu***.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ r < |SM| \ \Rightarrow\ 2 \text{ riešenia} \\ 2.\ r = |SM| \ \Rightarrow\ 1 \text{ riešenie} \\ 3.\ r > |SM| \ \Rightarrow\ 0 \text{ riešení} \end{array}}$$

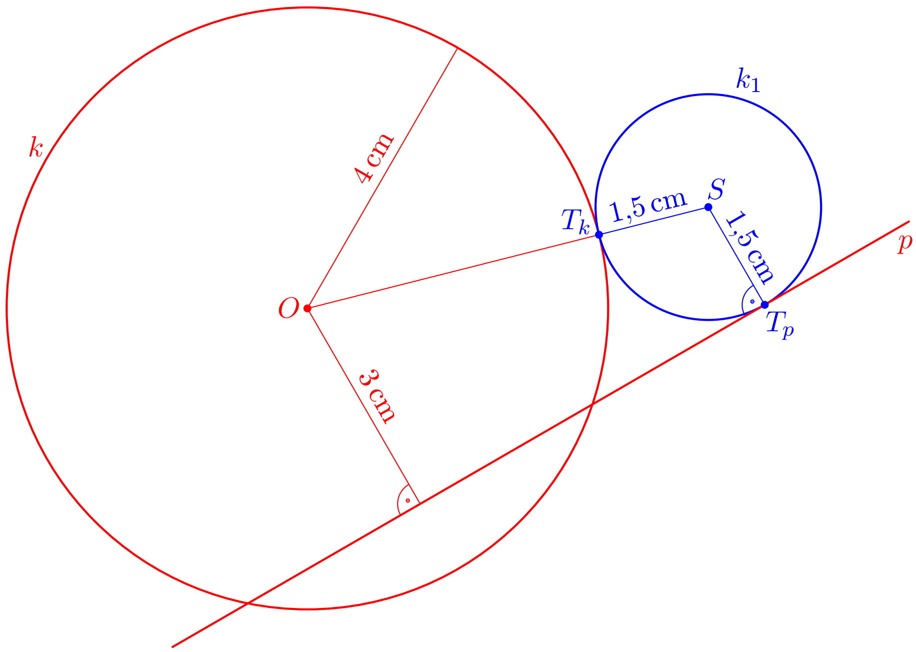
U: Ukážeme ešte, že naša konštrukcia je správna. Sú narysované priamky t_1 a t_2 dotyčnicami ku kružnici, ktoré prechádzajú daným bodom M?

Ž: *Bodom M prechádzajú určite. Vyplýva to zo 4. kroku konštrukcie.*

U: Dotykový bod T podľa 3. kroku konštrukcie patrí tak kružnici k, ako aj Thalesovej kružnici. To ale znamená, že uhol STM je pravý. Z toho vyplýva, že polomer ST kružnice k je na priamku TM kolmý. Takéto vlastnosti má však iba priamka, ktorá je dotyčnicou ku kružnici. Týmto sme teda zvládli aj poslednú fázu konštrukčnej úlohy, ktorou je dôkaz správnosti konštrukcie.

Príklad 2: *Zostrojte všetky kružnice s polomerom* 1,5 cm*, ktoré sa dotýkajú danej kružnice* $k(O;\ 4\ \text{cm})$ *a priamky* p*, pre ktorú platí* $|O;p| = 3$ cm*.*

U: Urobme náčrt, v ktorom zadané útvary vyznačíme červenou farbou. Načrtneme aj jednu kružnicu k_1 s polomerom 1,5 cm, ktorá sa dotýka danej kružnice a priamky. Čo platí pre stred S kružnice k_1 vo vzťahu k stredu O danej kružnice k a vo vzťahu k danej priamke p?



Ž: *Vzdialenosť bodov* S *a* O *je určená* **súčtom polomerov** *kružníc* k *a* k_1*. Táto vzdialenosť je preto* 5,5 cm*. Keďže kružnica* k_1 *sa dotýka priamky* p*, vzdialenosť jej stredu* S *od priamky* p *je daná polomerom* 1,5 cm *kružnice* k_1*.*

U: Vzdialenosti, ktoré si určil, využijeme na popis množín bodov danej vlastnosti, prienikom ktorých bude stred hľadanej kružnice k_1. Povedal si, že stred kružnice, ktorá je riešením úlohy, má od bodu O vzdialenosť 5,5 cm. Kde ležia stredy všetkých kružníc s polomerom 1,5 cm, ktoré sa dotýkajú danej kružnice k zvonku?

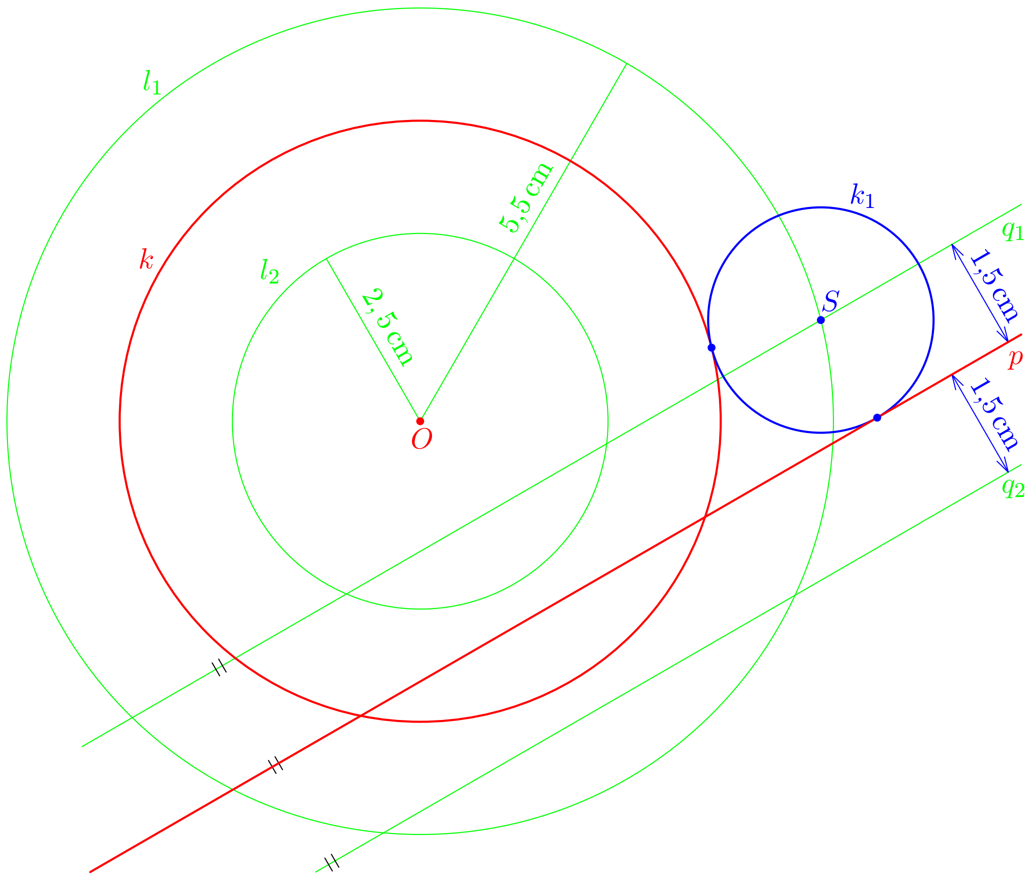
Ž: *Musia mať rovnakú vzdialenosť od bodu* O*, preto ležia na kružnici* l_1 *so stredom v bode* O *a polomerom* 5,5 cm*.*

U: Hľadaná kružnica by sa však mohla danej kružnice dotýkať aj zvnútra.

Ž: *Aha! Vtedy bude polomer* **rozdielom** *polomerov uvažovaných kružníc, teda* 2,5 cm*.*

U: Množinou ***stredov všetkých kružníc*** s polomerom 1,5 cm, ktoré sa dotýkajú danej kružnice k je teda zjednotenie dvoch sústredných kružníc so stredom v bode O. Ich polomery sú 5,5 cm a 2,5 cm. Také isté úvahy by sme mali urobiť o stredoch hľadaných kružníc vo vzťahu k danej priamke.

Ž: *Teraz by to mali byť* **dve priamky** q_1 **a** q_2 **vo vzdialenosti** 1,5 cm **od priamky** p*. Sú teda s priamkou* p *rovnobežné.*



U: Správne. Stredy hľadaných kružníc nájdeme teda ako priesečníky kružníc l_1 a l_2 s priamkami q_1 a q_2.

Ž: *To ale dostaneme veľa riešení.*

U: Nepredbiehaj vlastnej konštrukcii. To, koľko riešení dostaneme, zistíme až pri rysovaní. Zatiaľ sme zvládli iba rozbor konštrukčnej úlohy. V rozbore máme vždy ukázať, ako nájsť riešenie úlohy, ak existuje. Za ***známe prvky*** v tejto úlohe preto považujeme kružnicu k a priamku p. ***Hľadaným bodom*** je stred S kružnice k_1 s polomerom 1,5 cm, ktorá sa má dotýkať danej kružnice a priamky. Podmienky pre hľadaný bod S sú zapísané ešte raz v nasledujúcom rámčeku.

1. $|OS| = 5{,}5$ cm $\vee$ $|OS| = 2{,}5$ cm $\Rightarrow$ $S \in l_1 \vee S \in l_2$,
   $l_1(O;\ 5{,}5\text{cm}),\ l_2(O;\ 2{,}5\text{ cm})$

2. $|S,p| = 1{,}5$ cm $\Rightarrow$ $S \in q_1 \vee S \in q_2$,
   $|q_1,p| = 1{,}5$ cm, $|q_2,p| = 1{,}5$ cm

$S \in (l_1 \cup l_2) \cap (q_1 \cup q_2)$

U: Dobre. Rozbor sme v podstate zvládli. Našli sme stred kružnice vyhovujúcej zadaniu úlohy. Zaujímalo by ma, ako zostrojíš kružnicu.

