Konštrukcia trojuholníka s využitím množín všetkých bodov danej vlastnosti

RNDr. Marián Macko

Ž: *Asi dnes budeme rysovať, však? Priznám sa, že túto časť geometrie nemám veľmi rád. Mávam dosť neúhľadne narysované obrázky.*

U: V úlohách, ktorými sa budeme zaoberať, nebude rysovanie to najpodstatnejšie. Oveľa dôležitejšie bude nájsť spôsob, ako trojuholník na základe zadaných prvkov narysovať. K tomu sa však dostaneme postupne. Verím, že s konštrukčnými úlohami si sa už určite stretol. Vieš popísať ich ***základné fázy***?

Ž: *Myslíte na* **rozbor**, *zápis konštrukcie, skúšku a* **diskusiu**?

U: Vidím, že si si spomenul. Ja len upresním, že skúšku označujeme aj za ***dôkaz správnosti konštrukcie***.

Ž: *Ešte som zabudol na vlastnú konštrukciu.*

U: Zápis konštrukcie a jej prevedenie zvykneme spojiť do jednej fázy. Túto fázu nazývame ***konštrukcia***. V čom spočíva rozbor konštrukčnej úlohy?

Ž: *Urobím si* **náčrt** *a to tak, že sa rozhodnem, ktorú stranu trojuholníka narysujem ako prvú. Potom hľadám nejaké podmienky pre tretí vrchol trojuholníka. On je totiž neznámy.*

U: Konštrukciu nemusíme vždy začínať stranou trojuholníka. Závisí to od zadania úlohy. A náčrt v rozbore nemáš robiť tak, ako keby si už rysoval. To by sa ti mohlo stať, že trojuholník ani nenačrtneš. Východiskom rozboru je predpoklad, že úloha má aspoň jedno riešenie.

Ž: *Mám si načrtnúť trojuholník, ako keby som ho už mal narysovaný?*

U: Presne tak. Koľko trojuholníkov úlohe vyhovuje, to je tiež v rozbore nepodstatné. Načrtneš si jeden trojuholník a vyznačíš v ňom zadané prvky. Dobrý náčrt je potom orientačnou pomôckou na skúmanie vzťahu medzi známymi a neznámymi prvkami trojuholníka.

Ž: *Môžu byť neznámymi dva vrcholy trojuholníka?*

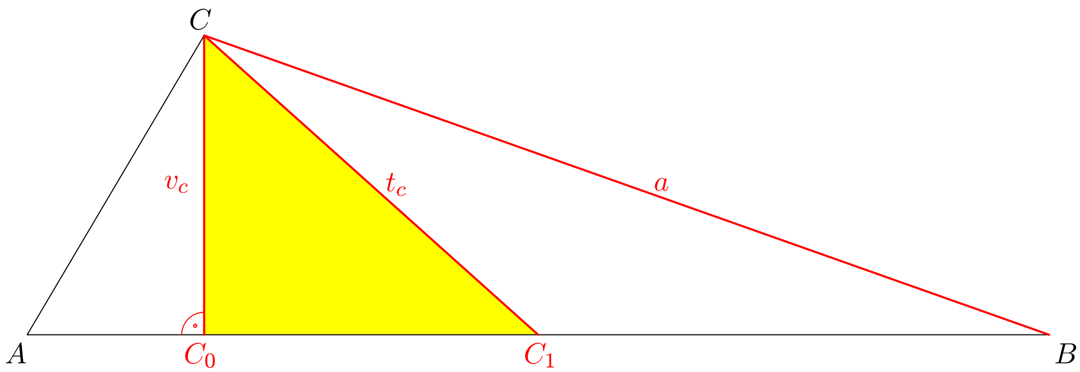
U: Prečo nie.

Ž: *Mohli by sme to vyskúšať na konkrétnej úlohe?*

U: Máme ***zostrojiť trojuholník*** ABC, ak je daná ***ťažnica*** CC_1 dĺžky 6 cm, ***výška*** $v_c = 4$ cm a ***dĺžka strany*** a.

Ž: *Dobre. Začnem náčrtom. Ten trojuholník by asi nemal byť rovnostranný?*

U: Ak sa v úlohe nehovorí o nejakom špeciálnom prípade trojuholníka, tak vždy načrtni ***všeobecný trojuholník***.



Ž: *V trojuholníku som vyznačil zadané úsečky. Nepomýlili ste sa? Iba vrchol A je neznámy. Veď úsečku BC poznám.*

U: Vidím, že sa k textu úlohy musíme vrátiť ešte raz. Zo zadania úlohy poznáme iba polohu ťažnice CC_1. Zvyšné úsečky, a teda aj BC, sú dané iba svojou veľkosťou, nie umiestnením. Táto konštrukčná úloha preto patrí medzi tzv. ***polohové úlohy***. Je v nej určené ***umiestnenie, poloha*** ťažnice CC_1.

Ž: *Čiže túto úsečku CC_1 si musím umiestniť a hľadať vrcholy A a B trojuholníka. Nenájdeme najskôr bod C_0, ktorý je pätou výšky na stranu c?*

U: Ideš na to správne. Ako by si ho zostrojil? Skôr ako mi odpovieš, zhrniem nami sformulované závery. ***Známymi bodmi trojuholníka sú body C a C_1***, pričom poznáme dĺžku tejto úsečky. ***Hľadanými bodmi*** trojuholníka sú body C_0, A, B. Teraz už máš slovo ty.

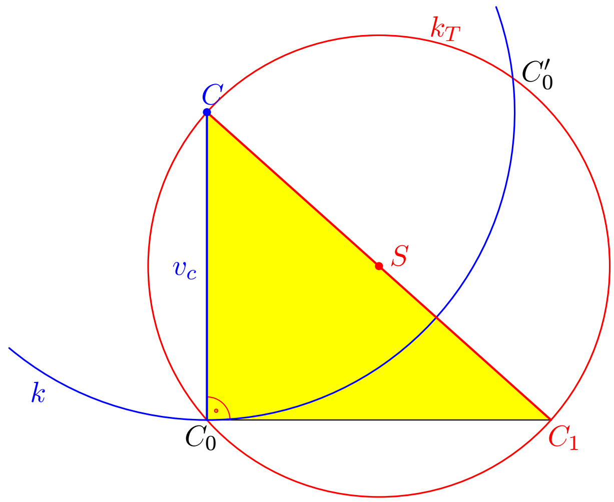
Ž: *Bod C_0 patrí* **kružnici** *k so stredom v bode C a polomerom $v_c = 4$ cm. To preto, lebo úsečka CC_0 je zadaná.*

U: Máš pravdu. Využil si tak jednu z ***množín bodov danej vlastnosti***. Ak ***neznámy bod*** má od ***zadaného bodu konštantnú vzdialenosť***, tak patrí ***kružnici***, ktorej stredom je daný bod. Polomer kružnice udáva zadaná vzdialenosť týchto bodov. Bod C_0 však nie je touto kružnicou určený jednoznačne. Ktorú druhú vlastnosť tohto bodu využiješ?

Ž: *Neviem, ako využiť, že bod C_0 je vrcholom pravého uhla. Kde mám zostrojiť kolmicu?*

U: Bohužiaľ, žiadna kolmica to nebude. ***Množinou všetkých bodov X*** v rovine, pre ktoré je ***uhol CXC_1 pravý***, je ***Thalesova kružnica***. Označíme ju k_T.

Ž: *Jasné! Neviem, ako som na to mohol zabudnúť. Ťažnica CC_1 trojuholníka je jej priemerom.* **Stred S ťažnice** *je teda stredom Thalesovej kružnice a jej* **polomer** *je* **polovicou ťažnice**, *teda 3 centimetre.*



U: Pripomeniem, že body C a C_1 nepatria Thalesovej kružnici. Na základe dvoch podmienok sme našli dve množiny bodov. Udávajú polohu hľadaného bodu C_0. Ako ho určíme?

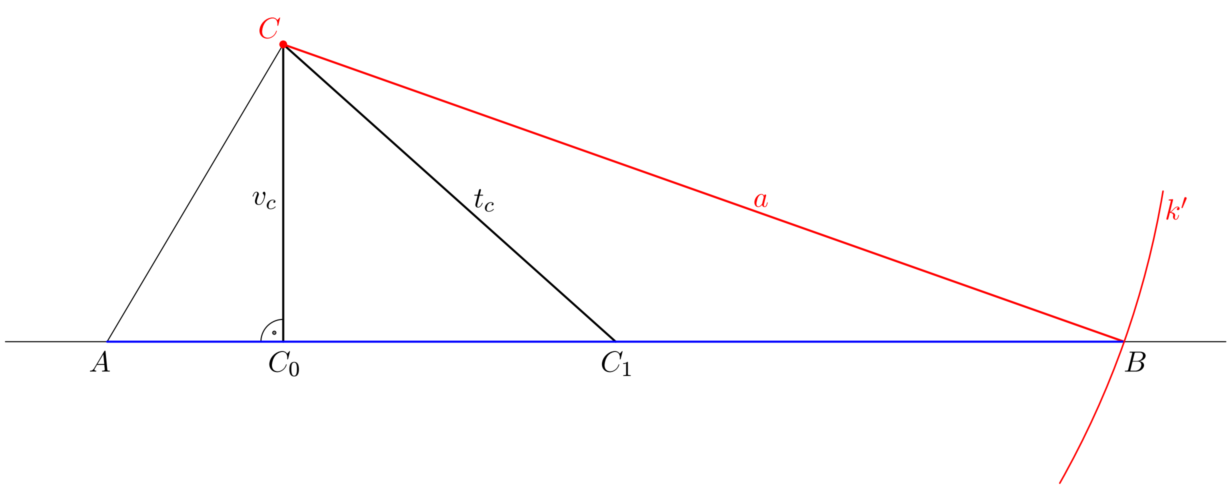
Ž: *Zrejme ako* **prienik** *týchto dvoch kružníc. Ale to môže byť aj viac riešení.*

U: Zatiaľ sa týmto netráp. V rozbore máme iba ukázať, ako takýto trojuholník zostrojíme. Zatiaľ sme teda popísali spôsob konštrukcie bodu C_0. Formálny symbolický ***zápis podmienok pre bod*** C_0 si môžeš pozrieť v tabuľke.

$$
\boxed{\begin{array}{c}
1.\ |CC_0| = v_c = 4 \text{ cm} \Rightarrow C_0 \in k(C;\ 4 \text{ cm}) \\
2.\ |\sphericalangle CC_0C_1| = 90^\circ \Rightarrow C_0 \in k_T(S;\ 3 \text{ cm}) \\
C_0 \in k \cap k_T
\end{array}}
$$

U: Zapísať ***podmienky pre neznámy bod*** B trojuholníka už nebude až taký problém. Vieme, že bod B leží na priamke C_1C_0. Polohu bodu B určuje zároveň úsečka CB.

