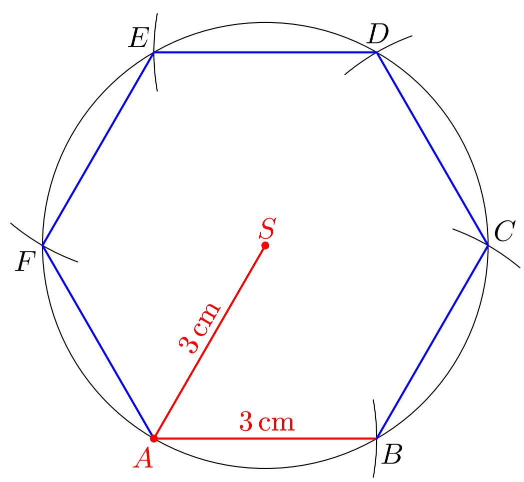
Konštrukcia mnohouholníkov s využitím množín všetkých bodov danej vlastnosti

RNDr. Marián Macko

U: Spomínaš si zo základnej školy na ***konštrukciu pravidelného šesťuholníka so stranou*** a ***dĺžky*** 3 ***centimetre***?

Ž: *Je celkom zaujímavá. Na postup konštrukcie pravidelného šesťuholníka sa nedá zabudnúť. Na kružnici s polomerom* 3 *centimetre si zvolím bod* A *a od neho nanesiem šesť rovnakých oblúčikov. Využijem k tomu kružnice s polomerom* 3 *centimetre.*



Ž: *Prečo sa pýtate?*

U: Pretože sa budeme zaoberať konštrukciou mnohouholníkov.

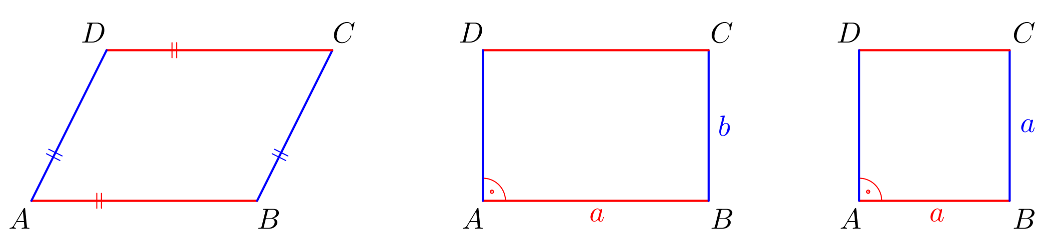
Ž: *Teda aj štvorcov, rovnobežníkov a lichobežníkov?*

U: Áno, veď aj to sú mnohouholníky. Je zaujímavé, že všetky, ktoré si vymenoval, sú zároveň štvoruholníkmi.

Ž: *Jasné! Veď s týmito útvarmi sa v rôznych úlohách stretávam asi najviac. Často som počítal ich obvody, obsahy, veľkosti vnútorných uhlov ... Ale teraz, ak som dobre porozumel, sa budeme zaoberať ich konštrukciou.*

U: Veru tak. Na úvod však nezaškodí pripomenúť si základné charakteristiky týchto rovinných útvarov. Začnime rovnobežníkom. Ako by si ho charakterizoval?

Ž: **Rovnobežník** *je štvoruholník, ktorého* **protiľahlé strany sú na navzájom rovnobežných priamkach**.



U: Na predchádzajúcom obrázku sú okrem rovnobežníka aj jeho špeciálne prípady a to obdĺžnik a štvorec. Čím sa vyznačujú?

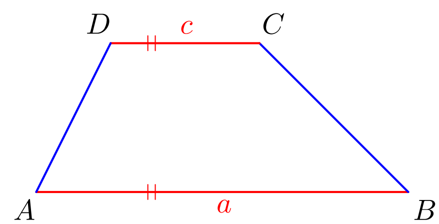
Ž: ***Obdĺžnik*** *je rovnobežník, ktorého* ***všetky vnútorné uhly sú pravé****. To znamená, že susedné strany obdĺžnika sú na seba kolmé. Ak navyše* ***susedné strany obdĺžnika majú rovnakú dĺžku****, vznikne* ***štvorec****.*

U: Existuje ešte jeden špeciálny prípad rovnobežníka. Jeho susedné strany sú rovnako dlhé.

Ž: *Zrejme máte na mysli* ***kosoštvorec****. Jeho uhlopriečky, podobne ako v štvorci, sú na seba* ***kolmé****.*

U: A čo lichobežník?

Ž: *Na rozdiel od rovnobežníkov, u* ***lichobežníkov*** *stačí, ak* ***iba dve jeho protiľahlé strany ležia na navzájom rovnobežných priamkach****.*



U: Pripomeniem, že tieto dve strany nazývame ***základne lichobežníka*** a zvyšné dve strany sú ***ramená lichobežníka***. S týmito pojmami sa veľmi často stretneš v úlohách o lichobežníkoch.

U: Nemali by sme však zabudnúť na to, že aj trojuholník patrí medzi mnohouholníky. Je to mnohouholník s najmenším počtom strán. Ak ovládaš konštrukcie trojuholníka, tak konštrukcia štvoruholníka by pre teba nemala byť až takým problémom.

Ž: *Ako súvisia konštrukcie štvoruholníkov s trojuholníkmi?*

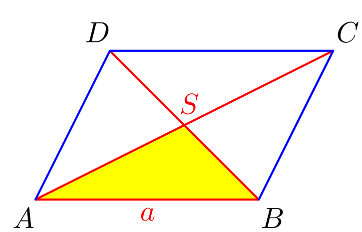
U: Každý ***konvexný štvoruholník*** predsa vieme rozdeliť na dva neprekrývajúce sa trojuholníky. Vo väčšine prípadov treba postupne narysovať každý z týchto trojuholníkov, a tak dostaneme štvoruholník. Samozrejme, že sú aj prípady, keď v štvoruholníku musíme nejaké úsečky dokresľovať. Aj vtedy však získame trojuholník, konštrukcia ktorého je východiskom k celému štvoruholníku.

Ž: *Mohli by sme to vyskúšať na príklade?*

U: V poriadku. Zadám pomerne jednoduchú úlohu. Máme ***zostrojiť rovnobežník*** $ABCD$***, ak sú dané dĺžky uhlopriečok*** AC ***a*** BD ***a dĺžka*** a ***strany*** AB.

Ž: *Dobre, ale nezadali ste žiadne číselné hodnoty.*

U: Daná úloha je ***parametrická***. Jej dôležitou súčasťou bude diskusia, ktorá je však poslednou fázou konštrukčnej úlohy. Začnime preto prvou fázou konštrukčnej úlohy, ktorou je rozbor. Obsahuje náčrt rovnobežníka. V náčrte sú farebne vyznačené zadané úsečky.