Ž: *Ale, veď to nie je ťažké. Kružnica má mať polomer* 1,5 *centimetra. Zoberiem túto vzdialenosť do kružidla, kružidlo zapichnem do nájdeného stredu S kružnice a opíšem kružnicu.*

U: Ako nájdeš body, v ktorých sa tvoja kružnica dotýka danej kružnice a priamky?

Ž: *Aha! Trochu porozmýšľam … Ja na to prídem … Už to mám. Dotykový bod kružníc leží na spojnici stredov týchto kružníc. Spojím teda body O a S a bod, v ktorom táto úsečka pretína kružnice, bude ich dotykový bod.*

U: Presne tak. Dotykový bod nájdenej kružnice a danej priamky získaš ako pätu kolmice z bodu S na priamku p.

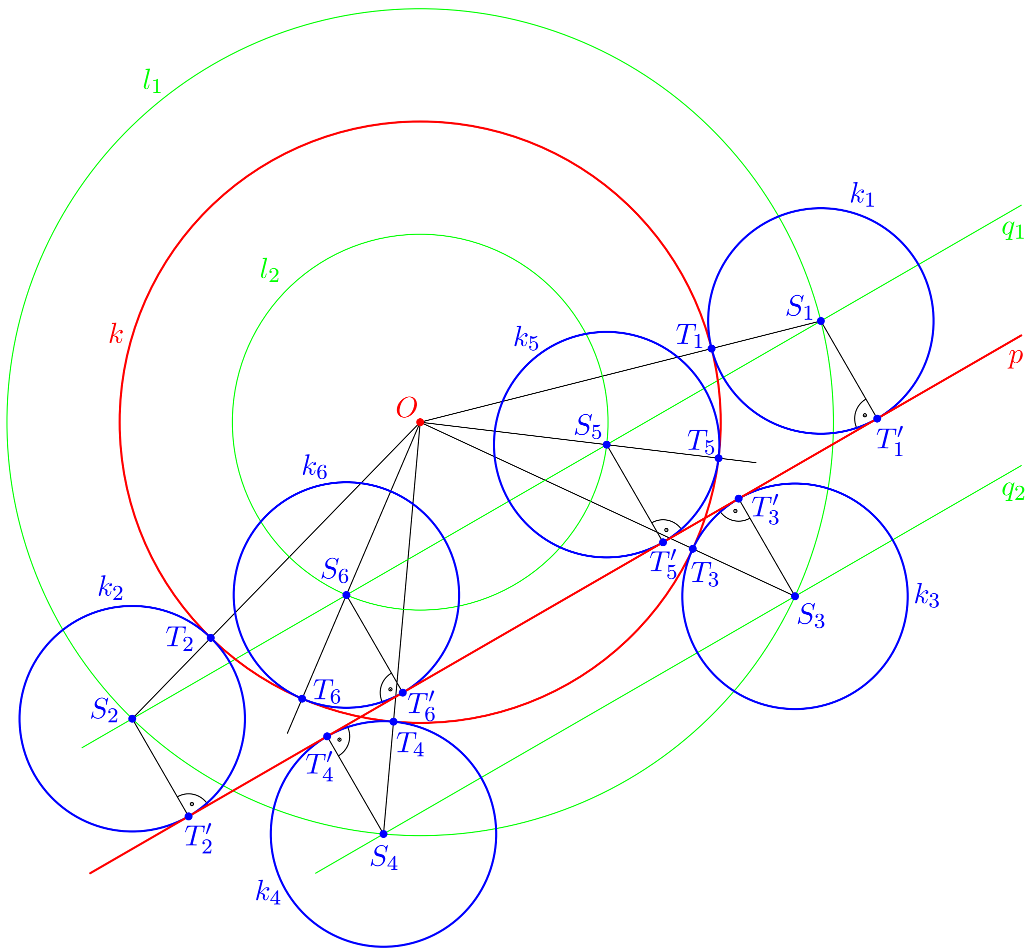
Ž: *Treba to pri rysovaní urobiť?*

U: Nemusíš. Veď pri opise konštrukcie kružnice k_1 si mal aj ty pravdu. Zhrnieme preto myšlienky rozboru do zápisu konštrukcie. V podstate by sme sa opakovali, preto naše úvahy skrátim. Pozri si postup konštrukcie zapísaný pomocou matematickej symboliky. Je uvedený v nasledujúcom rámčeku.

1. $k;\ k(O;\ 4\text{ cm})$
2. $p;\ |O,p| = 3\text{ cm}$
3. $l_1,\ l_2;\ l_1(O;\ 5{,}5\text{cm}),\ l_2(O;\ 2{,}5\text{ cm})$
4. $q_1,\ q_2;\ |q_1,p| = 1{,}5\text{ cm},\ |q_2,p| = 1{,}5\text{ cm}$
5. $S;\ S \in (l_1 \cup l_2) \cap (q_1 \cup q_2)$
6. $k_1;\ k_1(S;\ 1{,}5\text{ cm})$

Ž: *Skúsim to narysovať. Trochu strácam prehľad v počte riešení. To mám zobrať všetky priesečníky kružníc l_1 a l_2 s priamkami q_1 a q_2?*

U: Áno. Pozri sa na svoj obrázok ešte raz. Ktoré kružnice pretína priamka q_1?



Ž: *Priamka* q_1 *pretína kružnicu* l_1 *v bodoch* S_1 *a* S_2*. Aj s kružnicou* l_2 *má táto priamka dva spoločné body.*

U: Ale priamka q_2 pretína iba kružnicu l_1 a to v dvoch bodoch.

Ž: *To znamená, že úlohe vyhovuje* **šesť rôznych kružníc** *požadovaných vlastností?*

U: Presne tak, ako hovoríš. Tieto kružnice sú vyznačené na poslednom obrázku modrou farbou.

Príklad 3: *Daný je pravý uhol AVB a jeho vnútorný bod M. Zostrojte všetky kružnice prechádzajúce bodom M, ktoré sa dotýkajú ramien uhla AVB.*

U: Môžem si bod M zvoliť na osi daného pravého uhla?

U: Vyhovuje to podmienkam zadania?

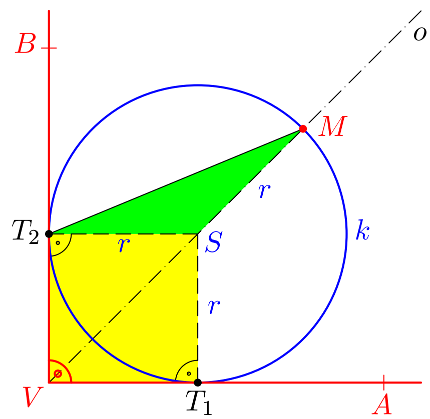
Ž: *Myslím si, že áno.*

U: Tak to vyskúšaj. Kde leží stred kružnice, ktorá sa dotýka ramien pravého uhla AVB?

Ž: *Stred takejto kružnice leží na* **osi o tohto uhla**.

U: Využi preto tento poznatok pre svoj náčrt. Urob ho od konca. Načrtni uhol, potom ľubovoľnú kružnicu, ktorá sa dotýka ramien tohto uhla. Jeden priesečník tejto kružnice s osou uhla označ ako bod M.

Ž: *Dobre, všetko toto som urobil. Čo teraz?*



U: Pozrieme sa na obrázok od zadania úlohy. Dané sú ramená uhla AVB a bod M na osi tohto uhla. Hľadaným bodom je stred S kružnice k. Čo vieme o ňom povedať?

Ž: *Ja viem akurát to, že leží na osi o daného pravého uhla. Ale takých bodov je strašne veľa. Ako sa trafím do toho správneho, aby kružnica prechádzala aj bodom M?*

U: Pomôžeme si trochu uhlami. Čo vieš povedať o trojuholníku T_2SM?

Ž: *Keďže bod T_2 je dotykový, úsečky T_2S a SM majú rovnakú veľkosť. Sú to vlastne polomery hľadanej kružnice. Preto je trojuholník T_2SM* **rovnoramenný**.

U: A vedel by si určiť uhly v tomto trojuholníku?

Ž: *Nóóó ... Veď nepoznám ani jeden.*

U: S určením veľkosti jedného uhla ti pomôžem. Sleduj na obrázku. Štvoruholník VT_1ST_2 je štvorec, lebo úsečky T_1S a T_2S sú rovnako dlhé. Určujú polomer kružnice. Navyše body T_1 a T_2 sú bodmi dotyku kružnice s ramenami pravého uhla. Teda pri týchto vrcholoch sú v uvažovanom štvoruholníku pravé uhly. Úsečka VS je uhlopriečkou tohto štvorca, preto má ***uhol*** VST_2 veľkosť 45 ***stupňov***.

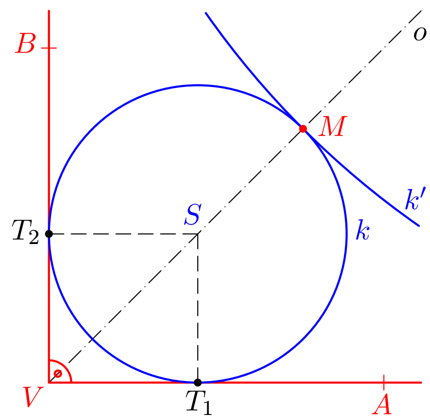
Ž: *Už mi dochádza. Uhol T_2SM je s ním* **susedný**, *preto má veľkosť 135* **stupňov**. *Úsečka T_2M je základňou uvažovaného rovnoramenného trojuholníka. Uhly pri základni majú preto dokopy veľkosť 45 stupňov a* **uhol T_2MS** *má veľkosť 22,5* **stupňa**. *Ako mi to pomôže?*

U: Ak zostrojíš uhol VMX veľkosti 22,5 stupňa, tak jeho rameno $\overrightarrow{MX}$ pretne polpriamku VB v bode T_2. Stred kružnice by si už mal vedieť zostrojiť.