Ž: *Aj tu využijeme kružnicu. Tak, ako v predchádzajúcom prípade. Kružnica k' bude mať stred v bode C a dĺžka strany a bude jej polomerom. Čiže bod B zostrojíme ako* **priesečník** *priamky C_1C_0 a kružnice k'.*



U: Na zostrojenie bodu A využijeme skutočnosť, že bod C_1 je ***stredom úsečky*** AB.

Ž: *To už nemusíte zdôvodňovať. Veď body B a C_1 už poznáme. Od bodu C_1 prenesiem ich vzdialenosť na opačnú polpriamku a mám bod A.*

U: Možno sa ti nezdá, ale to čo sme urobili doteraz, je jedna z najdôležitejších fáz konštrukčnej úlohy. Urobiť teraz ***zápis konštrukcie*** znamená matematicky sformalizovať postupnosť doterajších našich úvah v rozbore. Sleduj zápis v rámčeku. V ôsmich bodoch vyjadruje postupnosť krokov konštrukcie od zadanej ťažnice CC_1, cez nájdenie neznámych bodov C_0, B a A, až po samotný trojuholník ABC. Takýto zápis však môžeš urobiť aj slovne.

1. $CC_1;\ |CC_1| = t_c = 6$ cm
2. $k;\ k(C;\ 4$ cm$)$
3. $k_T;\ k_T(S;\ 3$ cm$;\ S = C \div C_1$
4. $C_0;\ C_0 \in k \cap k_T$
5. $k';\ k'(C;\ a)$
6. $B;\ B \in \overleftrightarrow{C_0C_1} \cap k'$
7. $A;\ C_1 = A \div B$
8. ΔABC

Ž: *Dobre, porozumel som. Ale, ako narysujem samotný trojuholník, keď ste nezadali dĺžku úsečky BC?*

U: Je to tzv. ***parametrická úloha***. Nutnou súčasťou jej riešenia je preto ***diskusia***. Spočíva v stanovení ***podmienok riešiteľnosti*** a ***počtu riešení*** v závislosti na parametri úlohy. To je asi tak, ako keby si ty rysoval pre nejakú tebou zvolenú dĺžku úsečky BC a tvoj spolužiak by zvolil inú číselnú hodnotu. Nemali by ste rovnaký výsledný obrázok. Jeden z vás by dokonca nemusel získať žiadny trojuholník. V úlohách s parametrom preto nerysujeme.

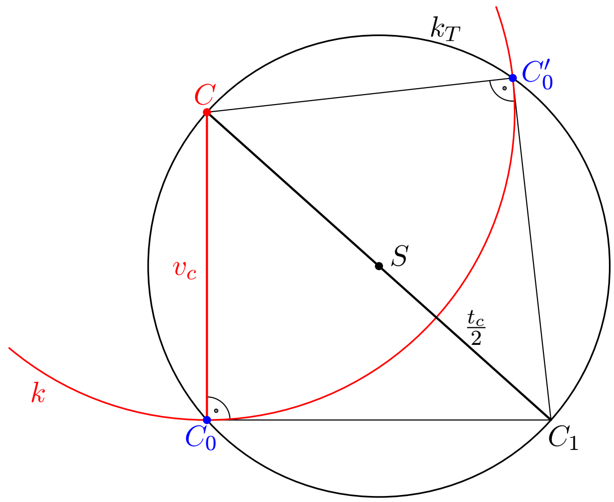
Ž: *Povedal som síce, že nerád rysujem, ale teraz vidím, že aj bez rysovania to bude ťažké.*

U: Ak si správne pochopil rozbor, tak by sa to nemalo stať. Stačí prejsť jednotlivé kroky konštrukcie v takom poradí, ako sú uvedené v zápise konštrukcie a skúmať, kedy a ku koľkým rôznym výsledkom tieto dielčie konštrukčné kroky vedú. V našej úlohe musíme najskôr zostrojiť bod C_0. Ten môže, ale nemusí existovať. Od čoho to závisí?

Ž: *Začínam chápať. Závisí to od dĺžok ťažnice t_c a výšky v_c, lebo určujú polomery kružníc k a k_T. Prienikom týchto kružníc vznikne bod C_0.*

U: Dĺžka ťažnice a výšky je však známa. Koľko spoločných bodov majú tieto dve ***nesústredné kružnice***?

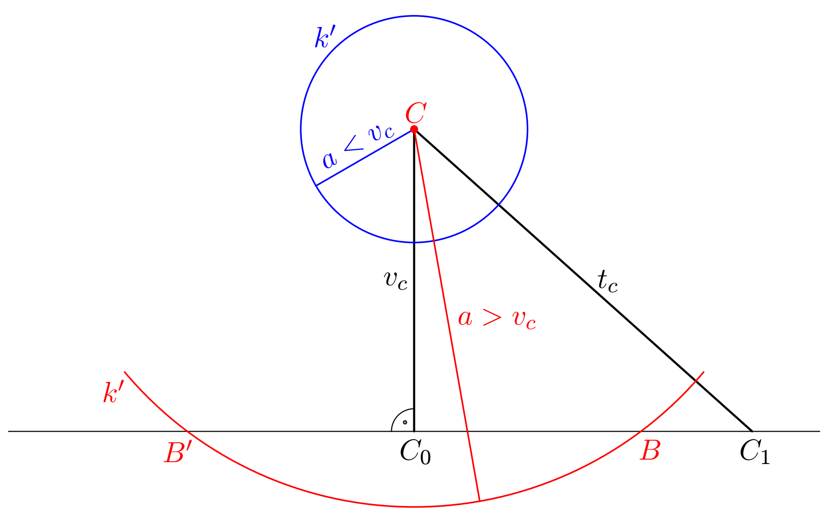
Ž: *Pretnú sa v dvoch bodoch. Stačí sa pozrieť na obrázok v rozbore. Priemer Thalesovej kružnice je 6 centimetrov. To znamená, že bod C_0 bude od bodu C vzdialený maximálne 6 centimetrov. Keďže bod C_0 má patriť aj kružnici k so stredom v bode C a polomerom 4 centimetre, tak táto kružnica k musí pretnúť Thalesovu kružnicu v dvoch bodoch. Tá vzdialenosť je teraz kratšia.*



U: To znamená, že podľa 4. kroku konštrukcie pre bod C_0 dostávame dve riešenia. Počet riešení už môžu ovplyvniť iba konštrukcie bodov B a A. Bod B zostrojíme ako priesečník priamky C_1C_0 s kružnicou k', ktorá má stred v bode C.

Ž: *S priamkou sa nedá hýbať. Tá bude jednoznačne určená bodmi, ktoré sme zostrojili pred bodom B. Všetko bude závisieť od polomeru a kružnice k'. Kružnica by sa mala dotýkať priamky, ak by strana a splynula s výškou na stranu c. Teda pre $a = 4$ cm dostanem jeden bod B.*

U: Ak by platila podmienka $a < v_c$, tak kružnica k' priamku C_0C_1 nepretne. Nedostaneme ***žiaden bod*** B, aj napriek tomu že bod C_0 existoval. ***Dva rôzne body*** B vzniknú, ak bude splnená podmienka $a > v_c$.

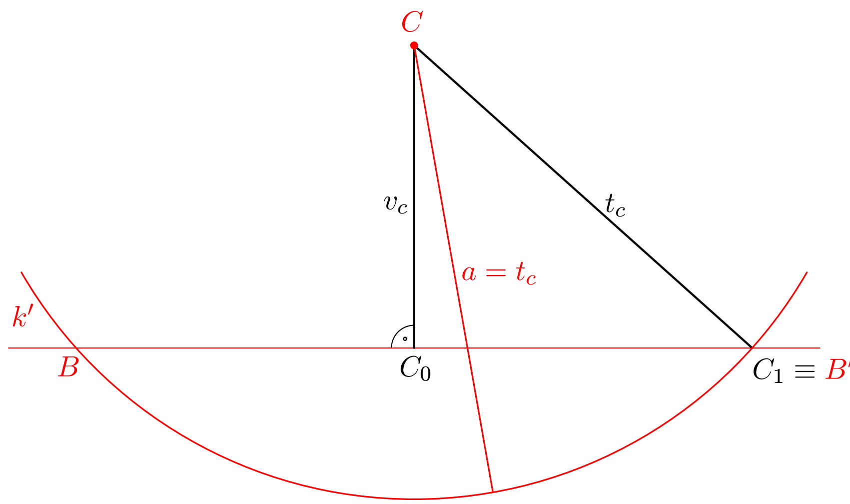


Ž: *Teda pre bod B máme žiadne, jedno alebo dve riešenia. Taký istý môže byť aj celkový počet trojuholníkov, ktoré narysujeme?*

U: V podstate máš pravdu. Ale iba za predpokladu, že bod A, ktorý nám zostáva zostrojiť, bude jednoznačný.

Ž: *Tak to by malo platiť. Pre každú dvojicu bodov C_1 a B existuje jediný bod A taký, že C_1 je stredom úsečky AB.*

U: Vrátim sa ešte k podmienkam pre zostrojenie bodu B. Môže nastať ešte jedna zaujímavá situácia. V prípade, že platí $a = t_c = 6$ cm, kružnica má s priamkou síce dva spoločné body, ale jedným z nich je bod C_1. Ten nemôže byť zároveň aj bodom B. Vtedy dostaneme pre bod B jediné riešenie.



U: V nasledujúcej prehľadovej tabuľke máš zhrnutú celú diskusiu o počte riešení vzhľadom na parameter a.

1. $a \in \{4;\ 6\} \Rightarrow 2\ \Delta$
2. $a \in (0;\ 4) \Rightarrow 0\ \Delta$
3. $a \in (4;\ 6) \cup (6;\ \infty) \Rightarrow 4\ \Delta$

Ž: *Urobili sme síce diskusiu, ale nemali sme ešte predtým urobiť* **skúšku správnosti konštrukcie***? Čo keď podľa nášho postupu nenarysujeme správny trojuholník?*

U: Žiadnu chybu sme neurobili. Môžeš mi veriť, že naša konštrukcia je správna. Veď sa o tom teraz presvedčíme.

Ž: *Ako? Veď sme nerysovali. Na základnej škole sme v narysovanom trojuholníku odmerali to, čo bolo zadané. Namerané a zadané hodnoty sme porovnali.*

U: Aha! Je to jedna z možností. V ***dôkaze správnosti konštrukcie*** máme však overiť, či ***nutné podmienky*** z rozboru sú aj ***postačujúce*** pre konštrukciu trojuholníka. Dôkaz je skôr zdôvodňovaním, než meraním.

Ž: *Čo to znamená?*

U: V našom prípade ide o zdôvodnenie, že každý trojuholník, ktorý zostrojíme podľa uvedeného postupu konštrukcie, má ***ťažnicu*** CC_1 dĺžky 6 centimetrov, ***výšku*** v_c veľkosti 4 centimetre a stranu BC dĺžky a.