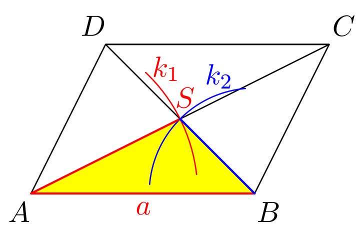
Ž: *Mali ste pravdu. Je to jednoduchá úloha. Stačí narysovať trojuholník ASB, kde bod S je priesečníkom uhlopriečok. Body C a D už nájdem pomerne ľahko.*

U: No, vidíš! V náčrte si objavil trojuholník ASB, ktorého konštrukcia vedie k narysovaniu rovnobežníka $ABCD$. Poďme však od začiatku. To, že najskôr narysujeme trojuholník ASB sa premietne do známych a hľadaných bodov rovnobežníka. Skús ich vymenovať.

Ž: *Za známe body budem považovať body A a B. Hľadanými bodmi rovnobežníka budú body S, C a D.*

U: Ako nájdeš bod S, ak body A a B sú známe?

Ž: *Bod S je stredom uhlopriečky AC, takže úsečka AS má dĺžku $\frac{|AC|}{2}$. Preto zostrojím kružnicu k_1 so stredom v bode A a polomerom $\frac{|AC|}{2}$. Rovnako viem zdôvodniť, že vzdialenosť bodu S od bodu B je polovicou dĺžky uhlopriečky BD. Preto zostrojím kružnicu k_2 so stredom v bode B a polomerom $\frac{|BD|}{2}$. Bod S získam ako priesečník týchto dvoch kružníc.*



U: Tieto podmienky môžeme pomocou matematickej symboliky zapísať tak, ako je to uvedené v nasledujúcej tabuľke.

$$|AS| = \frac{|AC|}{2} \Rightarrow S \in k_1;\ k_1\left(A;\ \frac{|AC|}{2}\right)$$
$$|BS| = \frac{|BD|}{2} \Rightarrow S \in k_2;\ k_2\left(A;\ \frac{|BD|}{2}\right)$$
$$S \in k_1 \cap k_2$$

U: Potrebujeme zostrojiť ešte body C a D rovnobežníka.

Ž: *Na ich konštrukciu využijem stredovú súmernosť. Stredom súmernosti je priesečník S uhlopriečok rovnobežníka.*

U: Prečo?

Ž: *Veď sme povedali, že bod S je zároveň stredom uhlopriečok AC a BD. Vzdialenosť SC je taká istá ako vzdialenosť SA. Rovnaké sú aj dĺžky úsečiek BS a SD. Preto sa v stredovej súmernosti so stredom v bode S zobrazí bod A do bodu C a bod B sa zobrazí do bodu D.*

$$|AS| = |SC| \wedge C \in \overleftrightarrow{AS} \Rightarrow S_S : A \to C$$
$$|BS| = |SD| \wedge D \in \overleftrightarrow{BS} \Rightarrow S_S : B \to D$$

U: Rozbor konštrukčnej úlohy si zvládol celkom dobre. Verím, že takto zvládneš aj druhú fázu konštrukčnej úlohy.

Ž: *Máte na mysli zápis konštrukcie?*

U: Áno. Zápis konštrukcie je vlastne postupnosťou krokov, ktoré musíme vykonať, aby sme sa od známych bodov dopracovali k výslednému útvaru. Popisuje geometrické útvary, pomocou ktorých zostrojíme neznáme body hľadaného rovnobežníka.

Ž: *Ale to potom dosť súvisí s rozborom úlohy.*

U: Máš pravdu. Zápis konštrukcie je ucelenejšou a prehľadnejšou formou vyjadrenia myšlienok z rozboru. Pokús sa o to najskôr slovne.

Ž: *Najskôr narysujem úsečku AB zadanej dĺžky. Na to, aby som získal bod S, potrebujem zostrojiť dve kružnice. Jedna kružnica bude mať stred v bode A a jej polomerom bude polovica zadanej dĺžky uhlopriečky AC. Stredom druhej kružnice bude bod B a jej polomer bude polovicou zadanej dĺžky uhlopriečky BD rovnobežníka. Ale tieto dve kružnice sa mi pretnú v dvoch bodoch. Získam teda dve riešenia pre priesečník S uhlopriečok.*

U: To, koľko riešení má úloha, nie je v zápise konštrukcie podstatné. Rozbor a zápis konštrukcie majú ukázať, ako vôbec nájdeme ***aspoň jedno riešenie úlohy***. Či toto riešenie existuje, alebo je ich viac, budeme analyzovať v poslednej fáze konštrukčnej úlohy. Pokračuj teda v slovnej formulácii zápisu konštrukcie. Získal si bod S. Čo ďalej?

Ž: *Dobre, porozumel som. V stredovej súmernosti so stredom v bode S zobrazím bod A. Získam takto bod C. Bod D je obrazom bodu B, tiež v stredovej súmernosti podľa bodu S. Stačí mi spojiť zodpovedajúce vrcholy a mám rovnobežník $ABCD$.*

U: Súčasťou tejto fázy riešenia konštrukčnej úlohy je aj vlastná konštrukcia. Urobili by sme ju v prípade, keď v zadaní úlohy sú určené číselne hodnoty všetkých veličín. Naša úloha však patrí medzi parametrické, preto v jej riešení bude dôležitá diskusia.

1. $AB;\ |AB| = a$
2. $k_1;\ k_1\left(A;\ \dfrac{|AC|}{2}\right)$
3. $k_2;\ k_2\left(B;\ \dfrac{|BD|}{2}\right)$
4. $S;\ S \in k_1 \cap k_2$
5. $C;\ S_S:\ A \to C$
6. $D;\ S_S:\ B \to D$
7. $ABCD$

U: Treťou fázou konštrukčnej úlohy je dôkaz správnosti konštrukcie. Máme v ňom overiť, či ***nutné podmienky*** z rozboru sú aj ***postačujúce*** pre konštrukciu rovnobežníka.

Ž: *Čo to znamená?*

U: V našom prípade ide o zdôvodnenie, že každý rovnobežník, ktorý zostrojíme podľa uvedeného postupu konštrukcie, má ***stranu*** AB dĺžky a, ako aj ***uhlopriečky*** AC a BD požadovanej veľkosti.

Ž: *To, že strana AB má dĺžku a centimetrov vyplýva predsa z prvého kroku konštrukcie.*

U: Máš pravdu. Podobne zdôvodníme aj zvyšné úsečky. Podľa kroku 4. konštrukcie sme bod S zostrojili ako priesečník dvoch kružníc. Jedna kružnica, ako to vyplýva z kroku 2. konštrukcie, má polomer rovný polovici uhlopriečky AC a polomer druhej kružnice je podľa kroku 3. rovný polovici uhlopriečky BD.

Ž: *Aha! Teda úsečky AS a BS majú polovičnú veľkosť ako zadané uhlopriečky. Ale podľa* 5. *kroku konštrukcie bod C zostrojíme ako obraz bodu A v osovej súmernosti podľa stredu S. Z toho vyplýva, že úsečka AC má požadovanú veľkosť. Dĺžku uhlopriečky BD vieme zdôvodniť analogicky. Využijeme však* 6. *krok konštrukcie.*

U: To znamená, že podľa zápisu konštrukcie narysujeme rovnobežník s úsečkami požadovaných veľkostí.