Ž: *Jasné! Úsečka VT_2 tiež predstavuje polomer hľadanej kružnice. Preto ho nanesiem od bodu T_2 a na osi o získam stred kružnice S.*

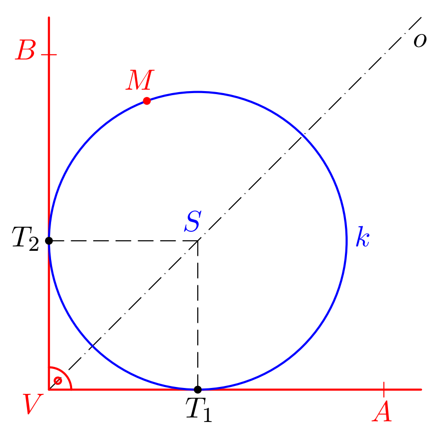
U: No, nebolo to celkom správne vyjadrenie, ale pointe som porozumel. Čo je horšie, úloha má ešte jedno riešenie.

Ž: *Myslíte na takú veľkú kružnicu z druhej strany?*



U: Objaviť spôsob jej zostrojenia ti prenechávam na samostatnú prácu.

U: Budeme sa teraz venovať všeobecnejšej polohe bodu M. Tak ako to je na obrázku.



U: Mnohé z úloh, podobných našej, sa riešia tak, že pre hľadanú kružnicu splníme najskôr iba časť podmienok zo zadania úlohy. Určite by si vedel zostrojiť ľubovoľnú kružnicu, ktorá by sa dotýkala ramien daného pravého uhla.

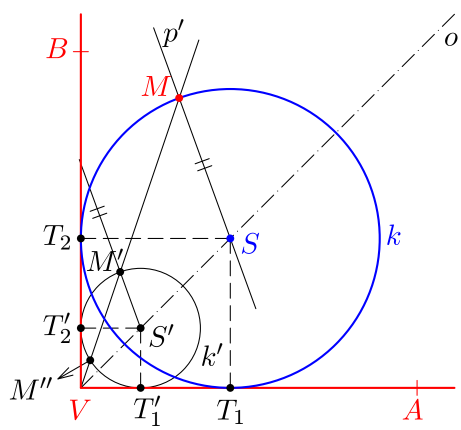
Ž: *Jej stred by musel ležať na osi o tohto uhla. Preto by som si zvolil na tejto osi ľubovoľný bod S', tak ako je to na obrázku. Z tohto bodu by som zostrojil kolmicu na jedno rameno pravého uhla. Vzdialenosť päty tejto kolmice od bodu S' určuje polomer kružnice, ktorá sa dotýka ramien pravého uhla.*

U: Potrebujeme teraz nájsť súvis medzi zostrojenou kružnicou k' a kružnicou k, ktorú hľadáme. Tušíš, čo to bude?

Ž: *Tak v tom mi budete musieť poradiť.*

U: Každé dve kružnice sú istým spôsobom ***rovnoľahlé***. To isté platí aj o našich dvoch kružniciach k' a k.

Ž: *Čo to znamená, že sú rovnoľahlé?*



U: Rovnoľahlosť je jedno z ***podobných zobrazení***. Zachováva vždy ***pomer dĺžok úsečiek***. Rovnoľahlosť je určená stredom a koeficientom rovnoľahlosti. V našom prípade je stredom rovnoľahlosti vrchol V pravého uhla a podiel polomerov kružníc k a k' určuje koeficient rovnoľahlosti.

Ž: *Už si spomínam. V tejto rovnoľahlosti sa stred S' kružnice k' zobrazí do stredu S hľadanej kružnice k. Tieto body ležia na jednej polpriamke ohraničenej stredom rovnoľahlosti V.*

U: Máš pravdu. V tej istej rovnoľahlosti sa však zobrazia na seba aj zodpovedajúce si dotykové body týchto kružníc. To čo je však pre nás najdôležitejšie, je poznatok, že bod M kružnice k musí mať tiež svoj vzor na kružnici k'. Ako by si ho určil?

Ž: *Keďže stred rovnoľahlosti, vzor a obraz musia ležať na jednej priamke, zostrojím priamku VM. Priesečník tejto priamky s kružnicou k' bude bod M', ktorý je vzorom bodu M. Ale veď takéto body dostanem až dva.*

U: Správne. Úloha bude mať preto ***dve riešenia***. Ako ich však nájdeme? Zatiaľ sme zostrojili bod M' na kružnici k'. Ako zostrojíš stred S hľadanej kružnice?

Ž: *To vôbec netuším.*

U: Pripomeniem ti, že rovnoľahlosť zobrazí úsečku, ktorá neleží na priamke prechádzajúcej stredom rovnoľahlosti, na úsečku s ňou rovnobežnú. To znamená, že úsečka $M'S'$ sa zobrazí na úsečku MS s ňou ***rovnobežnú***.

Ž: *Aha, už rozumiem. Bodom M musím zostrojiť priamku p rovnobežnú s priamkou $M'S'$.* **Priesečník** *tejto priamky s osou o pravého uhla bude stred S kružnice k. Uff ... Dosť náročná úloha.*

U: Potrebuješ si len zopakovať základné vlastnosti rovnoľahlosti. Všetko ostatné je už potom jednoduché. Ak si porozumel myšlienkam v rozbore úlohy, čo najjednoduchšie slovne sformuluj všetky kroky konštrukcie.

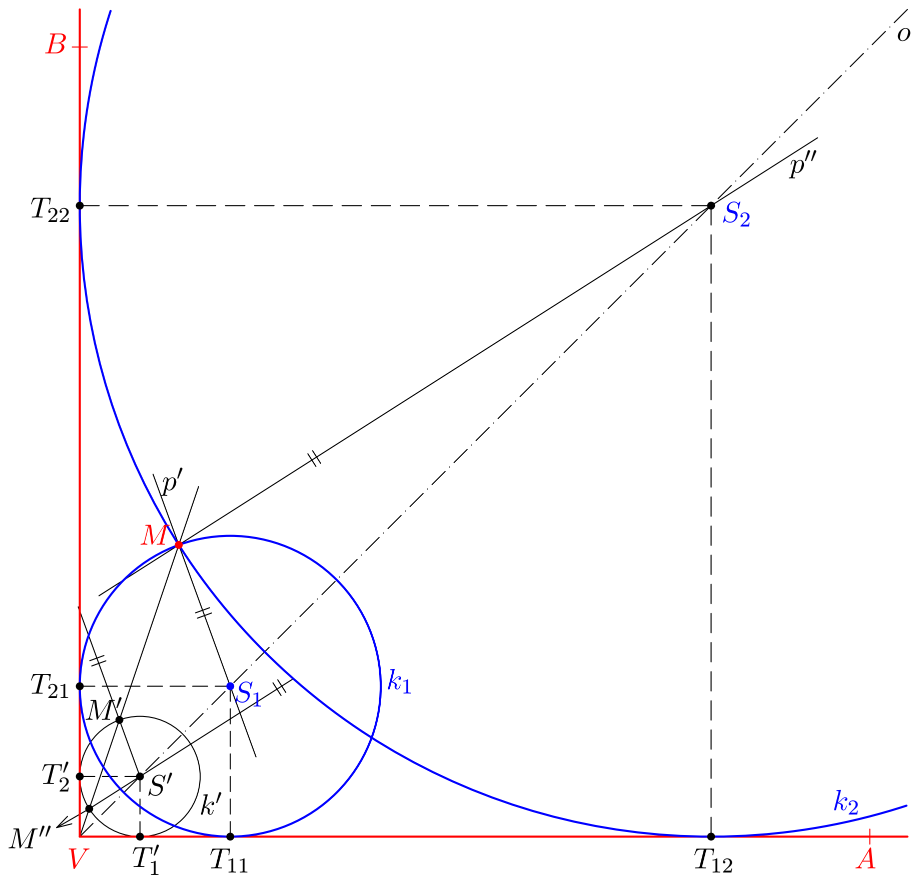
Ž: *Najskôr si narysujem to, čo je zadané, teda pravý uhol AVB a jeho vnútorný bod M. Zostrojím si os o tohto uhla, zvolím si na nej bod S' a zostrojím kružnicu k' so stredom v bode S', ktorá sa bude dotýkať ramien pravého uhla. Priesečník priamky VM s kružnicou k' označím ako bod M'. Nakoniec bodom M vediem priamku p rovnobežne s priamkou $M'S'$. Jej priesečník s osou o uhla bude hľadaný stred S kružnice.*

U: No dobre, ale nemáš ešte kružnicu k.

Ž: *Tak toto je už malina. Stredom tejto kružnice je predsa bod S a úsečka SM predstavuje jej polomer. Môžem vám tento postup zapísať aj pomocou symbolov. Máte ho uvedený v nasledujúcej tabuľke.*

1. $\sphericalangle AVB;\ |\sphericalangle AVB| = 90^\circ$
2. $M;\ M \in \sphericalangle AVB, M \notin \overrightarrow{VA},\ M \notin \overrightarrow{VB}$
3. $k';\ k'(S';\ r'),\ S' \in o,\ o \equiv o_{\sphericalangle AVB}$
4. $M';\ M' \in k' \cap \overleftrightarrow{VM}$
5. $p';\ p' \parallel \overleftrightarrow{M'S'},\ M \in p'$
6. $S;\ S \in p' \cap o$
7. $k;\ k(S;\ |SM|)$

U: Neviem či si uvedomuješ, ale aj prípad, kedy bod M leží na osi pravého uhla, možno riešiť tým istým postupom. Musíš však využiť úsečku spájajúcu dotykový bod a bod M. Na nasledujúcom obrázku máš narysované obe kružnice, ktoré majú vlastnosti podľa zadania úlohy.