Ž: *To, že ťažnica na stranu c má dĺžku 6 centimetrov vyplýva predsa z prvého kroku konštrukcie.*

U: Máš pravdu. Podobne zdôvodníme aj zvyšné úsečky. Podľa kroku 4. konštrukcie sme pätu C_0 výšky v_c na stranu c zostrojili ako prienik kružníce k a Thalesovej kružnice. Z vlastnosti Thalesovej kružnice vyplýva, že úsečka CC_0 je kolmicou na stranu c. Podľa kroku 2. konštrukcie má výška aj požadovanú veľkosť 4 centimetre. Skrátene povedané, z krokov 4., 3. a 2. vyplýva, že výška má požadovanú vlastnosť.

Ž: *Zostáva zdôvodniť stranu a. To, že úsečka BC má dĺžku a vyplýva z krokov 5. a 6. konštrukcie. Teda trojuholník ABC narysujeme podľa zadaných hodnôt úlohy.*

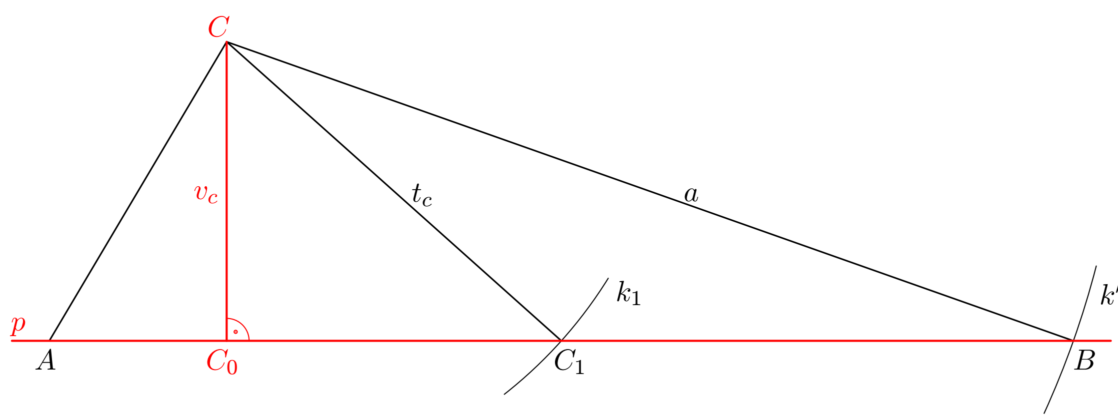
U: Vrátim sa späť k zadaniu úlohy, ktorú sme vyriešili. Mali sme ***zostrojiť trojuholník*** ABC, ak bola daná ***ťažnica*** CC_1 dĺžky 6 cm, ***výška*** $v_c = 4$ cm a ***dĺžka strany*** a. Úlohu sme označili ako ***polohovú***. Bola daná nielen dĺžka ťažnice na stranu c, ale aj jej ***poloha, umiestnenie*** v úsečke CC_1. Úlohu však môžeme zmeniť na ***nepolohovú***.

Ž: *Môžem sformulovať ja? Úloha by znela:* **Zostrojte trojuholník** ABC*, ak sú dané* $t_c = 6$ cm**,** $v_c = 4$ cm *a* **dĺžka strany** a*.*

U: Správne! Zadal si iba tvar geometrického útvaru a ***veľkosti*** jeho niektorých prvkov. Umiestnením niektorého z daných prvkov konštruovaného trojuholníka zmeníme ***nepolohovú*** úlohu na ***polohovú***.

Ž: *To znamená, že môžem začať výškou?*

U: Presne tak. ***Známymi bodmi*** budú teraz body C a C_0. ***Hľadanými bodmi*** body sú body C_1, B a A. Pozri na obrázok.



Ž: *Konštrukcia bude jednoduchšia.*

U: Prečo si to myslíš?

Ž: *Všetky body, ktoré hľadáme, musia ležať na* **priamke** p **kolmej na výšku** CC_0*. Táto priamka prechádza bodom* C_0*. Bod* C_1 *určíme pomocou kružnice* $k_1(C,\ 6\text{ cm})$*, lebo* $|CC_1| = t_c$*. Na určenie bodu* B *využijem kružnicu* k' *z predchádzajúceho riešenia.*

U: Podmienky na určenie bodu B a bodu A zostanú rovnaké, ako keď sme riešili úlohu ako polohovú. Pozri si preto iba zápis konštrukcie, ktorý je uvedený v nasledujúcom rámčeku.

1. $CC_0;\ |CC_0| = v_c = 4$ cm
2. $k_1;\ k_1(C;\ 6\text{ cm})$
3. $p;\ p \perp CC_0,\ C_0 \in p$
4. $C_1;\ C_1 \in k_1 \cap p$
5. $k';\ k'(C;\ a)$
6. $B;\ B \in \overleftrightarrow{C_0C_1} \cap k'$
7. $A;\ C_1 = A \div B$
8. ΔABC

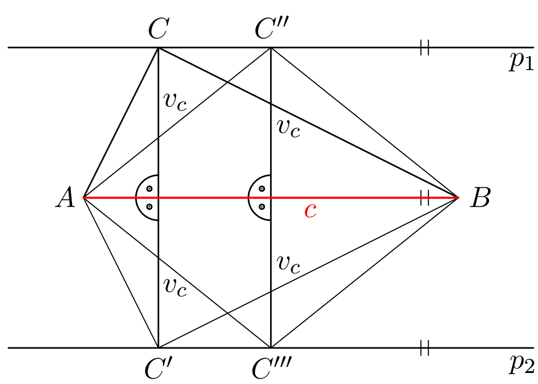
U: Vieš v čom je ešte rozdiel medzi polohovou a nepolohovou úlohou?

Ž: *To vôbec netuším. V počte riešení?*

U: Pri ***nepolohovej úlohe*** sa ***zhodné trojuholníky***, ktoré zostrojíme, nepovažujú za rôzne riešenia. ***Počtom riešení*** pri ***nepolohovej úlohe*** rozumieme ***počet nezhodných trojuholníkov***, ktoré pri riešení získame.

Ž: *Mám to teda chápať tak, že ak pri* **polohovej úlohe** *dostanem napríklad štyri zhodné trojuholníky, tak úloha má štyri riešenia?*

U: Áno. Pochopil si podstatu rozdielu. Pozrime sa ešte na jednu sitáciu, s ktorou sa pri zadaných konštrukčných úlohách stretávame pomerne často. Trojuholník môže byť ***zadaný*** napríklad ***stranou*** c a ***výškou*** v_c na túto stranu. Tretí zadaný prvok trojuholníka je teraz nepodstatný. Za známe by si považoval body A a B, ktoré určujú stranu c. Ako by si využil výšku na zostrojenie neznámeho bodu C?

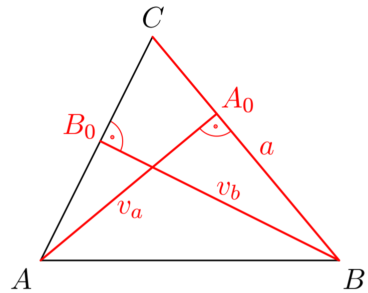


Ž: *Výška trojuholníka vyjadruje, že bod C má od strany AB vzdialenosť rovnú veľkosti výšky. Preto zostrojím dve priamky rovnobežné so stranou AB vo vzdialenosti výšky.*

U: Zvládol si to s prehľadom. Popísal si ďalšiu z dôležitých množín bodov danej vlastnosti. ***Množinou všetkých bodov v rovine***, ktoré majú od ***danej priamky*** p ***zadanú vzdialenosť*** v, je ***dvojica priamok*** p_1, p_2 ***rovnobežných s danou priamkou***. Ich ***vzdialenosť*** od zadanej priamky p je určená kladným reálnym číslom v.

Príklad 1: *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané $a = 5$ cm, $v_a = 7$ cm a $v_b = 4$ cm.*

Ž: *Konštrukčnú úlohu začnem* **rozborom**. *Urobím náčrt trojuholníka ABC a farebne vyznačím zadané úsečky. Symbolmi A_0 a B_0 označím zároveň päty výšok na strany a a b.*



U: Úloha patrí medzi ***nepolohové***. Sú dané iba veľkosti zadaných usečiek, nie je však dané ich umiestnenie. Preto konštrukciu môžeš začať ktoroukoľvek z farebne vyznačených úsečiek. Samozrejme iba za predpokladu, že popíšeš, ako zostrojiť zvyšné neznáme body trojuholníka.

Ž: *To chcete povedať, že nemusím začať stranou BC?*

U: Presne tak. Ak začneš ***výškou na stranu*** b, uvidíš, že konštrukcia bude jednoduchšia.

Ž: *Dobre teda. V trojuholníku ABC budem* **body** B **a** B_0 *považovať za* **známe**. **Hľadanými bodmi** *budú vrcholy A a C trojuholníka.*

U: Ktorý z neznámych bodov nájdeš ako prvý?

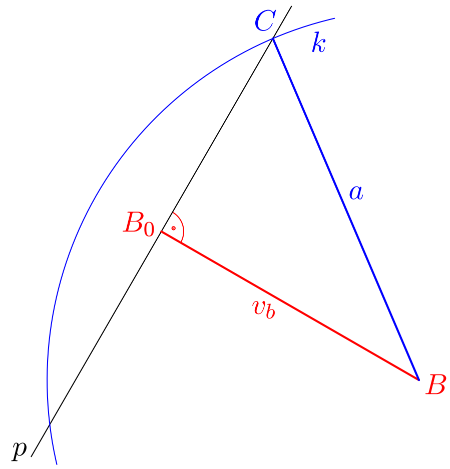
Ž: *Keď sa tak pozerám na obrázok, tak na určenie bodu A zatiaľ nemám čo využiť. Z toho mi vychádza, že najskôr napíšem* **podmienky pre bod** C.

U: Rozmýšľaš správnym smerom.

Ž: *Počkajte ... No jasné! Veď to je triviálne. V bode B_0 zostrojím kolmicu a od bodu B nanesiem vzdialenosť 5 centimetrov.*

U: V podstate som ti porozumel, ale radšej tvoje úvahy spresním. To, že v bode B_0 zostrojíš ***priamku*** p ***kolmú na úsečku*** BB_0 vyplýva z toho, že ***uhol*** CB_0B je ***pravý***. Bod B_0 je pätou výšky na stranu b. Čo znamená, že od bodu B nanesieš vzdialenosť 5 centimetrov?

Ž: *Podľa zadania má úsečka BC dĺžku 5 centimetrov a bod B už mám. Viem, že body, ktorých vzdialenosť od bodu B je rovná piatim centimetrom, vytvárajú kružnicu s týmto polomerom. Stredom tejto kružnice je bod B. Na tejto kružnici k je aj bod C. Preto ho zostrojím ako* **prienik priamky** p **a kružnice** k.



U: Určme ešte podmienky pre bod A. Jedna z podmienok by mala byť triviálna.