Ž: *Ale, čo ak si zvolím také číselné hodnoty, že žiaden rovnobežník nedostanem?*

U: Vieš povedať, kedy sa to môže stať? Od konštrukcie ktorého neznámeho bodu závisí počet riešení úlohy?

Ž: *Dôležitý je predovšetkým bod S. Body C a D získame už jednoznačne pre každý priesečník S uhlopriečok AC a BD. Ak bod S však nezostrojíme, tak nezostrojíme ani body C a D.*

U: Ideš na to veľmi dobre. Pre počet riešení úlohy je rozhodujúca existencia trojuholníka ABS. Keďže bod S získame ako priesečník dvoch kružníc, počet riešení úlohy závisí od počtu spoločných bodov kružníc k_1 a k_2. Pozri sa ešte raz na posledný obrázok.

Ž: *Tak toto náhodou viem veľmi dobre.* **Kružnice sú nesústredné**, *preto môžu mať dva alebo jeden spoločný bod, alebo sa nepretnú. Teda úloha môže mať dva, jedno alebo žiadne riešenie.*

U: Trochu som ťa zmiatol. Je pravda, že kružnice môžu mať jeden spoločný bod, ale mám dojem, že vtedy rovnobežník nezostrojíš.

Ž: *Jasné! Kružnice by sa vtedy dotýkali. Bod S by ležal na úsečke AB, ale priesečník uhlopriečok rovnobežníka nemôže ležať na žiadnej jeho strane.*

U: Úloha môže mať teda dve, alebo žiadne riešenia. Ako to súvisí s dĺžkami úsečiek v zadaní úlohy?

Ž: *Aby sa kružnice pretli v dvoch bodoch, musí byť súčet ich polomerov väčší ako dĺžka strany a. Teda*

$$\frac{|AC|}{2} + \frac{|BD|}{2} > a.$$

U: Nezabudni, že ide o konštrukciu trojuholníka ABS. Musia teda platiť aj zvyšné dve ***nerovnosti*** pre dĺžky jeho strán, a to

$$\frac{|AC|}{2} + a > \frac{|BD|}{2},$$

$$a + \frac{|BD|}{2} > \frac{|AC|}{2}.$$

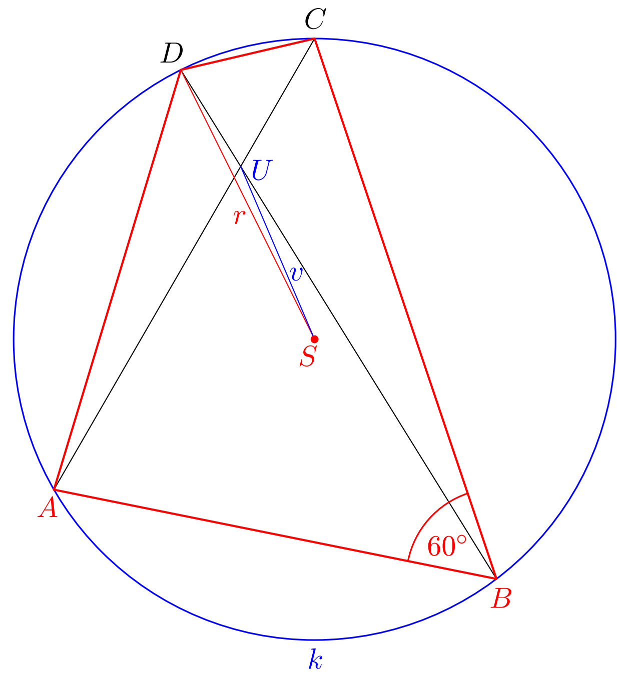
Ak platia tieto tri nerovnosti, tak riešením úlohy sú ***dva rovnobežníky***.

Ž: *To znamená, že ak* ***aspoň jedna z týchto nerovností neplatí****, tak* ***úloha nemá riešenie****. Neexistuje rovnobežník s požadovanými vlastnosťami.*

U: Správne. Tým sme zvládli aj poslednú fázu konštrukčnej úlohy, ktorú nazývame diskusia. Nezabudni, že túto fázu robíme iba vtedy, keď je zadaná úloha ***parametrická***. V parametrickej úlohe nie je zadaná číselná hodnota ***aspoň jednej zo zadaných veličín*** mnohouholníka.

Príklad 1: *Daná je kružnica $k(S;\ 4\text{ cm})$. Zostrojte štvoruholník $ABCD$ so stranou AB dĺžky 6 centimetrov a uhlom $\beta = 60°$, ak priesečník jeho uhlopriečok má od stredu S kružnice k vzdialenosť $v =$ 2,5 cm. Kružnica k je štvoruholníku opísaná.*

Ž: *Najskôr urobím* ***náčrt****, v ktorom farebne vyznačím zadané prvky. Priesečník uhlopriečk AC a BD označím symbolom U.*



U: Ako by si začal samotnú konštrukciu? Teda, ktoré prvky by si považoval za ***známe***?

Ž: *Mal by som začať kružnicou k a stranou AB štvoruholníka.* **Hľadanými** *bodmi sú preto body C, D a priesečník U uhlopriečok.*

U: Predpokladám, že vieš ako umiestniť úsečku AB dĺžky 6 centimetrov do kružnice k.

Ž: *Na kružnici si zvolím bod A. Bod B dostanem ako priesečník kružnice k a kružnice k', ktorá bude mať stred v bode A a polomer 6 centimetrov. Tým zabezpečím dĺžku úsečky AB. Teraz mi napadlo, že získam dva takéto body B.*

U: Umiestnenie úsečky AB považujeme v tejto úlohe za známe. Z toho dôvodu nás druhý priesečník týchto kružníc nebude zaujímať. Úlohu teda vyriešime iba pre jedno umiestnenie úsečky AB. Jej konštrukciu navyše považujeme za základnú, preto ju v zápise uvedieme iba v jednom kroku. Poďme teda na ***podmienky pre bod C***. Pozri sa na obrázok.