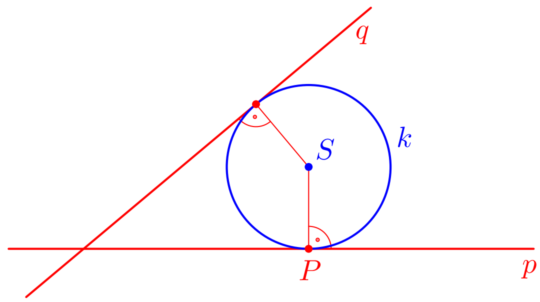


B
o
p''
T22
S2
p'
M
T21
S1
k1
M'
T'2
S'
k'
k2
M''
V
T'1
T11
T12
A

Príklad 4: *Dané sú dve rôznobežné priamky p, q a bod P na priamke p. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky p v bode P a dotýkajú sa zároveň priamky q.*

U: Máš predstavu, ako bude vyzerať obrázok? Čo potrebujeme k tomu, aby sme zostrojili aspoň jednu kružnicu podľa podmienok zadania?

Ž: *Pokúsim sa jednu takúto kružnicu načrtnúť.*



Ž: *Zdá sa mi, že stačí nájsť akurát stred tejto kružnice.*

U: Každá kružnica je jednoznačne určená nielen svojím stredom, ale aj polomerom.

Ž: *Tak toto je veľmi jednoduché. Kružnica sa má predsa dotýkať priamky p v bode P. Ak budem mať stred S kružnice, jej* **polomer** *bude určený* **dĺžkou úsečky** SP.

U: V poriadku. Určme teda podmienky pre ***neznámy bod*** S, ktorý je stredom hľadanej kružnice k. Čo by si zo zadania úlohy využil?

Ž: *Viem, že kružnica sa má dotýkať oboch zadaných priamok. V mojom obrázku ide o kružnicu vpísanú do jedného uhla, ktorý vytvárajú zadané priamky. Stred takej kružnice bude preto ležať na* **osi tohto uhla**.

U: Máš pravdu. Vzdialenosť stredu hľadanej kružnice musí byť od oboch ramien uhla rovnaká. Preto stred S leží na osi tohto uhla. Zabudol si však, že priamky vytvárajú až štyri uhly. Možno aj v niektorom inom z týchto uhlov bude riešenie. Preto zostrojíme zjednotenie ***osí*** všetkých uhlov vytvorených danými priamkami.

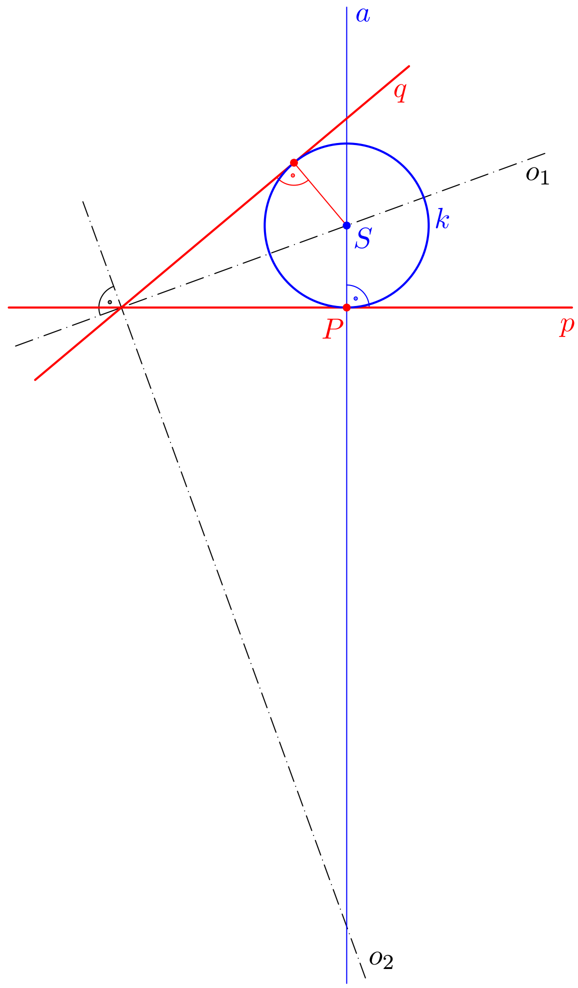
Ž: *Na to som nepomyslel. Sústredil som sa iba na jedinú kružnicu, ktorú som si načrtol.*

U: To je v poriadku. Množiny, využité pre určenie jedného riešenia v ***rozbore*** úlohy, sa snaž zovšeobecniť. Poďme však v riešení ďalej. Podľa zadania sa má kružnica dotýkať priamky p v danom bode P. Ako to dosiahneme?

Ž: *Tak to teda netuším.*

U: Spomeň si na vzťah medzi polomerom SP a priamkou p. Kružnica sa predsa dotýka priamky p v bode P.

Ž: *Mám využiť, že úsečka spájajúca stred kružnice a dotykový bod je kolmá na dotyčnicu?*



U: Presne tak. Keďže polomer SP je kolmý na priamku p, stred kružnice leží na ***kolmici*** a ***na priamku*** p***, ktorá prechádza bodom*** P. Všetky kružnice dotýkajúce sa priamky p v bode P musia mať stred na priamke a.

Ž: *Aha! Aké jednoduché. To ale znamená, že stred kružnice, ktorá má všetky požiadavky zo zadania úlohy, zostrojím ako* **priesečník** *priamky* a *a osí uhlov tvorených danými priamkami* p *a* q.

U: Zrekapituluj teda stručne základné myšlienky rozboru.

Ž: **Známymi útvarmi** *sú rôznobežné priamky* p, q *a bod* P *na priamke* p. **Hľadanými útvarmi** *sú stred* S *kružnice a samotná kružnica* k. *Podmienky pre hľadaný bod* S *sú uvedené v rámčeku.*

1. $|S,p| = |S,q| \ \Rightarrow\ S \in o_1 \cup o_2;$
   $o_1 \cup o_2 = \{X \in E_2;\ |X,p| = |X,q|\}$
2. $SP \perp p \ \Rightarrow\ S \in a,\ a \perp p \wedge P \in a$

$S \in (o_1 \cup o_2) \cap a$

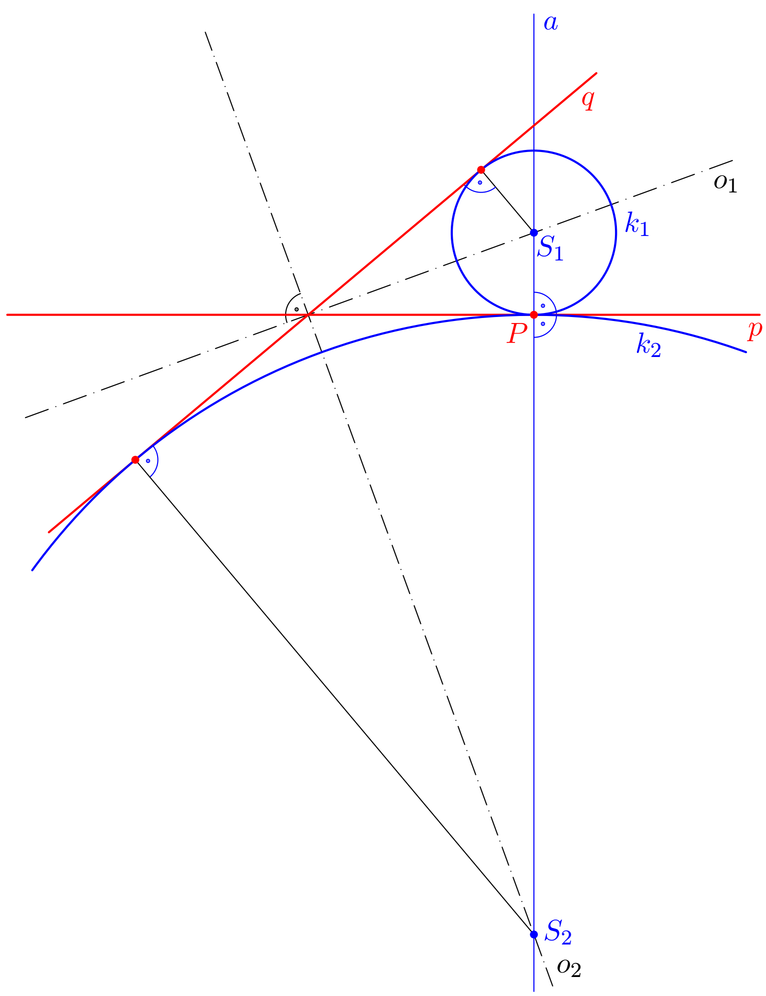
U: Nasleduje konštrukcia ako druhá fáza konštrukčnej úlohy. Sformuluj slovne jej postup.

Ž: *Najskôr narysujem dve rôznobežné priamky p a p. Na priamke p si zvolím jeden bod. Označím ho symbolom P. To je vlastne všetko v zadaní úlohy. Teraz zostrojím osi uhlov tvorených danými priamkami a priamku a kolmú na danú priamku p. Priamka a bude púrechádzať bodom P. Stred hľadanej kružnice získam ako priesečník priamky a a osí uhlov. Nakoniec zostrojím kružnicu.*

U: Ja len pripomeniem, že polomerom tejto kružnice bude úsečka SP. V rámčeku je uvedený zápis konštrukcie pomocou matematickej symboliky.