Ž: *Máte pravdu. Bod A patrí priamke p. To preto, lebo všetky tri body C, B_0 a A ležia na jednej priamke.*

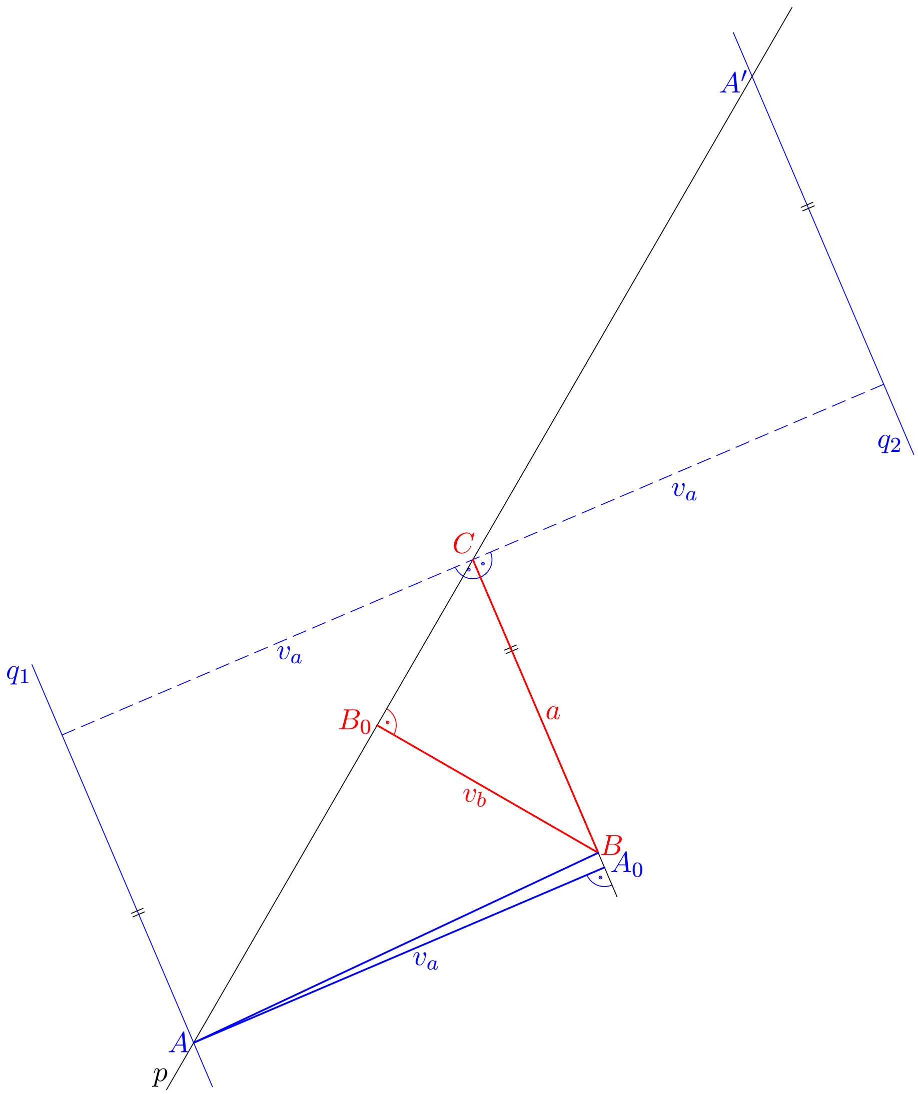
U: K určeniu druhej množiny využiješ výšku na stranu a.

Ž: *Výška je kolmica na stranu. Veď to sme už raz v riešení úlohy využili. Ale, kde tú kolmicu mám zostrojiť? Nemám ani vrchol A, ani pätu A_0 výšky.*

U: ***Výška*** nie je iba kolmica, ale aj ***vzdialenosť***. V našom prípade vyjadruje, že bod A je od priamky BC vzdialený 7 centimetrov. Teda

$$v_a = |A, \overleftrightarrow{BC}| = 7 \text{ cm}.$$

Ž: *Tak potom zostrojím dve priamky rovnobežné s priamkou BC vo vzdialenosti 7 centimetrov.*



U: Ak tieto priamky označíme symbolmi q_1 a q_2, tak bod A dostaneme ako priesečník týchto priamok s priamkou p. V nasledujúcej tabuľke sú ešte raz uvedené všetky ***podmienky pre hľadané body C a A***.

C :

1. $BB_0 \perp \overleftrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; C \in p: \; p \perp BB_0 \;\wedge\; B_0 \in p$
2. $|BC| = 5 \text{ cm} \;\Rightarrow\; C \in k(B;\ 5 \text{ cm})$

$C \in p \cap k$

A :

1. $B_0 \in \overleftrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; A \in p$
2. $|A;\ \overleftrightarrow{BC}| = v_a = 7 \text{ cm} \;\Rightarrow\; A \in q: \; q \parallel p \;\wedge\; |q;\ p| = 7 \text{ cm}$

$A \in p \cap q$

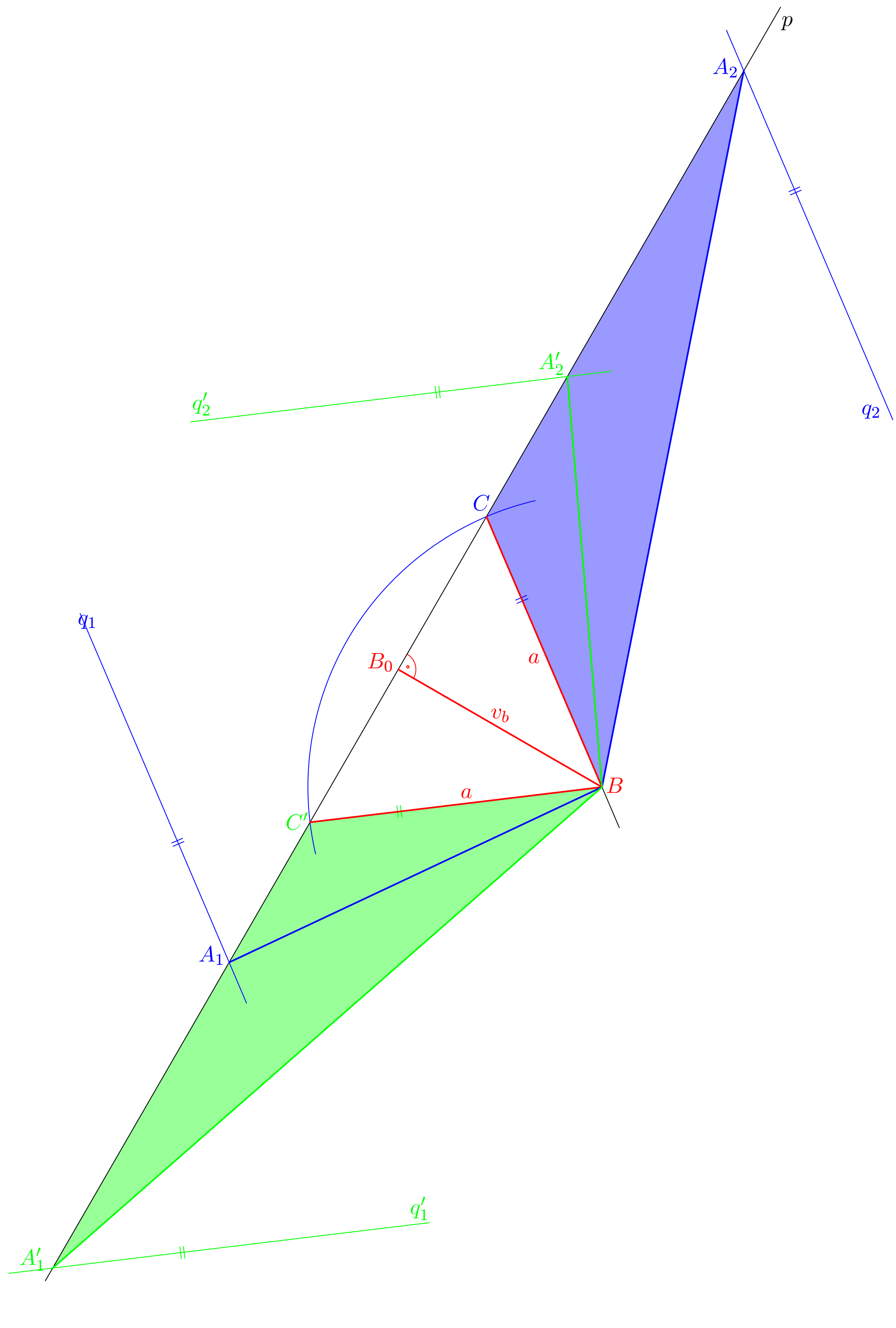
U: Zapísať ***postup konštrukcie*** by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Celý rozbor vlastne zhrniem v jednotlivých krokoch konštrukcie. Začnem výškou v_b na stranu b, čo je úsečka BB_0. Potom pomocou priamky p a kružnice k určím vrchol C trojuholníka. Akými útvarmi sú priamka p a kružnica k sme popísali v rozbore. Nakoniec zostrojím bod A ako priesečník priamky p a priamky q. Teda mám trojuholník ABC.*

U: Najskôr však musíme body A a B spojiť úsečkou. Táto konštrukcia je taká triviálna, že ju v ***zápise*** neuvádzame. Je schovaná vo formulácii: zostrojíme trojuholník ABC. Celý zápis konštrukcie si môžeš prezrieť v nasledujúcej tabuľke.

1. $BB_0;\ |BB_0| = 4$ cm
2. $p;\ p \perp BB_0\ \wedge\ B_0 \in p$
3. $k;\ k(B;\ 5\text{ cm})$
4. $C;\ C \in p \cap k$
5. $q:\ q \parallel p\ \wedge\ |q;\ p| = 7$ cm
6. $A;\ A \in p \cap q$
7. ΔABC

U: Podľa úlohy sú dĺžky všetkých zadaných úsečiek známe, preto je nutnou súčasťou riešenia úlohy aj rysovanie. Spolu so zápisom konštrukcie patrí k ***druhej fáze*** konštrukčnej úlohy. Výsledok konštrukcie je na nasledujúcom obrázku. Obrázok komentuj.


p
A_2
q_2
A_2'
q_2'
C
q_1
B_0
a
v_b
B
a
C'
A_1
q_1'
A_1'

Ž: *Kružnica k so stredom v bode B pretne priamku p v dvoch bodoch, C a C'. So stranou BC sú zostrojené dve rovnobežky q_1 a q_2, ktoré pretnú priamku p v bodoch A_1 a A_2. Máme tak dva trojuholníky: trojuholník A_1BC a trojuholník A_2BC. Podobný výsledok vidím od strany BC'. Priamky aj priesečníky sú označené čiarkami. Získame tak ďalšie dva trojuholníky. Úloha má štyri riešenia.*

U: V ***nepolohovej úlohe*** sa za ***riešenia*** považujú iba ***nezhodné trojuholníky***. Trojuholníky A_1BC a $A_1'BC$ sú zhodné. Obrázok je symetrický podľa priamky BB_0.

Ž: *Aha! Aj trojuholníky A_2BC a $A_2'BC$ sú zhodné. Úloha má preto* **dve riešenia**.