Ž: *Jedna podmienka je jednoduchá. Bod C patrí kružnici k, lebo je opísaná štvoruholníku $ABCD$. Navyše viem veľkosť uhla ABC. Preto zostrojím uhol ABX veľkosti 60 stupňov. Bod C teda získam ako* **priesečník** *kružnice k a polpriamky BX.*

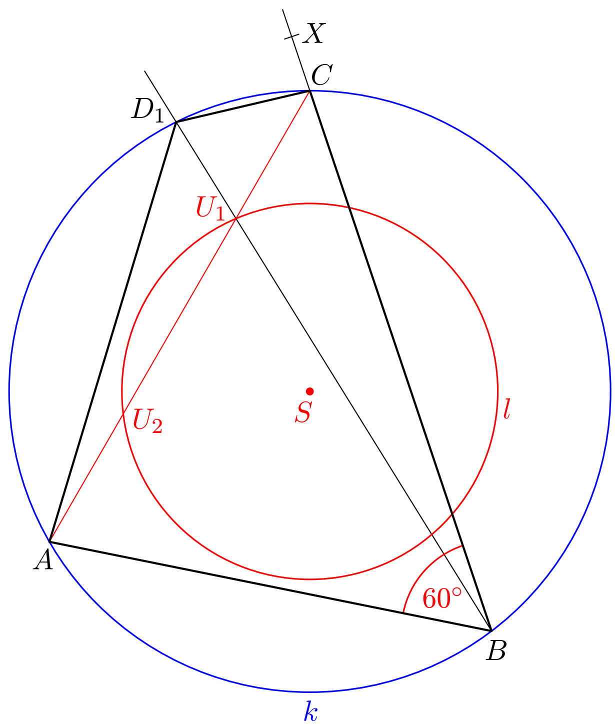
U: Zo zvyšných dvoch hľadaných bodov nájdeš ako prvý v poradí priesečník U uhlopriečok. Popíš ako!

Ž: *Keďže je to priesečník uhlopriečok, tak určite patrí uhlopriečke AC. Spojím teda body A a C. Ale ako mám využiť jeho vzdialenosť od stredu S kružnice k? To mám zostrojiť nejakú priamku?*

U: Trochu rozmýšľaj. Stred kružnice máš daný. Priesečník U má od tohto pevného bodu vzdialenosť 2,5 centimetra. Kde ležia body, krorých vzdialenosť od daného bodu je konštantná?

Ž: *Veď to je triviálne. Ako som mohol na to neprísť. Priesečník U uhlopriečok bude ležať na kružnici l so stredom v bode S a polomerom 2,5 centimetra.*

U: Presne tak. Bod U teda získame ako ***priesečník*** úsečky AC a kružnice l. Na nasledujúcom obrázku máš všetky tieto množiny bodov vyznačené. Z obrázka navyše zistíš, že bod D zostrojíš ako ***priesečník*** kružnice k a polpriamky BU.



Ž: *Nebola to náročná úloha. Dala sa pochopiť.*

U: Počkaj, ešte nie sme na konci jej riešenia. Podmienky pre hľadané body zapíšeme prehľadne do tabuľky. Urobím to ja, ty potom zapíš ***postup konštrukcie***.

1. $C \in k(S;\ 4\ \text{cm})$
1. $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ \ \Rightarrow\ C \in \overrightarrow{BX},\ |\sphericalangle ABX| = 60^\circ$
   $C \in k\ \cap \overrightarrow{BX}$

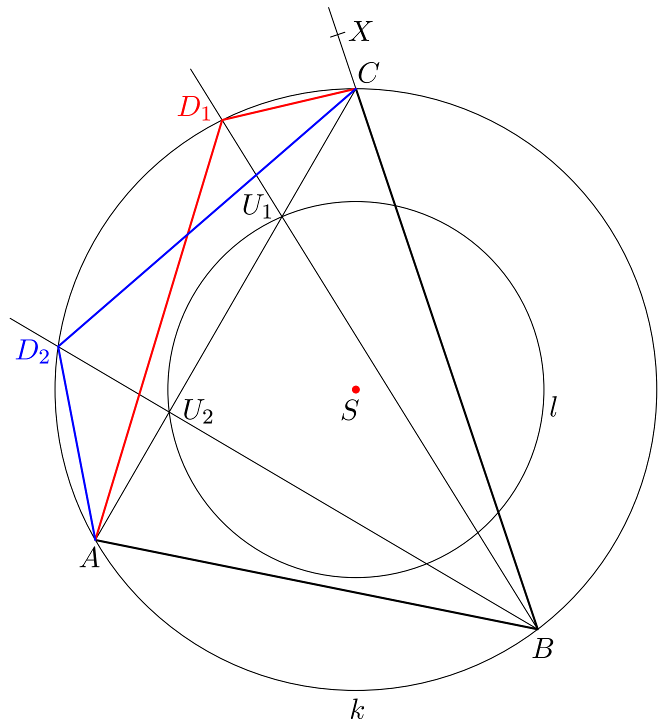
1. $U \in AC$
2. $|SU| = 2{,}5\ \text{cm} \ \Rightarrow\ U \in l(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$
   $U \in AC \cap l$

1. $D \in k$
2. $U \in BD \ \Rightarrow\ D \in \overrightarrow{BU}$
   $D \in k\ \cap \overrightarrow{BU}$

Ž: *Do zápisu konštrukcie v podstate zhrniem všetko čo sme už povedali. Môžete si to prezrieť v nasledujúcej tabuľke.*

1. $k;\ k(S;\ 4\ \text{cm})$
2. $AB;\ A, B \in k, |AB| = 6\ \text{cm}$
3. $\sphericalangle ABX;\ |\sphericalangle ABX| = 60^\circ$
4. $C;\ C \in k\ \cap \overrightarrow{BX}$
5. $l;\ l(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$
6. $U;\ U \in AC \cap l$
7. $D;\ D \in\ k \cap \overrightarrow{BU}$
8. $ABCD$

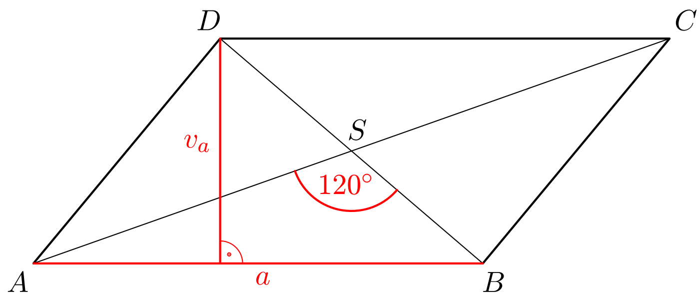
U: Na nasledujúcom obrázku si môžeš pozrieť konštrukciu hľadaného štvoruholníka.



Ž: *Úloha má teda* **dve riešenia**.

Príklad 2: *Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak je dané $a = 6$ cm, výška $v_a = 3$ cm a $|\sphericalangle ASB| = 120°$, kde S je priesečník uhlopriečok rovnobežníka.*

Ž: *Urobím si* **náčrt** *rovnobežníka a farebne vyznačím zadané prvky.*



U: Väčšina úloh o mnohouholníkoch súvisí s konštrukciou trojuholníka. Je to tak aj v tomto prípade.

Ž: *Asi máte na mysli trojuholník ABS. Poznám stranu AB a uhol ASB oproti tejto strane. To sa dá narysovať?*

U: Využi aj výšku rovnobežníka. Vieš predsa, že bod S je priesečník uhlopriečok rovnobežníka.

Ž: *Máte pravdu. Bod S je stredom uhlopriečok, preto má od priamky AB vzdialenosť rovnú* **polovici výšky** *rovnobežníka.*

U: V trojuholníku ABS budeme za ***známe*** vrcholy považovať body A a B. ***Hľadaným*** bodom je bod S. Vieš vyjadriť podmienky pre tento bod?