1. $p, q;\ p\ X\ q$
2. $P;\ P\ \in\ p$
3. $o_1\ \cup\ o_2;\ o_1\ \cup\ o_2 = \{X\ \in E_2;\ |X,p| = |X,q|\}$
4. $a;\ a \perp p\ \wedge\ P\ \in\ a$
5. $S;\ S\ \in\ a\ \cap\ (o_1\ \cup\ o_2)$
6. $k;\ k(S;\ |SP|)$

U: Na nasledujúcom obrázku máš možnosť pozrieť si výsledok riešenia úlohy pre jednu polohu priamok p, q a bodu P podľa zadania úlohy.



Ž: *To ale znamená, že úloha má stále* **dve riešenia**. *Nič by sa nestalo, keby som bod P posúval po priamke p. Vznikli by len väčšie alebo menšie kružnice. Ale vždy by boli dve.*

U: Nemáš celkom pravdu. V jednom prípade by si nezískal ***žiadne riešenie***. Platilo by to vtedy, kedy by bod P bol priesečníkom daných priamok p a q.

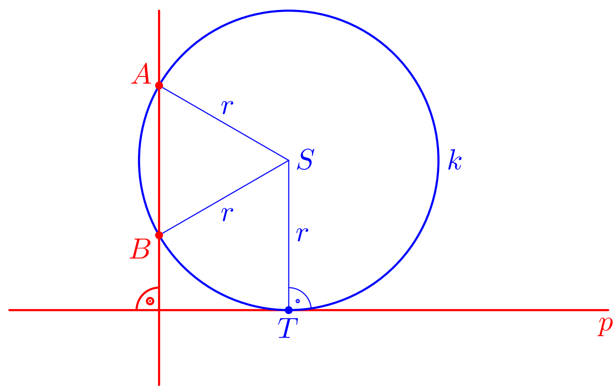
Ž: *Rozumiem. Vtedy sa nedá zostrojiť kružnica vpísaná do uhla.*

Príklad 5: *Daná je priamka p a dva rôzne body A, B v tej istej polrovine s hraničnou priamkou p, pričom priamka AB je kolmá na priamku p. Zostrojte všetky kružnice, ktoré prechádzajú bodmi A, B a dotýkajú sa priamky p.*

Ž: *Ako mám urobiť náčrt?*

U: Náčrt sa snaž vo väčšine konštrukčných úloh robiť od výsledku. Načrtni najskôr kružnicu, ktorá má byť riešením a potom vyznač priamku p a body A, B. Zohľadni pritom podmienky zadania úlohy.

Ž: *Keďže priamka p má byť dotyčnicou ku kružnici k, tak úsečka ST je na túto priamku kolmá. Písmeno T označuje dotykový bod. Vyznačím si ešte body A a B na kružnici k. Priamka AB musí byť pritom kolmá na danú priamku p.*



U: Je zrejmé, že priamka p a body A, B sú ***známe útvary***. ***Hľadaným útvarom*** je kružnica k so stredom v bode S.

Ž: *Ale nepoznám ani polomer kružnice.*

U: To je pravda, ale nám stačí nájsť iba stred S kružnice. Polomer bude potom určený napríklad úsečkou SA.

Ž: *Ako chcete nájsť stred kružnice bez využitia polomeru?*

U: Vidím, že uvažuješ správnym smerom. Áno, polomer budeme musieť určitým spôsobom k zostrojeniu stredu kružnice využiť. Nie je však podstatná jeho číselná hodnota, ale umiestnenie polomeru ako úsečky.

Ž: *Tak ako je to na obrázku v prípade úsečiek AS a BS?*

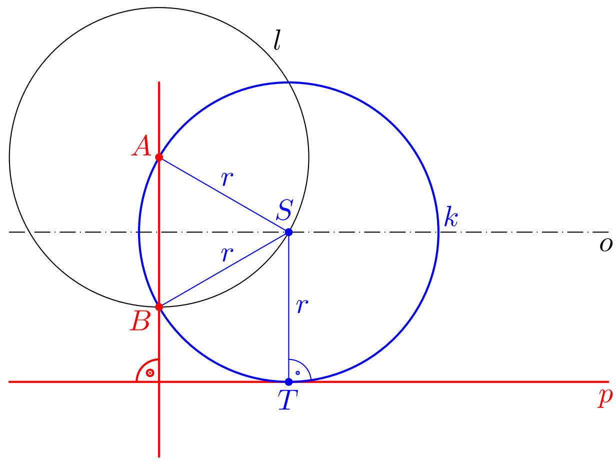
U: Áno, tieto úsečky sú tiež umiestnením polomeru kružnice. ***Polomerom je však aj úsečka ST***, kde T je dotykový bod.

Ž: *Dobre, ale ani jeden z bodov S a T nepoznáme. … Počkajte! Už mi dochádza. Keby som vedel dĺžku tejto úsečky, tak bod S by musel ležať na* **kružnici l so stredom v bode A a polomerom ST**. *To preto, lebo platí $|AS| = |ST|$.*

U: Výborne! Máme jednu množinu bodov danej vlastnosti, ktorá obsahuje hľadaný stred kružnice. Nevieme síce zatiaľ polomer kružnice l, ale keď určíme druhý útvar, ktorý hľadaný stred kružnice obsahuje, určíme aj polomer kružnice l. Skús teraz využiť to, že kružnica k má prechádzať danými bodmi A a B.

Ž: *Mám dojem, že mi v tomto smere budete musieť poradiť.*

U: Body A a B patria kružnici k. Úsečka AB je teda ***tetivou*** tejto kružnice. Vieme, že ***os tetivy kružnice*** prechádza stredom kružnice. Stred S hľadanej kružnice leží preto na ***osi*** o ***úsečky*** AB.



Ž: *Jasné. Až teraz som si uvedomil, že trojuholník ABS je rovnoramenný, lebo úsečky AS a BS majú rovnakú veľkosť. Sú to polomery kružnice k. Bod S preto leží na osi o úsečky AB.*

U: To, čo si povedal, je iba iným zdôvodnením vlastnosti osi tetivy. Má priamka o v našom prípade nejakú dobrú vlastnosť?

Ž: *Úsečka AB je kolmá na danú priamku p, preto je os o s priamkou p* **rovnobežná**. *... Aha! Tak, to potom mám aj polomer ST pre kružnicu l, ktorú sme využili ako prvú. Polomerom je vzdialenosť priamok p a o.*

U: Zhrniem teda základné myšlienky rozboru úlohy. Stred S hľadanej kružnice k zostrojíme ako priesečník osi o úsečky AB a kružnice l so stredom v bode A. Polomerom tejto kružnice je vzdialenosť priamok p a o.

1. $|AS| = |BS| \;\Rightarrow\; S \in o,\; o = o_{AB}$
2. $|AS| = |ST| = |S,p| = |o,p| \;\Rightarrow\; S \in l(A;\ |o,p|)$

$S \in o \cap l$

U: Postup konštrukcie by si mal zvládnuť aj sám.

Ž: *Najskôr zostrojím to, čo je zadané: priamku p a dva rôzne body A, B. Potom zostrojím os o úsečky AB. Zostrojím si pomocnú kolmicu na priamky p a o, kde nameriam ich vzdialenosť. Vzdialenosť priamok p a o bude polomerom kružnice l so stredom v bode A. Priesečník priamky o s kružnicou l mi dá hľadaný stred S kružnice k.*

1. $p, A, B;\ AB \perp p$
2. $o;\ o = o_{AB}$
3. $l;\ l(A;\ |o, p|)$
4. $S;\ S \in o \cap l$
5. $k;\ k(S;\ |SA|)$

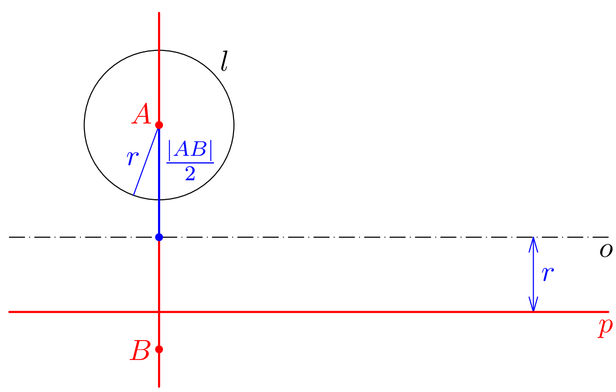
U: Čo myslíš, koľko riešení má úloha?

Ž: *Podľa podmienok zadania úlohy existuje asi jedna takáto kružnica. Nebudeme rysovať?*

U: Nie. Úloha je parametrická. Nie je daná ***vzdialenosť bodov** A **a** B*, ani ***ich vzdialenosť od danej priamky** p*. A práve od týchto parametrov závisí počet riešení. Urobíme teda diskusiu o počte riešení. Začnime prípadom, keď úloha ***nemá riešenie***. Kedy to pri rysovaní podľa nášho postupu nastane?

Ž: *Nesmieme dostať stred hľadanej kružnice. Vzhľadom na to, že ho získame ako priesečník osi úsečky AB a kružnice l so stredom v bode A a polomerom $|o, p|$, nesmú sa tieto útvary pretnúť.*

U: V tom ti pomôžem. Kružnica l nepretne os úsečky AB vtedy, keď jej polomer bude menší ako je polovica dĺžky úsečky AB. To preto, lebo os prechádza stredom úsečky AB. Bod A má teda od osi o vzdialenosť rovnú polovici dĺžky úsečky AB.



Ž: *Aha! Pochopil som. Môžem pokračovať v diskusii?*

U: Máš slovo.