U: Poďme sa ešte presvedčiť, či každý z trojuholníkov, ktorý sme narysovali má vlastnosti podľa zadania úlohy.

Ž: *Výška na stranu b určite. Narysovali sme ju v prvom kroku konštrukcie ako úsečku BB_0 dĺžky 4 centimetrov.*

U: Odkiaľ vyplýva, že strana BC má dĺžku 5 centimetrov?

Ž: *Zabezpečili sme to v krokoch 2., 3. a 4. konštrukcie.*

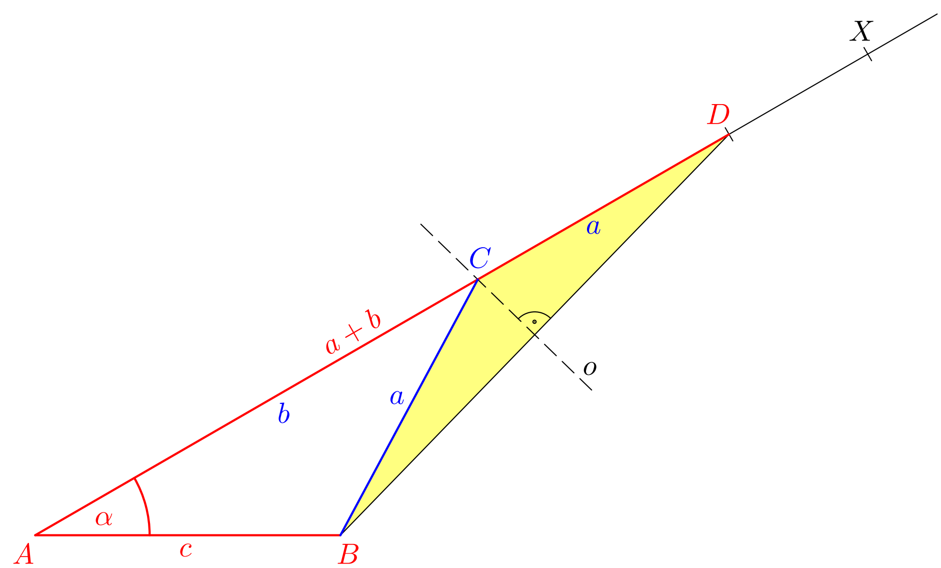
U: Piaty a šiesty krok konštrukcie zdôvodňujú, že výška na stranu a má požadovanú dĺžku 7 centimetrov. Za aktivitu pri riešení úlohy si zaslúžiš pochvalu.

Príklad 2: *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané $\alpha = 30°$, $c = 4$ cm a $a + b = 10{,}5$ cm.*

Ž: *Konštrukčnú úlohu začnem* **rozborom**. *Urobím náčrt trojuholníka ABC a farebne vyznačím zadané úsečky a uhol α. Vlastne, ani neviem ako mám na obrázku vyznačiť zadaný súčet dĺžok úsečiek a a b.*

U: Zadaný súčet vyjadruje dĺžku nejakej tretej úsečky, ktorú zatiaľ v trojuholníku nemáš. Strany a a b musíš dostať do jednej línie. Vtedy budeš mať súčet.

Ž: *Aha! Stranu a prenesiem od bodu C na priamku určenú stranou b. Získam bod D. Úsečka AD má dĺžku $10{,}5$ cm.*



U: Teraz je už obrázok výstižný. Úloha patrí medzi ***nepolohové***. Sú dané iba veľkosti zadaných prvkov, nie je však dané ich umiestnenie. Preto konštrukciu môžeš začať ktoroukoľvek z farebne vyznačených úsečiek alebo uhlom. Samozrejme iba za predpokladu, že popíšeš, ako zostrojiť zvyšné neznáme body trojuholníka.

Ž: *Začal by som úsečkou AB. Potom by som zostrojil uhol α a bod D. Ako sa však dopracujem k bodu C, tak to netuším. Potreboval by som úsečku a alebo úsečku b.*

U: Trochu spomaľ tempo. Ujasníme si ešte raz, ktoré body budeme považovať za ***známe*** a ktoré za ***hľadané body***.

Ž: *Body A a B budú známe. Potrebujeme nájsť body D a C.*

U: Predpokladám, že vieš vyjadriť ***podmienky*** pre zostrojenie bodu D.

Ž: *Bod D patrí polpriamke $\overrightarrow{AX}$, ktorá je druhým ramenom uhla $\sphericalangle BAX$ veľkosti 30 stupňov. Ešte viem, že dĺžka úsečky AD je $10{,}5$ cm. Preto bod D patrí aj kružnici k so stredom v bode A a polomerom $a+b$. To znamená, že bod D získam ako* **priesečník polpriamky** $\overrightarrow{AX}$ *a* **kružnice** k.

U: S podmienkami pre bod C ti teda trochu pomôžem. Je jasné, že bod C patrí úsečke AD. Pozri sa ešte raz na náčrt trojuholníka. Bod D sme zostrojili tak, že sme úsečku a premiestnili na úsečku CD. Vznikol tak zaujímavý trojuholník.

Ž: *Nad tým som už uvažoval. Trojuholník BCD* **je rovnoramenný** *so základňou BD, lebo $|BC| = |CD| = a$. Ako mi to pomôže?*

U: Rovnoramenný trojuholník je vždy osovo súmerný. Vieš určiť podľa ktorej priamky?

Ž: *Jasné! Osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka BDC je os o jeho základne BD. Os prechádza aj hlavným vrcholom C rovnoramenného trojuholníka. Preto zostrojím os úsečky BD. Bod C dostanem ako priesečník osi o a úsečky AD.*

U: Symbolický zápis podmienok pre hľadané body D a C je uvedený v nasledujúcom rámčeku.

1. $|\sphericalangle BAD| = \alpha = 30^\circ \;\Rightarrow\; D \in \overrightarrow{AX},\; |\sphericalangle BAX| = \alpha$
2. $|AD| = a + b = 10{,}5 \text{ cm} \;\Rightarrow\; D \in k(A;\; 10{,}5 \text{ cm})$

$D \in \overrightarrow{AX} \cap\; k$

1. $C \in AD$
2. $|BC| = |CD| = a \;\Rightarrow\; C \in o,\; o = o_{BD}$

$C \in o \cap AD$

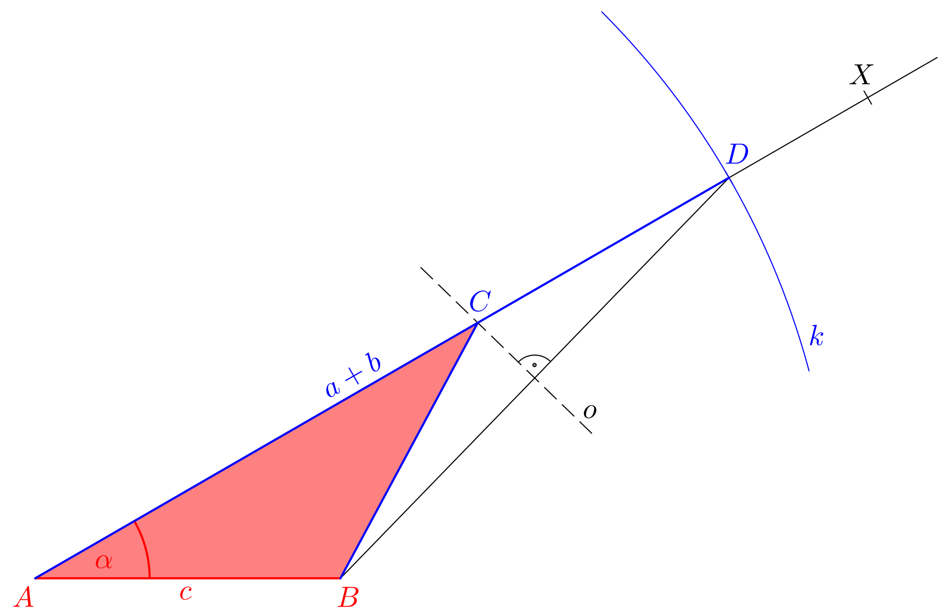
U: Zapísať ***postup konštrukcie*** by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Celý rozbor vlastne zhrniem v jednotlivých krokoch konštrukcie. Začnem stranou AB. Potom pomocou uhla BAX veľkosti 30 stupňov a kružnice k určím bod D. Kružnica má polomer rovný zadanému súčtu $a + b$ a bod A je jej stredom. Nakoniec zostrojím bod C ako priesečník úsečky AD a osi úsečky BD. Teda mám trojuholník ABC.*

U: Najskôr však musíme body C a B spojiť úsečkou. Táto konštrukcia je taká triviálna, že ju v ***zápise*** neuvádzame. Je schovaná vo formulácii: zostrojíme trojuholník ABC. Celý zápis konštrukcie si môžeš prezrieť v nasledujúcom rámčeku.

1. $AB;\; |AB| = 4$ cm
2. $\sphericalangle BAX;\; |\sphericalangle BAX| = 30^\circ$
3. $k;\; k(A;\; 10{,}5 \text{ cm})$
4. $D;\; D \in \overrightarrow{AX} \cap\; k$
5. $o;\; o = o_{BD}$
6. $C;\; C \in o \cap AD$
7. ΔABC

U: Podľa úlohy sú dĺžky všetkých zadaných úsečiek a uhol α známe, preto je nutnou súčasťou riešenia úlohy aj rysovanie. Spolu so zápisom konštrukcie patrí k ***druhej fáze*** konštrukčnej úlohy. Výsledok konštrukcie je na nasledujúcom obrázku. Obrázok komentuj.



Ž: *Kružnica k so stredom v bode A pretne polpriamku AX v jednom bode D. Aj priesečník osi úsečky BD so stranou AD bude jediný. Riešením úlohy je jediný trojuholník ABC.*

U: Keďže východiskom konštrukcie je úsečka AB, mali sme uhol α narysovať aj v opačnej polrovine určenej hraničnou priamkou AB. Celé riešenie v tejto polrovine by bolo s naším trojuholníkom symetrické podľa tejto hraničnej priamky. Získali by sme dva zhodné trojuholníky. Ale za rôzne riešenia ***nepolohovej úlohy*** sa považujú iba ***nezhodné trojuholníky***. Preto máš pravdu. Úloha má iba ***jedno riešenie***.

Ž: *Nemali by sme zdôvodniť správnosť rysovania?*

U: Nechávam to na tvoju samostatnú prácu. Musíš zdôvodniť platnosť obrátených implikácií k tým, ktoré sme uviedli v rozbore ako podmienky pre hľadané body.