Ž: *Keďže výška na stranu AB má dĺžku rovnú polovici v_a, tak bod S patrí priamke rovnobežnej s priamkou AB. Vzdialenosť týchto priamok je $\frac{v_a}{2} = 1{,}5$ cm. Ako využijem uhol veľkosti 120 stupňov potrebujem poradiť.*

U: Spomínaš si na ***stredový*** a ***obvodový*** uhol?

Ž: *Pripomeňte mi, o čo ide?*

U: Vrchol S trojuholníka je bodom, z ktorého vidíme úsečku AB pod uhlom 120 stupňov. Množinou všetkých bodov X v rovine, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom 120 stupňov, je ***zjednotenie*** menších oblúkov dvoch kružníc. Oblúky prislúchajú tetive AB a stredmi kružníc sú také body O, že ***nekonvexný uhol*** AOB má veľkosť 240 stupňov.

Ž: *A kde sú tam stredové a obvodové uhly?*

U: Zadaný uhol ASB je obvodovým uhlom prislúchajúcim tetive AB kružnice a uhol AOB je k nemu stredový. Navyše vieme, že stredový uhol má vždy ***dvojnásobnú veľkosť*** ako obvodový. Preto má nekonvexný uhol AOB veľkosť 240 stupňov. Množinu bodov X tejto vlastnosti označíme písmenom μ gréckej abecedy. Preto platí

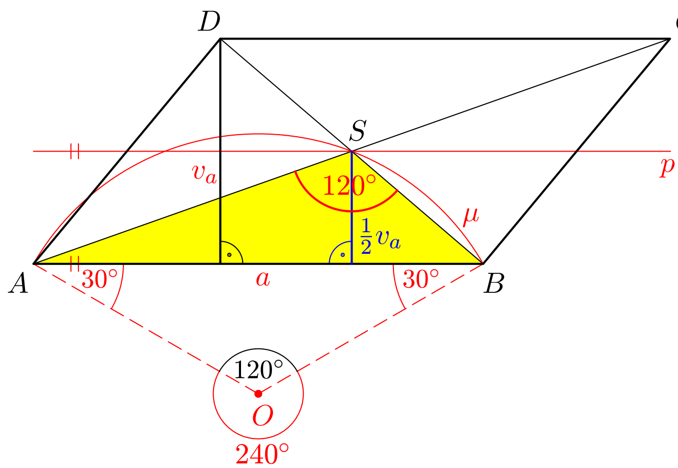
$$\mu = \{X \in E_2 : \ |\sphericalangle AXB| = 120°\}.$$

Ž: *Trochu si spomínam. Túto množinu sme vždy zapísali v jednom kroku konštrukcie. Potom som mal problém, ako ju narysovať. Mohli by ste to pripomenúť?*

U: Samozrejme, aj keď musím priznať, že konštrukciu množiny μ považujeme za základnú konštrukciu. Preto ju zapisujeme v jednom kroku. Na jej zostrojenie je potrebné nájsť stred O. Povedali sme, že nekonvexný uhol AOB má v našom prípade veľkosť 240 stupňov. Úsečka AB je tetivou hľadanej kružnice, teda OA a OB sú polomery.

Ž: *To znamená, že trojuholník AOB je rovnoramenný.* **Konvexný uhol** *pri vrchole O má veľkosť* 120 *stupňov. Uhly OAB a ABO sú rovnaké a zvyšuje na nich* 60 *stupňov. Preto majú veľkosť* 30 *stupňov.*

U: No vidíš. Z kružnice so stredom v bode O a polomerom AO narysuješ iba ***menší oblúk*** prislúchajúci tetive AB. To preto, lebo obvodový uhol ASB je 120 stupňov.



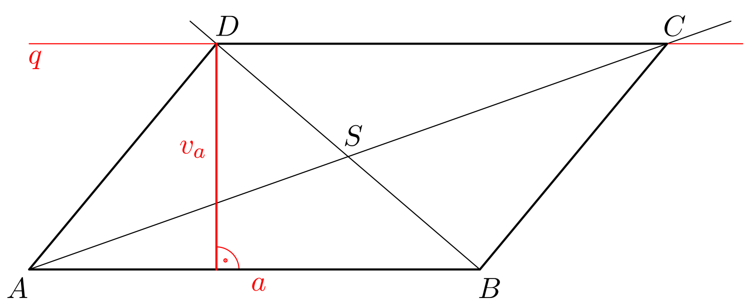
Ž: *Ak by bol obvodový uhol ostrý, tak by sme zobrali väčší oblúk?*

U: Pochopil si správne. Vráťme sa však k našej úlohe. Dopracovali sme sa teda k tomu, že bod S nájdeme ako ***priesečník*** priamky p a množiny μ.

Ž: *Už sa teším na rysovanie. Som zvedavý, či sa mi podarí zostrojiť množinu μ.*

U: Dokončime ešte ***rozbor*** konštrukčnej úlohy. Popísať podmienky pre zostrojenie vrcholov Ca D rovnobežníka by nemal byť problém.

Ž: *Mám na to viac možností. Asi by som narysoval priamku q, ktorá je rovnobežná s priamkou AB a je od nej vo vzdialenosti zadanej výšky v_a rovnobežníka. Potom stačí predĺžiť úsečky AS a BS a tam, kde pretnú priamku q, mám body C a D.*



U: Ak hovoríš, že máš viac možností, tak čo iné by si využil?

Ž: *Možno stredovú súmernosť podľa bodu S. V tejto súmernosti sa bod A zobrazí do bodu C a bod B sa zobrazí do bodu D.*

U: Vidím, že v tejto časti konštrukcie máš o riešení úlohy prehľad. V rámčeku sú prehľadne zhrnuté podmienky pre hľadané body.

1. $|S;\ \overleftrightarrow{AB}| = 1{,}5\text{ cm} \ \Rightarrow\ S \in\ p,\ p \parallel \overleftrightarrow{AB},\ |p;\ \overleftrightarrow{AB}| = 1{,}5\text{ cm}$
2. $|\sphericalangle ASB| = 120° \ \Rightarrow\ S \in \mu,\ \mu = \{X \in E_2 :\ |\sphericalangle AXB| = 120°\}$