Ž: *Ak som dobre pochopil, tak v prípade, že polomer kružnice l bude rovný polovici dĺžky úsečky, dostanem* **jedno riešenie**. *Vtedy sa kružnica l bude dotýkať osi o práve v strede úsečky AB.* **Dve riešenia** *dostanem, ak polomer bude väčší ako polovica dĺžky úsečky AB.*

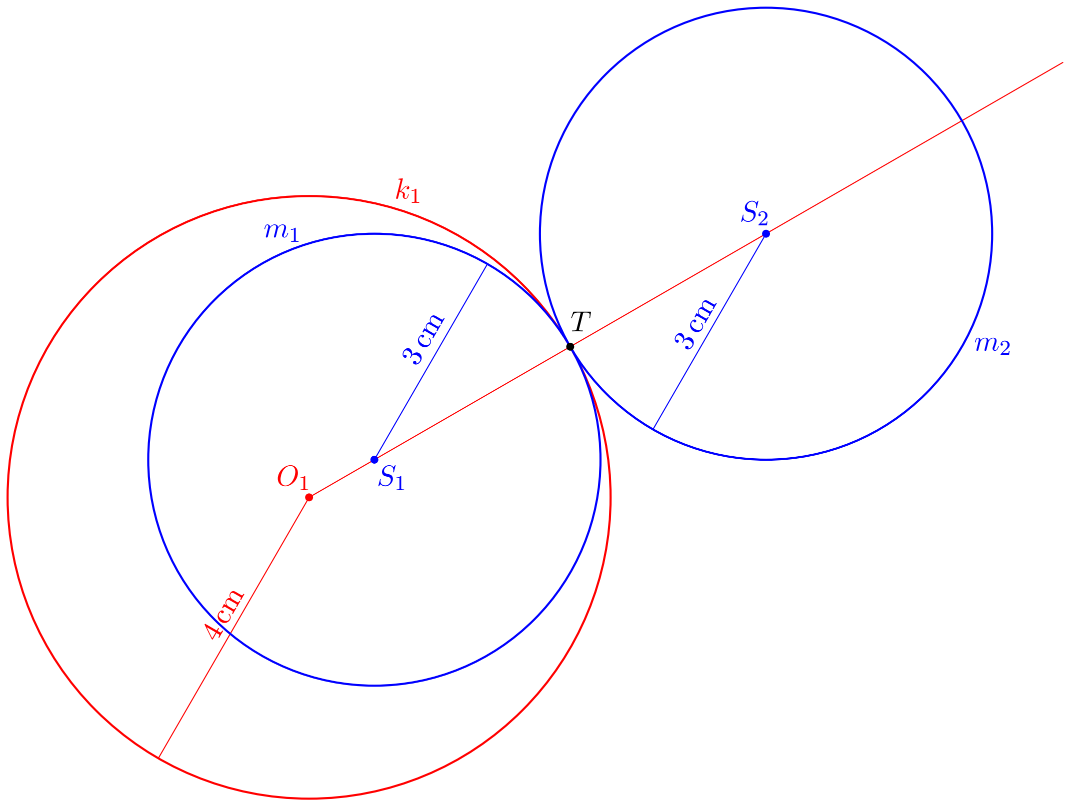
U: Treba si ešte ujasniť, že polomer kružnice l je podľa zadania útvarov určený ***vzdialenosťou stredu úsečky*** AB ***od danej priamky*** p. Teda,

1. ak $|A \div B, p| < \frac{|AB|}{2}$, tak úloha ***nemá riešenie***,
2. ak $|A \div B, p| = \frac{|AB|}{2}$, tak úloha má ***jedno riešenie***,
3. ak $|A \div B, p| > \frac{|AB|}{2}$, tak úloha má ***dve riešenia***.

Ž: *Úloha sa mi páčila. Bola celkom zaujímavá.*

Príklad 6: *Dané sú kružnice* $k_1\,(O_1;\ 4\text{ cm})$ *a* $k_2\,(O_2;\ 2\text{ cm})$ *tak, že* $|O_1O_2| = 5{,}5$ cm. *Zostrojte všetky kružnice s polomerom* 3 cm, *ktoré sa dotýkajú kružníc* k_1 *a* k_2.

U: Najskôr si ujasníme počet kružníc s polomerom 3 cm, ktoré sa dotýkajú danej kružnice k_1 v bode T, tak ako je to na nasledujúcom obrázku.



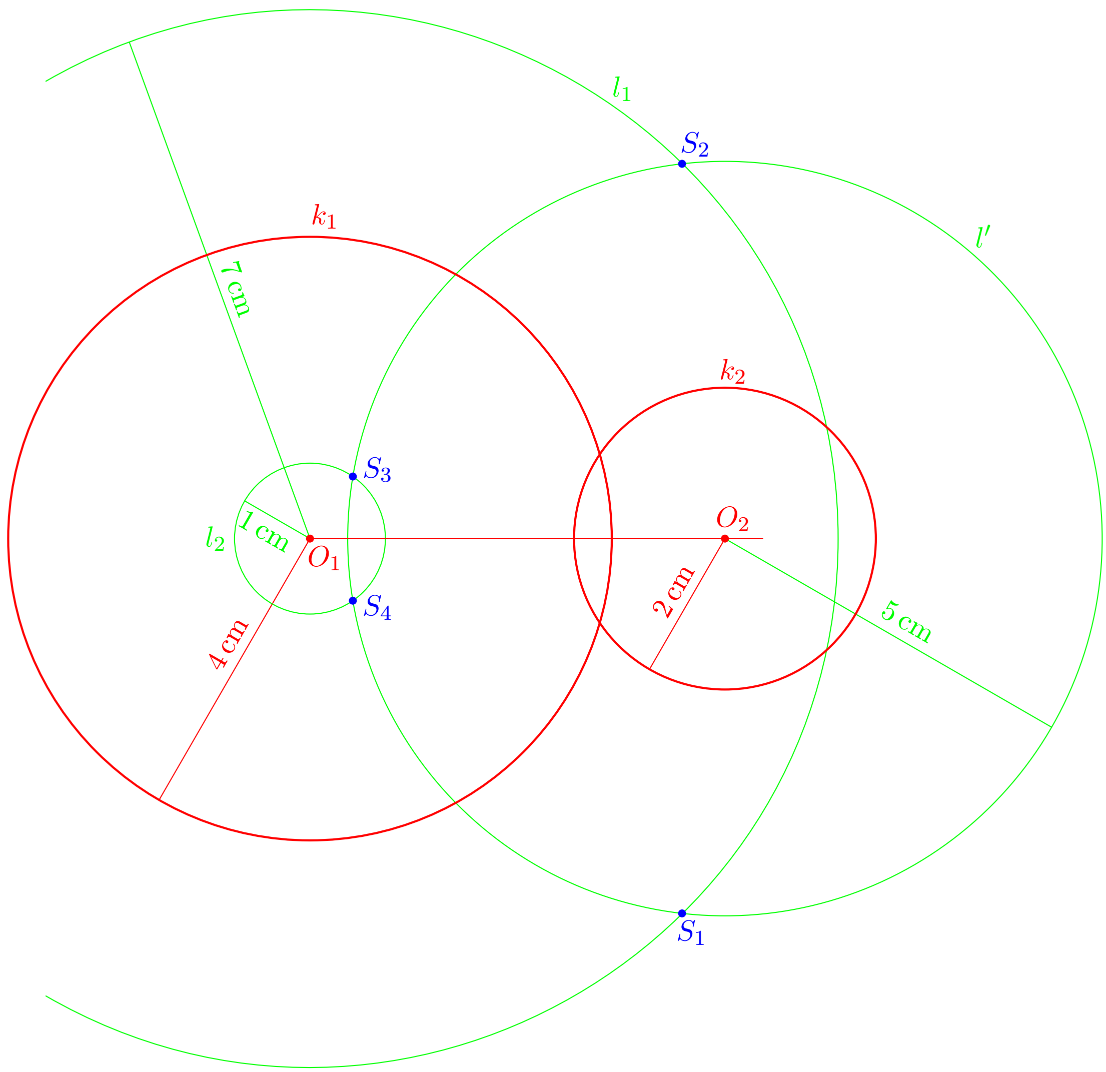
Ž: *Také kružnice sú dve. Jedna vnútorná a jedna vonkajšia.*

U: Akú vzdialenosť majú stredy týchto kružníc od bodu O_1?

Ž: *Pre stred vonkajšej kružnice je to* **súčet polomerov** *oboch kružníc, teda* 7 cm. *V prípade vnútornej kružnice je vzdialenosť stredu daná* **rozdielom polomerov**. *Je rovná jednému centimetru.*

U: Dobre. Teraz si predstav, že by si zostrojil všetky kružnice s polomerom 3 cm dotýkajúce sa kružnice k_1. Aký rovinný geometrický útvar by vytvorili stredy týchto kružníc?

Ž: *Stred každej takejto kružnice by musel byť od stredu* O_1 *vzdialený buď* 7 *alebo jeden centimeter. Vychádza mi, že by to mali byť dve* **sústredné kružnice** *so stredom v bode* O_1. *Polomer jednej kružnice bude mať veľkosť* 7 cm *a polomer druhej kružnice bude jeden centimeter.*



U: V poriadku. Tým si určil prvú podmienku pre stred hľadanej kružnice z našej úlohy. ***Známymi útvarmi*** sú dané dve kružnice k_1 a k_2. ***Hľadaným bodom*** je stred S kružnice k, ktorá sa dotýka oboch kružníc. Keďže sa dotýka kružnice k_1 tak, ako si povedal, stred S leží na jednej z dvoch sústredných kružníc, $l_1\,(O_1;\ 7\ \text{cm})$ a $l_2\,(O_1;\ 1\ \text{cm})$.

Ž: *To ale znamená, že analogicky zostrojíme dve sústredné kružnice aj so stredom v bode O_2. Hľadaná kružnica sa má dotýkať aj druhej danej kružnice.*

U: Ak by si trochu pouvažoval, zistil by si, že v tomto prípade to bude iba jedna kružnica l'. Aký bude mať polomer?