Ž: *Využijem k tomu aj zápis konštrukcie.*

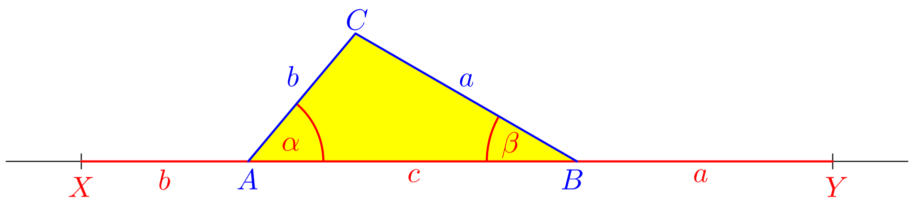
Príklad 3: *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané α, β a obvod trojuholníka $a+b+c$.*

Ž: *Konštrukčnú úlohu začnem* **rozborom**. *Urobím náčrt trojuholníka ABC a farebne vyznačím zadané uhly α a β. Ako mám vyznačiť obvod? Mám vyznačiť každú stranu trojuholníka?*

U: Dĺžky strán predsa nepoznáš. Nemôžeš ich teda vyznačiť farebne. Ak dáš vhodným spôsobom všetky strany trojuholníka do jednej línie, tak získaš úsečku, dĺžka ktorej bude rovnaká ako zadaný obvod.

Ž: *Asi sa nevyjadrím celkom presne. Z toho, čo ste povedali, mi vychádza, že dve strany mám narovnať k tretej strane trojuholníka. Je jedno ku ktorej?*

U: Nie. Keďže sú zadané dva vnútorné uhly, tak trojuholník narovnaj k strane c.



Ž: *No dobre. Dostali sme body X a Y, ktorých vzdialenosť je $a+b+c$. Čo s nimi? Veď nemáme body A a B, tak nezostrojíme ani bod C.*

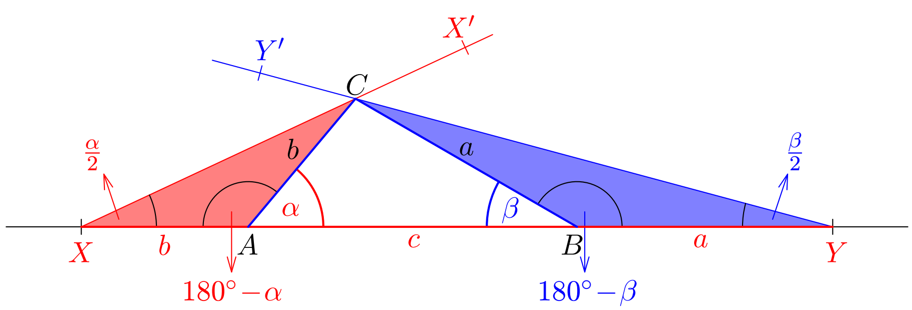
U: Mýliš sa. Najskôr zostrojíme bod C a potom nájdeme aj zvyšné vrcholy trojuholníka.

Ž: *Chcete povedať, že* **známymi bodmi** *budú body X a Y a všetky vrcholy trojuholníka sú* **neznáme**?

U: Presne tak. Bod C zostrojíme pomerne ľahko. Pozri sa ešte raz na náčrt. Okrem trojuholníka ABC vznikli ešte ďalšie dva zaujímavé trojuholníky. Veď strany a a b sme prenášali.

Ž: *Jasné. Trojuholníky XAC a YCB sú rovnoramenné. Ako mi to len pomôže?... Počkajte... Už to mám. Vyjadrím si uhly pri vrcholoch X a Y. Uhol XAC je* **susedný** *s uhlom α pri vrchole A. Má teda veľkosť $180° - \alpha$. Na uhly pri základni CX preto zvýši veľkosť α. Keďže sú rovnaké, tak platí*

$$|\sphericalangle AXC| = \frac{\alpha}{2}.$$

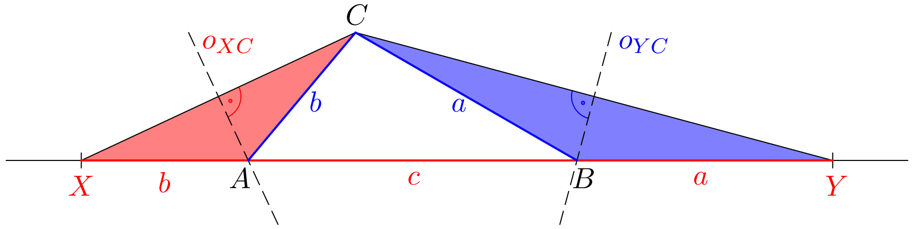


U: Situácia pre uhol pri vrchole Y rovnoramenného trojuholníka YCB je analogická. Pozri na obrázok. Preto platí

$$|\sphericalangle BYC| = \frac{\beta}{2}.$$

Ž: *To ale znamená, že bod C získam ako* **priesečník** *polpriamok XX' a YY'.*

U: Rovnoramennosť trojuholníka XAC so základňou XC ti pomôže určiť aj jeho vrchol A.



Ž: *Samozrejme, sám som na to myslel.* **Hlavný vrchol** *rovnoramenného trojuholníka leží predsa na* **osi základne**. *Vrchol A preto zostrojím ako* **priesečník** *úsečky XY a osi o_{XC} úsečky XC. Ešte šťastie, že rovnakú fintu využijem aj pri konštrukcii bodu B. Teraz však využijem os o_{YC} úsečky YC.*

U: ***Podmienky pre všetky hľadané body*** sú zapísané symbolicky v nasledujúcom rámčeku.

1. $|\sphericalangle YXC| = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow C \in \overrightarrow{XX'},\ |\sphericalangle YXX'| = \dfrac{\alpha}{2}$
2. $|\sphericalangle XYC| = \dfrac{\beta}{2} \Rightarrow C \in \overrightarrow{YY'},\ |\sphericalangle XYY'| = \dfrac{\beta}{2}$

$C \in \overrightarrow{XX'} \cap \overrightarrow{YY'}$

$A \in XY \cap o_{XC}$

$B \in XY \cap o_{YC}$

U: Zapísať ***postup konštrukcie*** by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Celý rozbor vlastne zhrniem v jednotlivých krokoch konštrukcie. Začnem úsečkou XY, ktorej veľkosť je $a + b + c$. Potom pomocou uhlov YXX' a XYY' zostrojím bod C. Os úsečky XC pretne úsečku XY v bode A a priesečníkom osi úsečky YC a úsečky XY je bod B. Mám trojuholník ABC.*

U: Najskôr však musíme zostrojiť úsečky AC a BC. Tieto konštrukcie sú však také triviálne, že ich v ***zápise*** neuvádzame. Sú schované vo formulácii: zostrojíme trojuholník ABC. Celý zápis konštrukcie si môžeš prezrieť v nasledujúcej tabuľke.

1. $XY;\ |XY| = a + b + c$
2. $\sphericalangle YXX';\ |\sphericalangle YXX'| = \dfrac{\alpha}{2}$
3. $\sphericalangle XYY';\ |\sphericalangle XYY'| = \dfrac{\beta}{2}$
4. $C;\ C \in \overrightarrow{XX'} \cap \overrightarrow{YY'}$
5. $A;\ A \in XY \cap o_{XC}$
6. $B;\ B \in XY \cap o_{YC}$
7. ΔABC

Ž: *Nebudeme rysovať?*

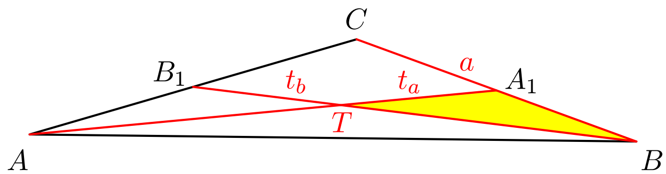
U: Nie. Táto úloha je ***parametrická***. Hodnoty zadaných prvkov trojuholníka nie sú známe. Uhly α, β a obvod trojuholníka $a+b+c$ sú parametrami úlohy. Od ich hodnôt závisí počet riešení úlohy. Máš predstavu ako?

Ž: *Podľa mňa sa vždy dá narysovať jeden trojuholník ABC. Jedine, ak budete zlomyseľný a zadáte také uhly α a β, že ich súčet je väčší ako 180 stupňov.*

U: V podstate máš pravdu. ***Trojuholník*** XYC vlastne zostrojíme podľa vety ***(usu)***. Vzniknú dva zhodné trojuholníky, ktoré nepovažujeme za rôzne riešenia. Nájsť body A a B uvedeným spôsobom je už jednoznačná záležitosť. Úloha má skutočne ***jediné riešenie***.

Príklad 4: *Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané $|BC| = 4$ cm, $t_a = 6{,}3$ cm a $t_b = 6$ cm.*

U: Pozri sa na ***náčrt*** trojuholníka. Sú v ňom farebne vyznačené zadané úsečky. Stredy strán, ktoré určujú ťažnice na strany a a b, sme označili symbolmi A_1 a B_1. Dôležitý je ešte jeden bod trojuholníka ABC. Vieš ktorý?



Ž: *Ťažnice trojuholníka sa pretnú v* **ťažisku** *T trojuholníka. To by mi mohlo pomôcť … Už to mám. Najskôr narysujem trojuholník BA_1T. Poznám všetky jeho strany. Úsečka BA_1 je polovicou strany a a na určenie dĺžok ostatných úsečiek využijem vlastnosť ťažiska trojuholníka. Ťažisko rozdeľuje ťažnicu na dve časti v* **pomere** $2:1$. *Dva diely prislúchajú tej časti, ktorá je určená vrcholom trojuholníka. Preto platí:*

$$|BA_1| = 2 \text{ cm} \qquad |TA_1| = 2{,}1 \text{ cm} \qquad |TB| = 4 \text{ cm}.$$

U: Konštrukciu trojuholníka BA_1T podľa vety ***(sss)*** si zdôvodnil excelentne. Táto konštrukcia patrí medzi základné, preto ju uvedieme v zápise v jednom kroku. Ako však zostrojíš body C a A trojuholníka?

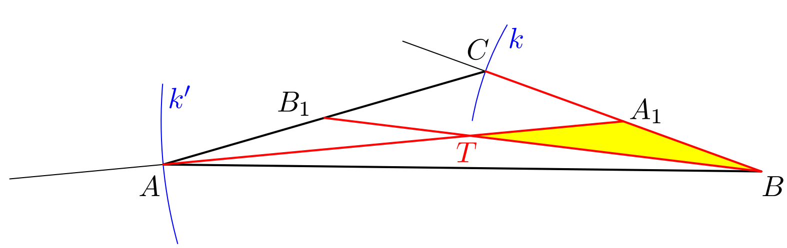
Ž: *Aj toto bude triviálne. Bod A_1 je predsa stredom úsečky BC. Preto prenesiem vzdialenosť A_1B na opačnú stranu a mám bod C.*

U: Trochu to upresním. Bod C vyhovuje dvom podmienkam. Patrí ***polpriamke opačnej*** k polpriamke $\overrightarrow{A_1B}$ a kružnici k so stredom v bode A_1 a polomerom 2 centimetre.

Ž: *Bod C je teda* **priesečníkom** *týchto dvoch útvarov. S tou polpriamkou opačnou k polpriamke A_1B ste to vyriešili prefíkane. Vyhli ste sa možnosti, že kružnica by pretla priamku A_1B aj bode B. Tento bod nemôže byť aj bodom C.*

U: Verím, že takto precízne vyjadríš ***podmienky pre bod*** A.