$S \in p\ \cap \mu$

$S = A \div C \ \Rightarrow\ S_S : A \to C$

$S = B \div D \ \Rightarrow\ S_S : B \to D$

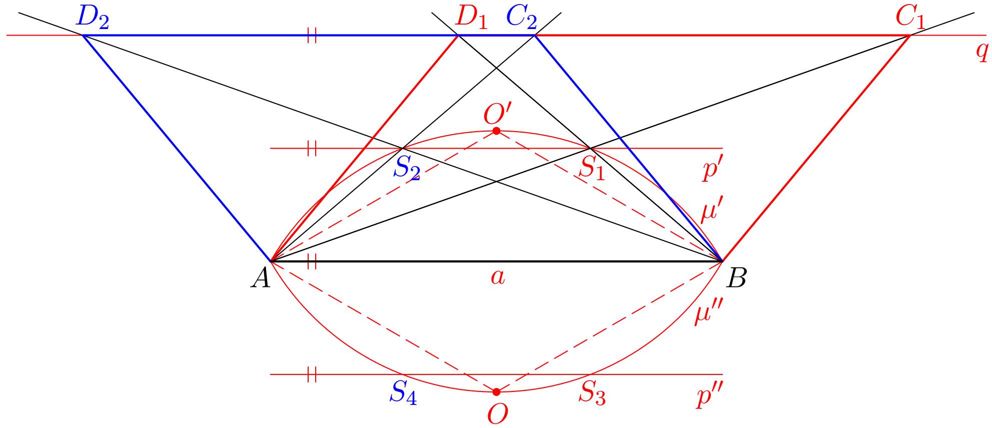
Ž: *Môžem zapísať* **postup konštrukcie***?*

U: Prečo nie. Sám vidíš, že v podmienkach som využil druhý spôsob určenia bodov C a D rovnobežníka. Nezabudni na to ani ty.

Ž: *Trochu to skráti riešenie. V zápise v podstate iba zhrniem to, čo sme povedali v rozbore úlohy.*

1. $AB;\ |AB| = 6\text{ cm}$
2. $p;\ p \parallel \overleftrightarrow{AB}; |p,\ \overleftrightarrow{AB}| = 1{,}5\text{ cm}$
3. $\mu;\ \mu = \{X \in E_2 :\ |\sphericalangle AXB| = 120°\}$
4. $S;\ S \in p\ \cap \mu$
5. $C;\ S_S : A \to C$
6. $D;\ S_S : B \to D$
7. $ABCD$

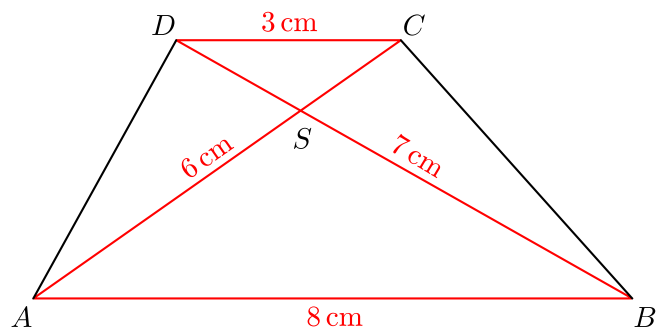
U: Podľa tohto zápisu určite zvládneš aj samotnú konštrukciu rovnobežníka. Môžeš si ju porovnať s výsledkom na nasledujúcom obrázku.



U: Ako máš možnosť vidieť, podľa kroku 4. konštrukcie sme dostali dva rôzne priesečníky S uhlopriečok rovnobežníka s priamkou p'. Oba zostrojené rovnobežníky sú však ***zhodné***, preto má úloha iba jedno ***riešenie***.

Príklad 3: *Zostrojte lichobežník, ak je dané $|AB| = 8$ cm, $|CD| = 3$ cm, $|AC| = 6$ cm a $|BD| = 7$ cm.*

U: Riešenie úlohy začneme ***rozborom***. Pozri sa najskôr na ***náčrt***.

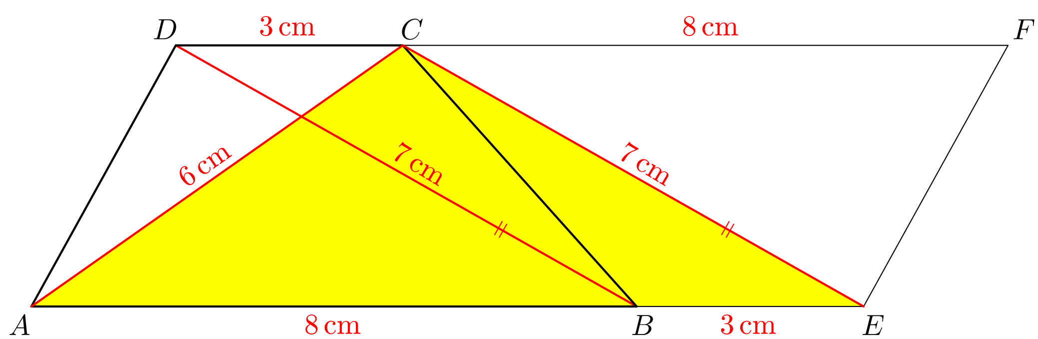


Ž: *Poznáme obe základne lichobežníka a jeho uhlopriečky, ktoré sa pretínajú v bode S. Skúsim využiť trojuholníky ASB a CSD. Mali by byť* **podobné**, *lebo uhly pri vrchole S sú vrcholové, teda rovnaké. Rovnaké sú aj striedavé uhly SAB a SCD.*

U: Nie je to zlý nápad. Vedel by si tieto trojuholníky zostrojiť?

Ž: *Tak to už bude ťažšie, lebo v každom trojuholníku viem dĺžku iba jednej strany. Uhlopriečky lichobežníka predstavujú súčty zvyšných dvoch dvojíc. Počkajte . . . To by sa dalo vypočítať. Veď by som mal byť schopný určiť pomer podobnosti trojuholníkov. Strane AB jedného trojuholníka odpovedá strana CD druhého trojuholníka.* **Pomer podobnosti** *trojuholníkov ASB a CSD je teda $\dfrac{8}{3}$.*

U: Verím, že by si dĺžky zvyšných strán dopočítal. Ukážeme si však iné riešenie. Lichobežník $ABCD$ doplníme do ***rovnobežníka*** $AEFD$, tak ako to vidíš na nasledujúcom obrázku. Popíš, ako sme rovnobežník vytvorili.



Ž: *Pridali ste taký istý lichobežník ako $ABCD$. Nakreslili ste ho však naopak, hore nohami. Strana BE má teda dĺžku 3 centimetre a strana FC má dĺžku 8 centimetrov.*

U: Vieš vyjadriť aj dĺžku úsečky EC?

Ž: *Veď je to uhlopriečka lichobežníka. Dokonca je rovnobežná s uhlopriečkou BD, preto má tú istú veľkosť.*

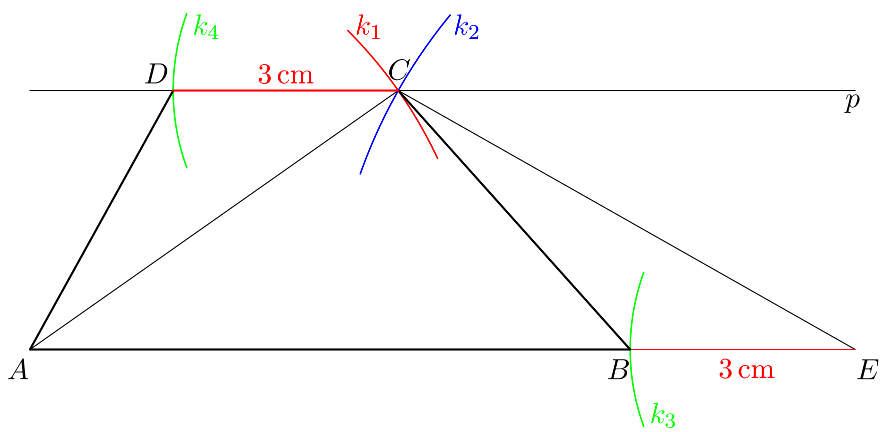
U: No vidíš. Takže určite budeš vedieť narysovať ***trojuholník*** AEC.