Ž: *Naozaj, máte pravdu. Vnútorný dotyk sa nedá dosiahnuť, lebo polomer hľadanej kružnice je väčší ako polomer kružnice k_2. Pre vonkajší dotyk budú stredy hľadaných kružníc ležať na kružnici s polomerom 5 centimetrov. Opäť je to súčet polomerov kružnice k_2 a hľadanej kružnice k.*

U: Zápis podmienok úlohy pre hľadaný bod S kružnice k si môžeš pozrieť ešte raz v nasledujúcom rámčeku.

$$
\begin{array}{l}
1.\ k \cap k_1 = \{T_1\} \Rightarrow S \in l_1 \cup l_2;\ l_1\,(O_1;\ 7\text{ cm}),\ l_2\,(O_1;\ 1\text{ cm})\\
2.\ k \cap k_2 = \{T_2\} \Rightarrow S \in l',\ l'\,(O_2;\ 5\text{ cm})\\
\quad S \in (l_1 \cup l_2) \cap l'
\end{array}
$$

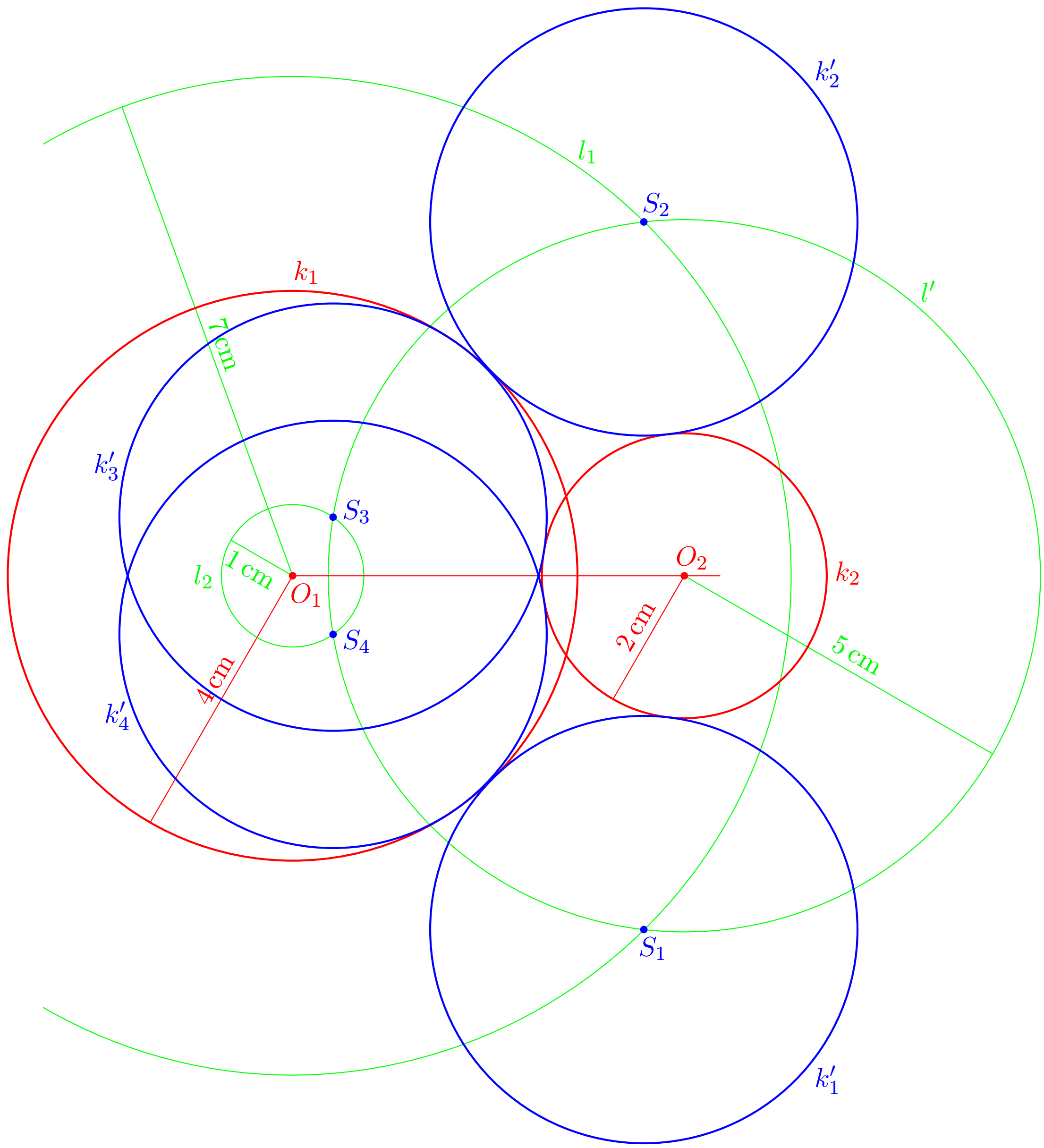
U: Zapíš postup konštrukcie.

Ž: *Podľa zadania zostrojím dve kružnice, k_1 a k_2. Potom zostrojím dve sústredné kružnice, l_1 a l_2 so stredom v bode O_1. Jedna z nich bude mať polomer veľkosti 7 centimetrov a polomer druhej kružnice bude jeden centimeter. Zostrojím ešte kružnicu l' s polomerom 5 centimetrov. Jej stredom bude bod O_2. Stred S hľadanej kružnice dostanem ako* **priesečník** *čiarkovanej kružnice a dvoch sústredných kružníc. Môžem teda zostrojiť kružnicu k.*

$$
\begin{array}{l}
1.\ k_1, k_2;\ k_1\,(O_1;\ 4\text{ cm}),\ k_2\,(O_2;\ 2\text{ cm}),\ |O_1O_2| = 5{,}5\text{ cm}\\
2. l_1, l_2;\ l_1\,(O_1;\ 7\text{ cm}),\ l_2\,(O_1;\ 1\text{ cm})\\
3.\ l';\ l'\,(O_2;\ 5\text{ cm})\\
4.\ S;\ S \in (l_1 \cup l_2) \cap l'\\
5.\ k;\ k(S;\ 3\text{ cm})
\end{array}
$$

U: Neostáva ti nič iné, iba všetky kružnice precízne narysovať.

Ž: *Nemusíte mať obavu. Je to celkom jednoduchá úloha. Akurát tých kružníc je trochu viac. Na nasledujúcom obrázku sú hľadané kružnice znázornené modrou farbou.*



U: Ako vidieť na obrázku, úloha má ***štyri riešenia***. Kružnica l' pretína každú zo sústredných kružníc v dvoch bodoch. Spolu teda máme štyri stredy kružníc s požadovanými vlastnosťami.

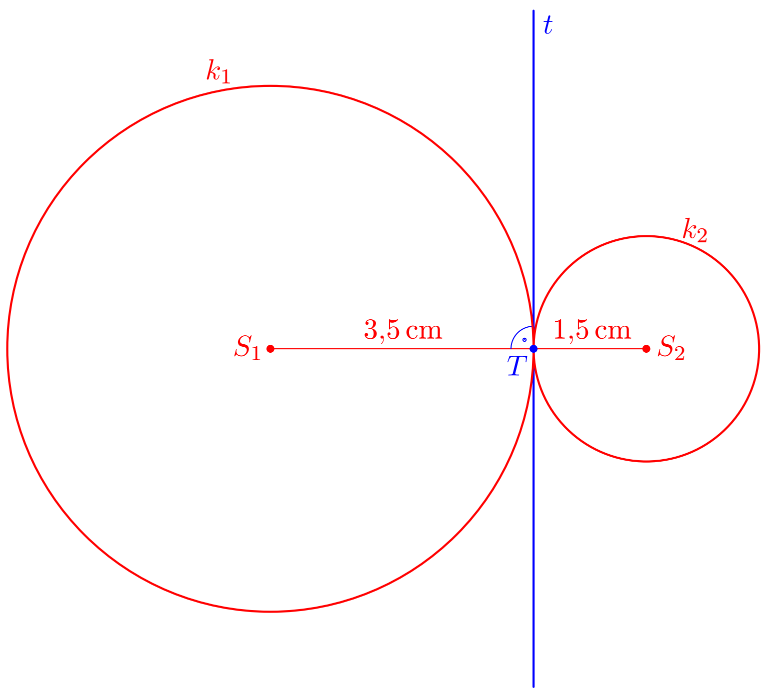
Príklad 7: *Zostrojte všetky spoločné dotyčnice dvoch kružníc $k_1\,(S_1;\ 3{,}5\text{ cm})$ a $k_2\,(S_2;\ 1{,}5\text{ cm})$, ak $|S_1S_2| = 5$ cm.*

U: Čo vieš povedať o daných dvoch kružniciach na základe zadania úlohy?

Ž: *Vzdialenosť ich stredov je 5 centimetrov a to je aj súčet ich polomerov. Kružnice sa dotýkajú.*

U: Presnejšie povedané, majú vonkajší dotyk. Pomôže nám to nejako?

Ž: *Nóóó ... Jednu dotyčnicu by som vedel zostrojiť. Prechádza dotykovým bodom kružníc a je kolmá na úsečku S_1S_2. Ale ako nájdem zvyšné dotyčnice, to netuším.*



U: Na spôsob zostrojenia ***dvoch spoločných vonkajších dotyčníc*** daných kružníc sa pozrieme spoločne. Akú základnú vlastnosť má dotyčnica ku kružnici vzhľadom na spojnicu stredu kružnice a dotykového bodu?

Ž: *Sú na seba kolmé. Veď je to tak aj na našom prvom obrázku.*

U: Správne. Túto vlastnosť určite využijeme.

Ž: *Ako to chcete využiť, keď nemáme dotykový bod. Nemáme vlastne žiadny bod z hľadanej dotyčnice.*

U: Tak si jeden takýto vonkajší bod kružníc, ktorý bude ležať na ich spoločnej dotyčnici, nájdeme.