Ž: *V pohode. Bude to analogické. Bod A získam ako priesečník polpriamky opačnej k polpriamke $\overrightarrow{TA_1}$ a kružnice k' so stredom v bode T. Polomer kružnice má dĺžku dvoch tretín ťažnice t_a, teda 4,2 centimetra. Musím uznať, že sa mi táto úloha páči. Nie je veľmi náročná.*



U: Ani iné úlohy nie sú náročné, pokiaľ vieš prísť na fintu ich riešenia. Nie sme ale na konci riešenia. zatiaľ sme slovne popísali ***rozbor úlohy***. Urobíme to teraz zápisom pomocou matematických symbolov. Všetko sme už povedali. Stačí, ak sa pozrieš do nasledujúcej tabuľky.

$\Delta BA_1T,\ |BA_1| = 2$ cm, $|TA_1| = 2{,}1$ cm, $|TB| = 4$ cm

1. $C \in \overrightarrow{A_1B}^*$
2. $|A_1C| = 2$ cm $\Rightarrow$ $C \in k(A_1;\ 2$ cm$)$

$C \in \overrightarrow{A_1B}^* \cap k$

1. $A \in \overrightarrow{TA_1}^*$
2. $|TA| = 4{,}2$ cm $\Rightarrow$ $A \in k'(T;\ 4{,}2$ cm$)$

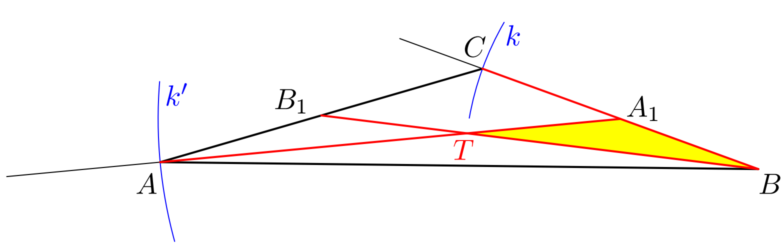
$A \in \overrightarrow{TA_1}^* \cap k'$

U: ***Postup konštrukcie*** budeš schopný zapísať aj sám.

Ž: *Samozrejme. Veď všetko je jasné. V podstate som to povedal už v rozbore konštrukcie. Jednotlivé kroky konštrukcie sú uvedené v tabuľke.*

1. $\Delta BA_1T,\ |BA_1| = 2$ cm, $|TA_1| = 2{,}1$ cm, $|TB| = 4$ cm
2. $k;\ k(A_1;\ 2$ cm$)$
3. $C;\ C \in \overrightarrow{A_1B}^* \cap k$
4. $k';\ k'(T;\ 4{,}2$ cm$)$
5. $A;\ A \in \overrightarrow{TA_1}^* \cap k'$
6. ΔABC

U: Výsledok konštrukcie máš možnosť vidieť na nasledujúcom obrázku. Podľa 1. kroku konštrukcie sa dajú zostrojiť dva zhodné trojuholníky. Ten druhý na obrázku nemáš, lebo za rôzne riešenia pri ***nepolohovej úlohe*** sa považujú iba ***nezhodné trojuholníky***. Body C a A sa však už dajú zostrojiť jednoznačne.



Ž: *Skúsim ešte zdôvodniť, že narysovaný trojuholník má požadované vlastnosti podľa zadania úlohy. Z prvých troch krokov konštrukcie vyplýva, že úsečka BC má dĺžku* 4 cm*. Z* 1.*,* 4. *a* 5. *kroku konštrukcie vyplýva, že ťažnica na stranu a má dĺžku* 6,3 cm*. Dĺžka úsečky TB je rovná dvom tretinám ťažnice na stranu b a podľa* 4. *a* 5. *kroku je bod T ťažiskom trojuholníka ABC. Teda aj ťažnica na stranu b má požadovanú dĺžku* 6 *centimetrov.*

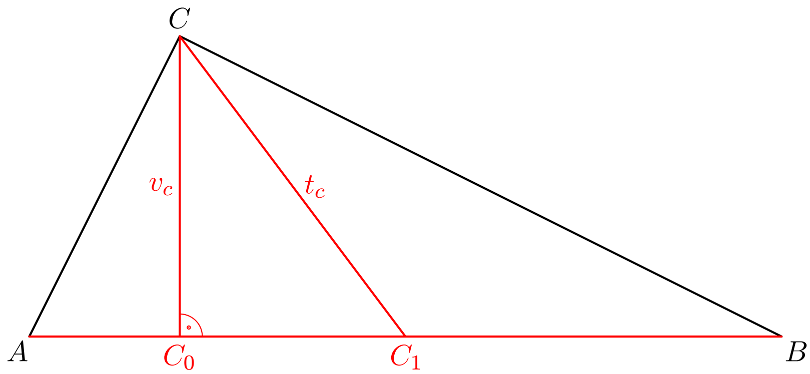
U: Vidím, že sa ti úloha páčila. Zvládol si ju excelentne. Zaslúžiš si pochvalu.

Príklad 5: *Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná strana c, výška v_c na stranu c a ťažnica t_c na stranu c.*

Ž: *Mám dojem, že som sa s takouto úlohou už stretol. Boli však dané dĺžky zadaných úsečiek.*

U: Ak sa pamätáš na pointu riešenia, tak nám riešenie úlohy pôjde určite rýchlejšie. Je porovnateľné s prípadom, keď si poznal číselné hodnoty. Naša úloha je však ***parametrická***. Preto v závere budeme robiť diskusiu o počte riešení. Toto bude pre teba niečím novým.

Ž: *Zdôvodniť, ako sa trojuholník narysuje, určite nebude pre mňa problém. Načrtnem si obrázok a určite si spomeniem na postup.*



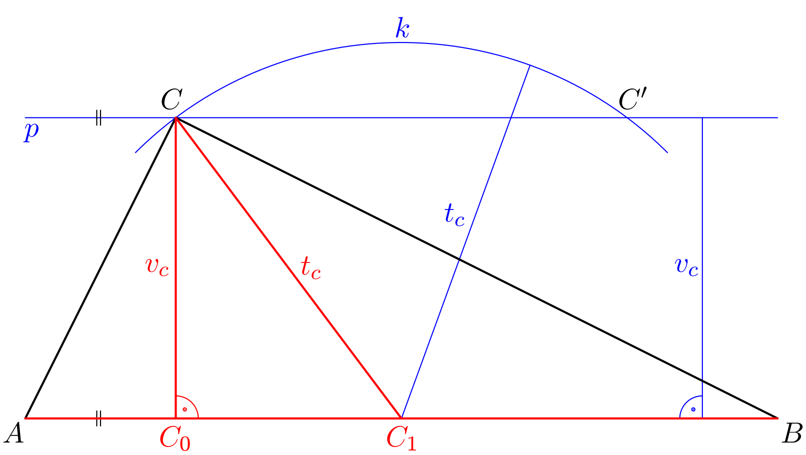
Ž: *V trojuholníku som farebne vyznačil zadané prvky. Je jasné, že najskôr narysujem stranu AB. Zostáva mi zostrojiť vrchol C trojuholníka. Tento bod určite leží na kružnici.*

U: Prečo? Vieš zdôvodniť?

Ž: *Úsečka C_1C je zadanou ťažnicou. Mám už narysovanú úsečku AB, tak viem zostrojiť aj jej stred C_1. Bod C má však tú vlastnosť, že jeho vzdialenosť od pevného bodu C_1 je rovná dĺžke ťažnice t_c. Takéto body však ležia na kružnici $k(C_1;\ t_c)$. Preto tejto kružnici patrí aj bod C.*

U: Tvoje zdôvodnenie nemalo chybu. Určite si však uvedomuješ, že bod C nie je určený jednou kružnicou jednoznačne.

Ž: *Nebojte sa. Využijem ešte zadanú výšku v_c na stranu c. Veď výška vyjadruje* **vzdialenosť** *bodu C od priamky AB. Všetky body, ktoré majú od priamky AB vzdialenosť rovnú zadanej výške, patria priamke p rovnobežnej s priamkou AB. Vzdialenosť týchto priamok je práve v_c.*



U: Nezabudni, že takéto priamky sú dve.

Ž: *Stačí narysovať iba jednu. Veď obrázok by bol osovo symetrický podľa priamky AB. Úloha je* **nepolohová**. *Za rôzne riešenia sa rátajú iba* **nezhodné trojuholníky**. *Viem si predstaviť, že od druhej priamky by vznikli osovo súmerné trojuholníky s tými, ktoré dostanem od jednej priamky. Nebudú to iné riešenia.*

Ž: *Prekvapuješ ma v pozitívnom smere. Je vidieť, že si sa v konštrukčných úlohách už zorientoval. Dopovedz teda pointu riešenia úlohy.*

Ž: *Bod C získam ako* **priesečník** *priamky p a kružnice k.*

U: Veľmi pekne si zvládol ***rozbor*** konštrukčnej úlohy. Všetko povedané je zhrnuté v nasledujúcej tabuľke pomocou matematickej symboliky.

1. $|CC_1| = t_c \;\Rightarrow\; C \in\; k(C_1;\; t_c)$
2. $|C; \overleftrightarrow{AB}| = v_c \;\Rightarrow\; C \in\; p,\; p \,||\, \overleftrightarrow{AB},\; |p; \overleftrightarrow{AB}| = v_c$

$C \in\; k \cap p$

Ž: *Z rozboru vyplýva aj* **postup konštrukcie**. *Od úsečky AB, cez kružnicu k a priamku p sa dopracujem k bodu C. Spojím body A, B s vrcholom C a mám trojuholník ABC.*

1. $AB;\; |AB| = c$
2. $k;\; k(C_1;\; t_c)$
3. $p;\; p \,||\, \overleftrightarrow{AB},\; |p; \overleftrightarrow{AB}| = v_c$
4. $C;\; C \in\; k \cap p$
5. ΔABC

U: Je ti jasné, že počet riešení úlohy závisí od parametrov v_c a t_c. Konštrukcia bodu C nezávisí od dĺžky strany c.

Ž: *Samozrejme. Bod C získam ako* **priesečník** *kružnice k a priamky p, ktoré sú charakterizované zadanou výškou a ťažnicou. Keď tak rozmýšľam, tak kružnica a priamka môžu mať dva spoločné body, jeden bod alebo žiaden.*

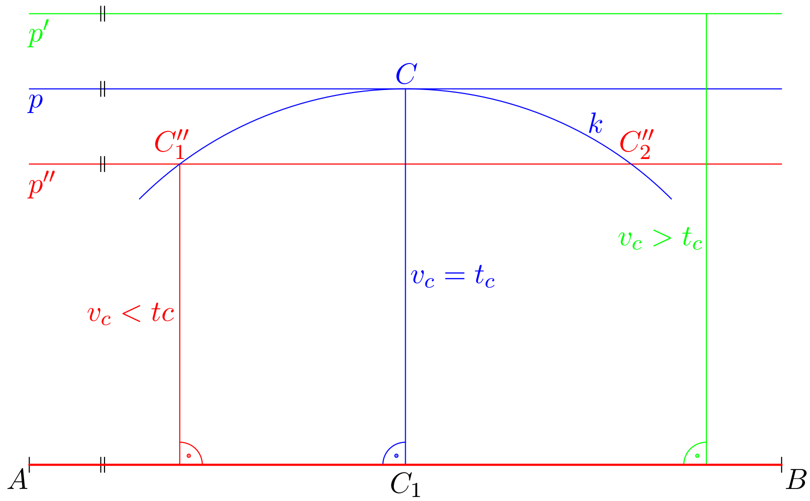
U: Začni jedným spoločným bodom. Je to jednoduchší prípad vzájomnej polohy priamky a kružnice.