Ž: *Počkajte, nech sa zorientujem v obrázku ... Aha! Tak toto je fakt triviálna úloha. Poznám dĺžky všetkých strán trojuholníka AEC, lebo*

$$|AE| = 11 \text{ cm} \quad |AC| = 6 \text{ cm} \quad |EC| = 7 \text{ cm}.$$

Bod C zostrojím pomocou dvoch kružníc. Kružnica k_1 má stred v bode A a polomer 6 centimetrov, stredom kružnice k_2 je bod E a jej polomer má veľkosť 7 centimetrov.

U: Nájsť zvyšné body B a D lichobežníka je tiež triviálna záležitosť. V rámčeku si prezri podmienky pre všetky ***hľadané body*** lichobežníka.



1. $|AC| = 6 \text{ cm} \Rightarrow C \in k_1(A;\ 6 \text{ cm})$
2. $|EC| = 7 \text{ cm} \Rightarrow C \in k_2(E;\ 7 \text{ cm})$

   $C \in k_1 \cap k_2$

   $B \in AE \cap k_3(E;\ 3 \text{ cm})$

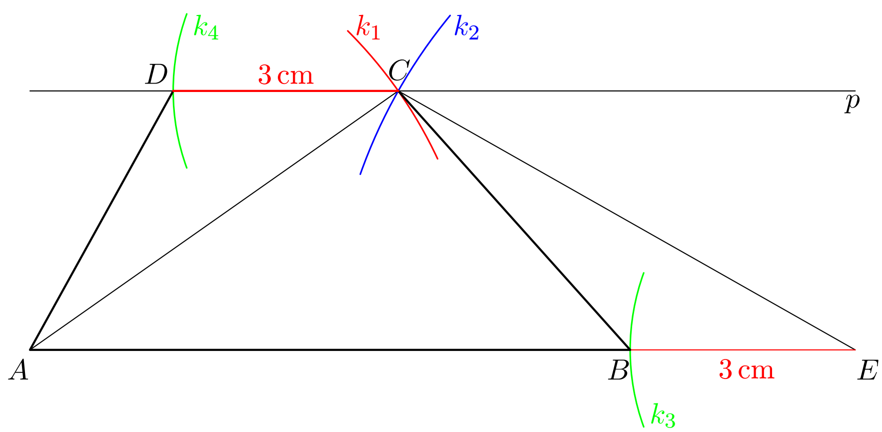
1. $DC \parallel AB \Rightarrow D \in p,\ p \parallel \overleftrightarrow{AB},\ C \in p$
2. $|DC| = 3 \text{ cm} \Rightarrow D \in k_4(C;\ 3 \text{ cm})$

   $D \in p \cap k_4$

Ž: *Zapíšem postup konštrukcie. Začneme úsečkou AE dĺžky 11 centimetrov. Potom pomocou kružníc k_1 a k_2 zostrojíme bod C. Zvyšok konštrukcie je už triviálny. Celý postup je zapísaný v rámčeku.*

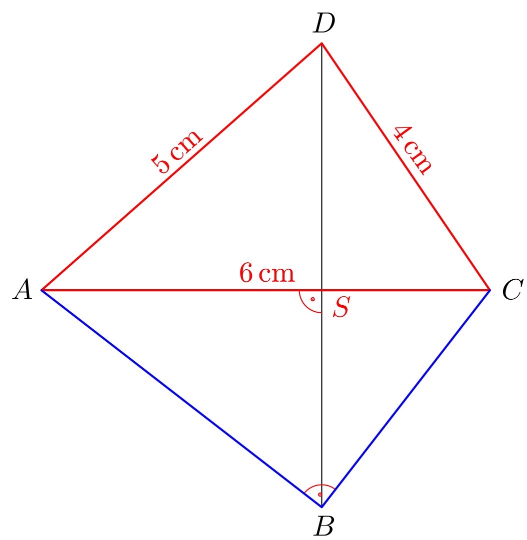
1. AE; $|AE| = 11$ cm
2. k_1; $k_1(A;\ 6$ cm$)$
3. k_2; $k_2(E;\ 7$ cm$)$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. k_3; $k_3(E;\ 3$ cm$)$
6. B; $B \in AE \cap k_3$
7. p; $p \parallel \overleftrightarrow{AB},\ C \in p$
8. k_4; $k_4(C;\ 3$ cm$)$
9. D; $D \in p \cap k_4$
10. $ABCD$

Ž: *Na poslednom obrázku je narysovaný lichobežník* $ABCD$.



Príklad 4: *Zostrojte konvexný štvoruholník $ABCD$, ak je dané* $|CD| = 4$ cm, $|AD| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ABC| = 90°$, *kde S je priesečník uhlopriečok štvoruholníka.*

Ž: *Urobím náčrt štvoruholníka $ABCD$ a vyznačím zadané prvky.*



Ž: *Tuším, že to nebude náročná úloha. Štvoruholník sa rozpadol na dva neprekrývajúce sa trojuholníky, trojuholník ACD a trojuholník ACB. Narysovať trojuholník ACD nebude problém.*

U: Prečo?

Ž: *V trojuholníku ACD poznám všetky tri strany. Konštrukcia trojuholníka zadaného tromi stranami patrí medzi základné konštrukcie.*

U: ***Hľadaným bodom*** štvoruholníka $ABCD$ je preto bod B. Čo vieš zohľadniť na jeho určenie?

Ž: *Viem, že uhol ABC má byť pravý. Ale, ako to využijem . . . ? Počkajte! Už to mám. Zostrojím* **Thalesovu kružnicu**.

U: Máš pravdu. Vrcholy X pravých uhlov AXC vytvárajú Thalesovu kružnicu. Kde má táto kružnica stred, a aký má polomer?

Ž: *Priemerom Thalesovej kružnice je úsečka AC dĺžky 6 centimetrov. Jej polomer je teda rovný 3 centimetrom a stred úsečky AC je stredom kružnice.*

U: Zo zadania vieme, že aj uhol ASB je pravý, pričom S je priesečník uhlopriečok štvoruholníka. Ako využiješ túto informáciu?

Ž: *Ak je uhol ASB pravý, tak by som mal v bode S zostrojiť kolmicu na úsečku AC. Na tejto kolmici bude ležať bod B.*

U: Sklamem ťa, ale bod S nepoznáme.