Ž: *Mám obavu, že mi budete musieť prezradiť ako.*

U: Každé dve kružnice sú predsa ***rovnoľahlé***. To isté platí aj o našich dvoch kružniciach k_1 a k_2.

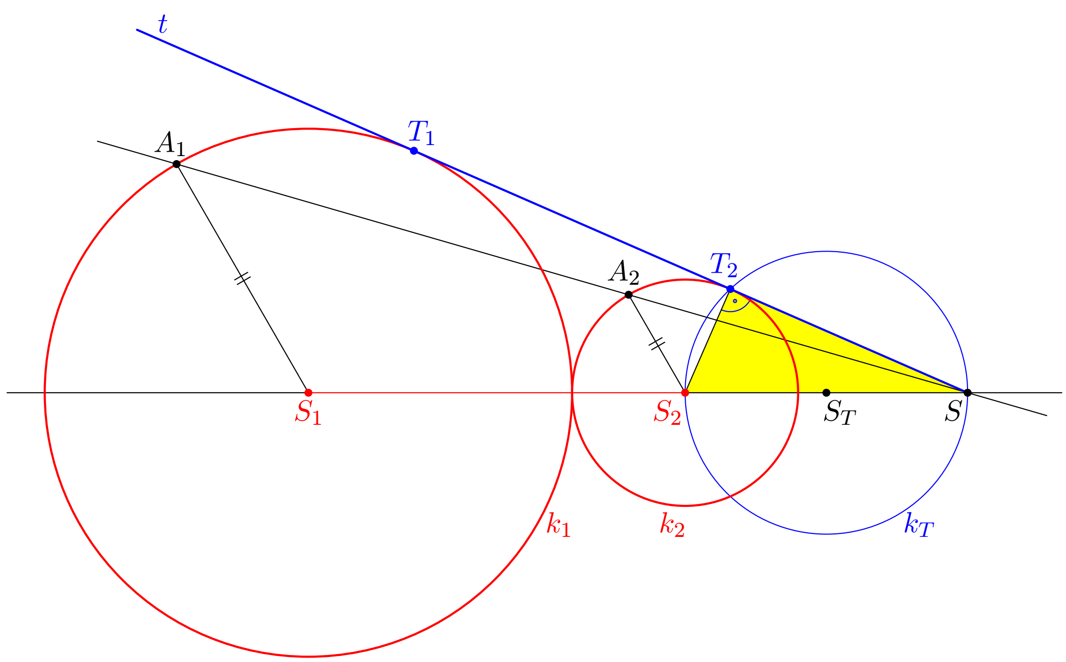
Ž: *Čo to znamená, že sú rovnoľahlé?*

U: Rovnoľahlosť je jedno z ***podobných zobrazení***. Zachováva vždy ***pomer dĺžok úsečiek***. Rovnoľahlosť je určená stredom a koeficientom rovnoľahlosti. Podiel polomerov kružníc k_1 a k_2 určuje v našom prípade koeficient rovnoľahlosti.

Ž: *Už si spomínam. V tejto rovnoľahlosti sa stred S_1 kružnice k_1 zobrazí do bodu S_2 kružnice k_2. Tieto body ležia na jednej polpriamke ohraničenej stredom rovnoľahlosti S.*

U: Správne. Zároveň vieme, že rovnoľahlosť zobrazí úsečku, ktorá neleží na priamke prechádzajúcej stredom rovnoľahlosti, na úsečku s ňou rovnobežnú. Preto polomeru S_1A_1 kružnice k_1 zodpovedá v uvažovanej rovnoľahlosti polomer S_2A_2 kružnice k_2 a sú navzájom rovnobežné.

Ž: *Aha! Bod A_1 sa zobrazí do bodu A_2, preto stred S rovnoľahlosti nájdeme ako* **priesečník** *priamok S_1S_2 a A_1A_2.*



U: Dostaneme takto ***vonkajší stred rovnoľahlosti***. Polomer jednej kružnice si môžeš zvoliť ľubovoľne. Podstatné je, že v rovnoľahlosti mu zodpovedá polomer druhej kružnice, ktorý je s ním rovnobežný. Ale ak si pochopil súvis stredov a koncových bodov zodpovedajúcich si polomerov v rovnoľahlosti dvoch kružníc, pochopíš, že takto si zopdpovedajú aj dotykové body hľadanej spoločnej dotyčnice.

Ž: *To je jasné. Aj v dotykových bodoch si môžem zostrojiť polomery a keďže sú kolmé na dotyčnicu, musia byť navzájom rovnobežné.*

U: To, že sme zostrojili stred S rovnoľahlosti daných dvoch kružníc, prevádza teraz našu úlohu na jednoduchšiu úlohu. Máme zostrojiť dotyčnicu ku kružnici k_2 prechádzajúcu jej vonkajším bodom S.

Ž: *Tak, toto náhodou viem. Využijem* **Thalesovu kružnicu**. *Jej priesečník s danou kružnicou bude dotykovým bodom, ktorým bude prechádzať hľadaná dotyčnica.*

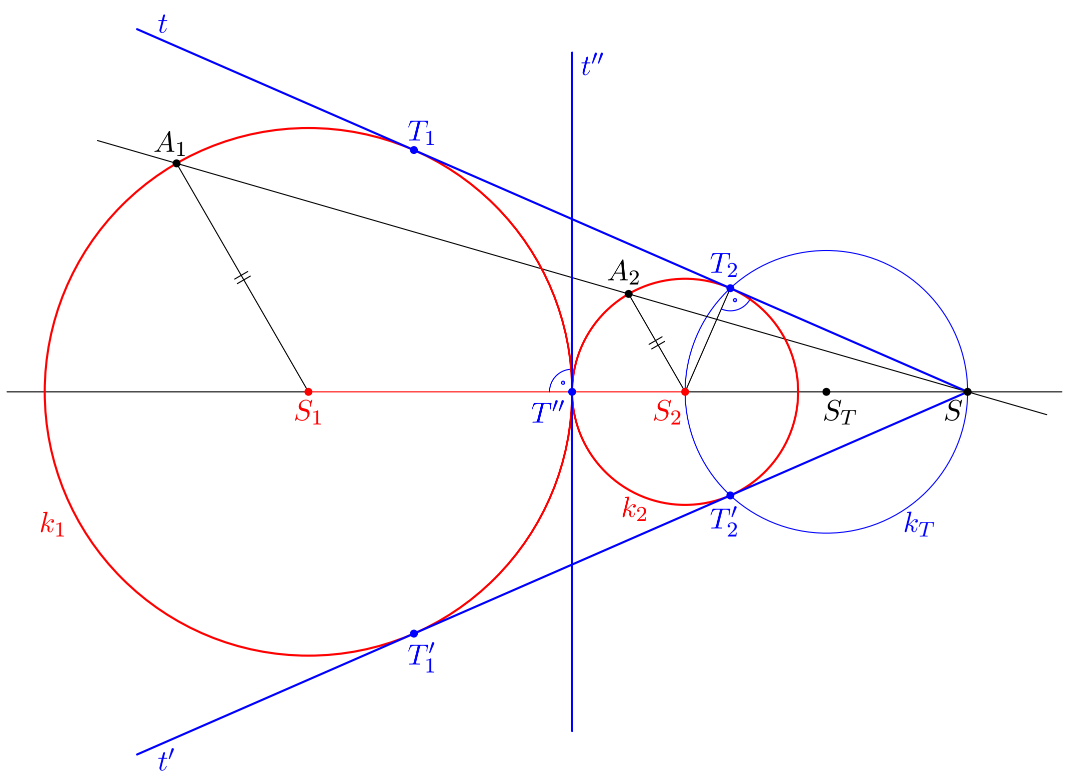
U: Prečo využiješ Thalesovu kružnicu?

Ž: *Veď dotyčnica musí byť kolmá na úsečku spájajúcu stred danej kružnice a dotykový bod. Dotykový bod T je vrcholom pravého uhla.*

U: Vidím, že toto ti nerobí problém. Zopakujem však v stručnosti základné myšlienky konštrukcie vonkajších dotyčníc. Keďže dané kružnice sú rovnoľahlé, prechádzajú ich spoločné dotyčnice cez ich stredy rovnoľahlosti. Tie určíme na základe dvoch navzájom rovnobežných polomerov v daných dvoch kružniciach. Dotykový bod spoločnej dotyčnice zostrojíme ako priesečník jednej z daných kružníc a Thalesovej kružnice. Jej priemerom je úsečka určená stredom rovnoľahlosti a stredom uvažovanej kružnice.

1. $k_1, k_2;\ k_1\,(S_1;\ 3{,}5\text{ cm})\,, k_2\,(S_2;\ 1{,}5\text{ cm})\,,\ |S_1S_2| = 5\text{ cm}$
2. $A_1;\ A_1 \in k_1$
3. $A_2;\ A_2 \in k_2,\ S_2A_2 \parallel S_1A_1 \ \wedge\ A_2 \in \overrightarrow{S_1S_2A_1}$
4. $S;\ S \in \overleftrightarrow{S_1S_2} \cap \overleftrightarrow{A_1A_2}$
5. $k_T;\ k_T\left(S_2 \div S;\ \dfrac{|S_2S}{2}|\right)$
6. $T_2;\ T_2 \in k_2 \cap k_T$
7. $t;\ t \equiv \overleftrightarrow{ST_2}$
8. $t';\ t' \perp S_1S_2,\ k_1 \cap k_2 \in t'$

Ž: *Skúsim narysovať. Je to dosť pracné a obsahuje veľa čiar. Ale dúfam, že výsledok mám správny.*



U: Za rysovanie v tejto úlohe ťa môžem iba pochváliť. Na obrázku vidíš, že úloha má ***tri riešenia***.