Ž: *Jeden spoločný bod? Moment ... Vtedy sa kružnica musí dotýkať priamky. Jasné! Polomer kružnice je rovnaký ako vzdialenosť priamok p a AB. Teda, ak $t_c = v_c$, tak úloha má jedno riešenie.*

U: Ak polomer kružnice zväčšíme, tak kružnica pretne priamku p v dvoch bodoch. Získame však dva ***zhodné*** trojuholníky, ktoré nepovažujeme za rôzne riešenia. Aj pre $t_c > v_c$ má úloha jedno riešenie.

Ž: *Čiže v prípade $t_c < v_c$ nemá úloha riešenie. Priamka a kružnica sa nepretnú.*

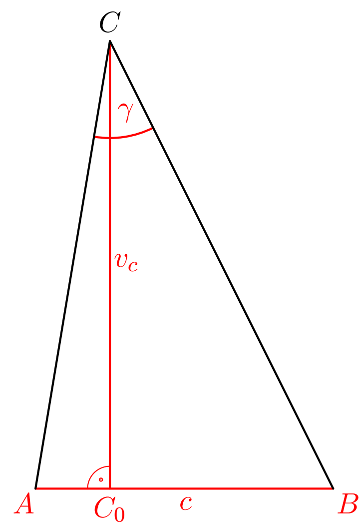
U: Správne. Aj toto si môžeš pozrieť v nasledujúcej tabuľke a porovnať s obrázkom.



$$\boxed{\begin{array}{l} t_c \geqq v_c \;\Rightarrow\; 1 \;\; \Delta \\ t_c < v_c \;\Rightarrow\; 0 \;\; \Delta \end{array}}$$

Príklad 6: *Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná strana AB dĺžky 4 centimetre, výška $v_c = 6$ cm a uhol $\gamma = 30°$.*

Ž: *Začnem* **náčrtom**. *Vyznačím si v ňom farebne to, čo je dané.*



U: Ako by si konštrukciu začal?

Ž: *Zdá sa mi, že budem musieť vyjadriť podmienky pre bod C. Konštrukciu určite začnem stranou AB.*

U: Máš pravdu. Úloha je ***polohová***. Je určená poloha AB úsečky c dĺžky 4 centimetre. To ale znamená, že body A a B považujeme za ***známe*** a vrchol C trojuholníka za ***hľadaný*** bod. Vieš vyjadriť nejakú podmienku pre bod C?

Ž: *Skúsim. Mal by som využiť uhol γ a výšku v_c. Jednoduchšie bude využiť výšku, lebo vyjadruje* **vzdialenosť** *bodu C od priamky AB. Bod C teda patrí priamke p rovnobežnej s priamkou AB. Ich vzdialenosť je určená výškou v_c. Ako využiť uhol γ však potrebujem poradiť.*

U: Spomínaš si na ***stredový*** a ***obvodový*** uhol?

Ž: *Pripomeniete mi, o čo ide?*

U: Vrchol C trojuholníka je bodom, z ktorého vidíme úsečku AB pod uhlom 30 stupňov. Množinou všetkých bodov X v rovine, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom 30 stupňov je ***zjednotenie*** väčších oblúkov dvoch kružníc. Oblúky prislúchajú tetive AB a stredmi kružníc sú také body S, že uhol ASB má veľkosť 60 stupňov.

Ž: *A kde sú tam stredové a obvodové uhly?*

U: Zadaný uhol γ je obvodovým uhlom prislúchajúcim tetive AB kružnice a uhol ASB je k nemu stredový. Navyše vieme, že stredový uhol má vždy ***dvojnásobnú veľkosť*** ako obvodový. Preto má uhol ASB veľkosť 60 stupňov. Množinu bodov X tejto vlastnosti označíme písmenom μ gréckej abecedy. Preto platí

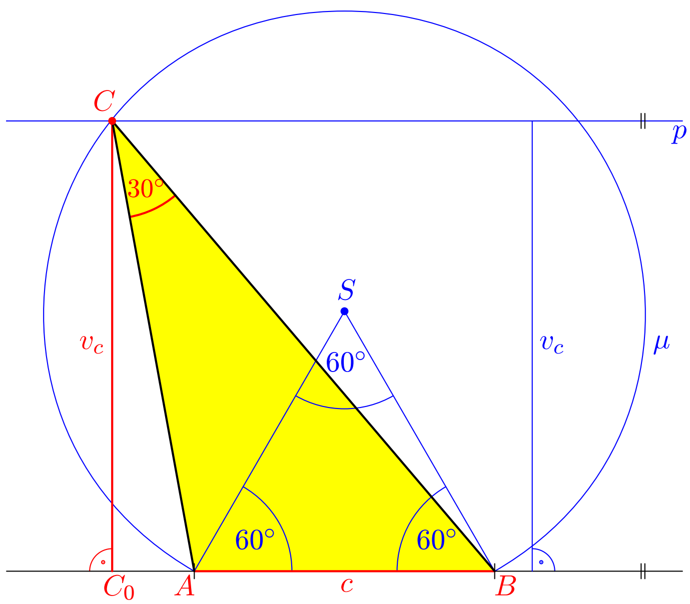
$$\mu = \{X \in E_2 : \ |\sphericalangle AXB| = 30°\} .$$

Ž: *Trochu si spomínam. Túto množinu sme vždy zapísali v jednom kroku konštrukcie. Potom som mal problém, ako ju narysovať. Mohli by ste to pripomenúť?*

U: Samozrejme, aj keď musím priznať, že konštrukciu množiny μ považujeme za základnú konštrukciu. Preto ju zapisujeme v jednom kroku. Na jej zostrojenie je potrebné nájsť stred S. Povedali sme, že uhol ASB má v našom prípade veľkosť 2γ, teda 60 stupňov. Úsečka AB je tetivou hľadanej kružnice, teda SA a SB sú polomery.

Ž: *To znamená, že trojuholník ASB je rovnoramenný. Dokonca rovnostranný, lebo uhly SAB a ABS sú rovnaké a zvyšuje na nich 120 stupňov.*

U: No vidíš. Z kružnice so stredom v bode S a polomerom AS narysuješ iba väčší oblúk prislúchajúci tetive AB. To preto, lebo obvodový uhol ACB je 30 stupňov.



Ž: *Ak by bol obvodový uhol tupý, tak by sme zobrali menší oblúk?*

U: Pochopil si správne. Vráťme sa však k našej úlohe. Dopracovali sme sa teda k tomu, že bod C nájdeme ako ***priesečník*** priamky p a množiny μ.

Ž: *Už sa teším na rysovanie. Som zvedavý, či sa mi podarí zostrojiť množinu μ.*

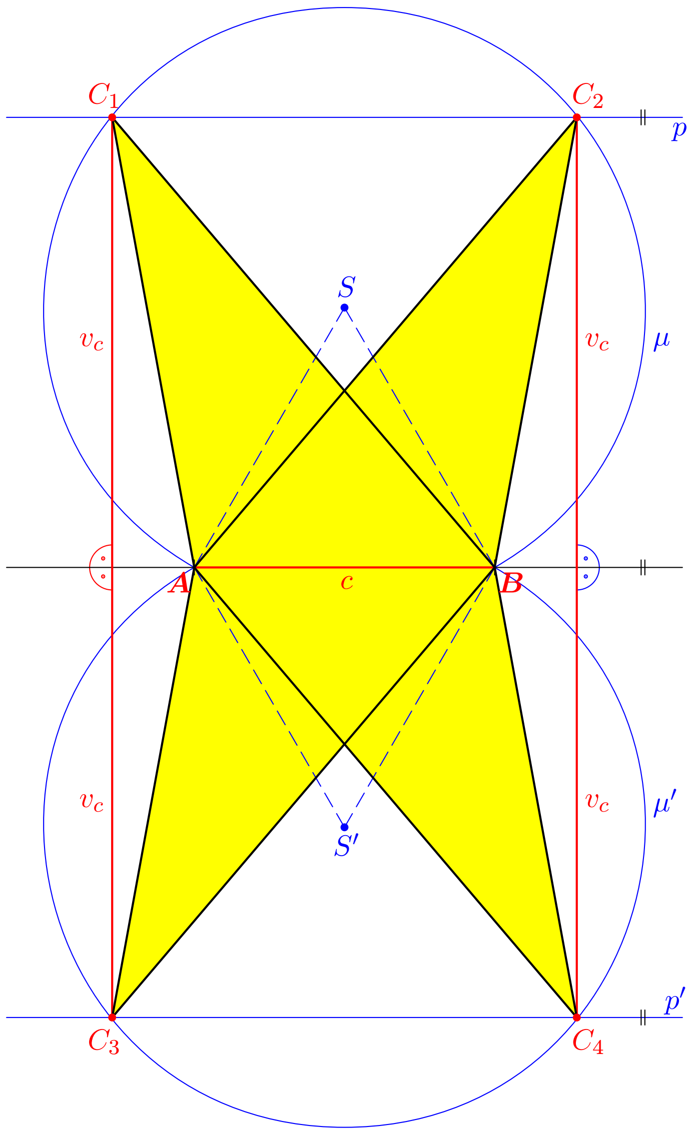
U: Podelíme si prácu. Najskôr ja zhrniem podmienky pre hľadaný bod C a potom ty zapíšeš postup konštrukcie.

1. $|C;\overleftrightarrow{AB}| = v_c \;\Rightarrow\; C \in p: \; p \parallel \overleftrightarrow{AB}, \; |p;\overleftrightarrow{AB}| = 6 \text{ cm}$
2. $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ \;\Rightarrow\; C \in \mu : \mu = \{X \in E_2 : \; |\sphericalangle AXB| = 30^\circ\}$

$C \in p \cap \mu$

Ž: *Ja to všetko vlastne v zápise zopakujem. Pozrite sa na výsledok v tabuľke.*

1. AB; $|AB| = 4$ cm
2. p; $p \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $|p; \overleftrightarrow{AB}| = 6$ cm
3. μ; $\mu = \{X \in E_2 : \ |\sphericalangle AXB| = 30°\}$
4. C; $C \in p \cap \mu$
5. ΔABC



U: Výsledok tvojho rysovania ukazuje, že táto ***polohová*** úloha má ***štyri riešenia***.