Ž: *Akože nepoznáme? Veď to je stred úsečky AC.*

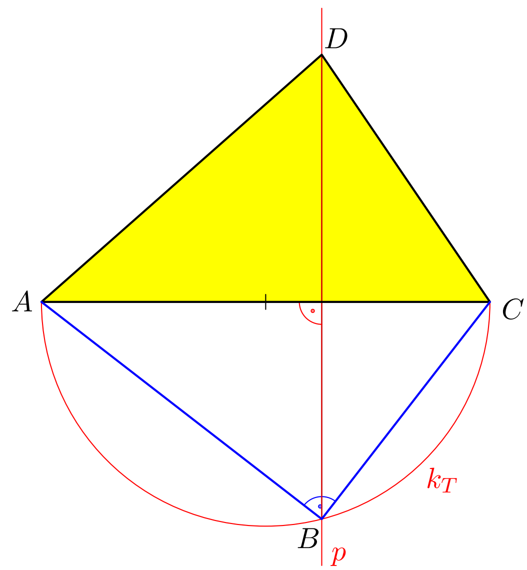
U: Bola by to pravda, keby zadaný štvoruholník bol rovnobežník. Uhlopriečky rovnobežníka sa rozpoľujú. Pretínajú sa v strede. Vo všeobecnom štvoruholníku to tak nemusí byť. A to je aj náš prípad. Uhlopriečky sa síce pretínajú v bode S, ale ten nemusí byť stredom úsečky AC.

Ž: *Dobre, pochopil som. Ale, ako zostrojím kolmicu, ak nemám bod S?*

U: Pozri sa ešte raz na náčrt. Priamke SB, ktorá je kolmá na úsečku AC, patrí ešte jeden, nám už známy bod. Vieš ktorý?

Ž: *Aha! Ako som na to mohol neprísť sám. Jasné! Veď je to bod D. Bod S patrí predsa aj uhlopriečke BD.*

U: No vidíš. Priamku p kolmú na úsečku AC preto zostrojíme cez bod D.



Ž: *V podstate máme celý štvoruholník, lebo bod B získame ako priesečník priamky p a Thalesovej kružnice k_T.*

U: Nakoniec zhrnieme základné myšlienky rozboru. Za ***známe body*** sme považovali vrcholy A, C a D. Vytvárajú trojuholník, ktorý vieme zostrojiť na základe ***vety (sss)***. Aké sú podmienky pre bod B, ktorý je ***hľadaným bodom***?

Ž: *Bod B nájdeme ako priesečník priamky p a Thalesovej kružnice. Podrobnejšie zdôvodnenie som zapísal do rámčeka.*

1. $|\sphericalangle ABC| = 90° \;\Rightarrow\; B \in k_T;\; k_T(A \div C;\; 3\text{ cm})$
2. $|\sphericalangle ASB| = 90° \;\Rightarrow\; B \in p;\; p \perp AC;\; D \in p$

$B \in k_T \cap p$

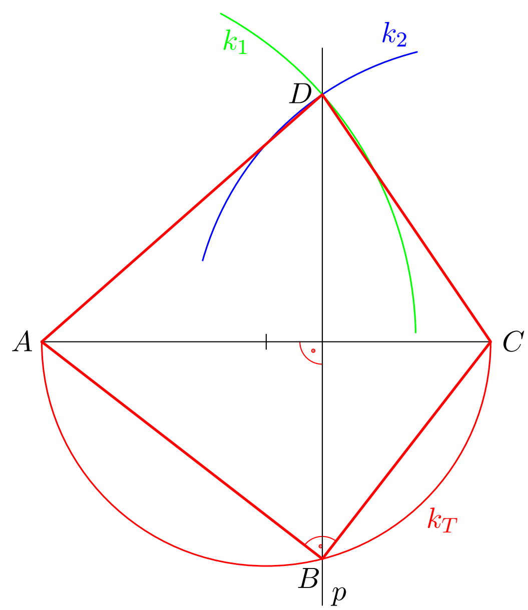
U: V ***zápise konštrukcie*** predsa len rozpíšeme konštrukciu trojuholníka ACD vo viacerých krokoch. Pokús sa ich sformulovať.

Ž: *Nebude to ťažké. Najskôr zostrojím úsečku AC veľkosti 6 centimetrov. Potom zostrojím dve kružnice. Kružnica k_1 bude mať stred v bode A a polomer 5 centimetrov. Kružnica k_2 bude mať stred v bode C a polomer 4 centimetre. Bod D nájdem ako priesečník týchto dvoch kružníc.*

U: Povedal si to presne. Zápis konštrukcie si máš možnosť pozrieť v rámčeku. Je zápisom tých myšlienok, ktoré sme povedali v rozbore úlohy.

1. $AC;\ |AC| = 6$ cm
2. $k_1;\ k_1(A;\ 5$ cm$)$
3. $k_2;\ k_2(C;\ 4$ cm$)$
4. $D;\ D \in k_1 \ \cap\ k_2$
5. $k_T;\ k_T(A\ \div\ C;\ 3$ cm$)$
6. $p;\ p \perp AC,\ D \in p$
7. $B;\ B \in k_T\ \cap\ p$
8. $ABCD$

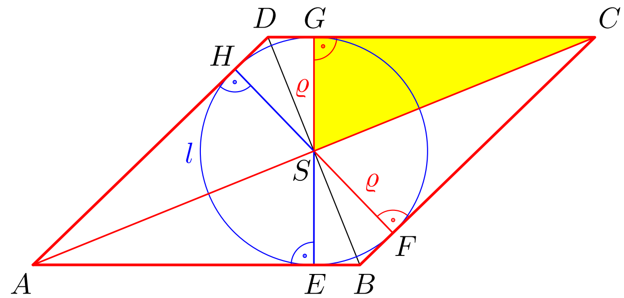
Ž: *Skúsim narysovať. Výsledok mám na nasledujúcom obrázku.*



Príklad 5: *Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ak je daná dĺžka uhlopriečky $|AC| = 8$ cm a polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca $\varrho = 1{,}5$ cm.*

U: Riešenie konštrukčnej úlohy začneme rozborom. Čo patrí do rozboru?

Ž: *Najskôr si urobím náčrt kosoštvorca $ABCD$. Farebne vyznačím zadanú uhlopriečku AC a polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca. Polomerom sú úsečky SE, SF, SG a SH, kde stred S uhlopriečky AC je stredom kružnice vpísanej do kosoštvorca. Dotykové body na stranách kosoštvorca som označil písmenami E, F, G a H.*



U: Sú tieto štyri body pre konštrukciu potrebné?

Ž: *Asi áno. Ako ináč využijem zadaný polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca?*

U: Máš pravdu. Za ***známe body*** budeme považovať vrcholy A a C. ***Hľadanými bodmi*** budú body B, D, E, F, G a H.

Ž: *Uf. Neznámych bodov je dosť veľa.*

U: Ktorý z nich by si hľadal ako prvý v poradí?

Ž: *Pokúsim sa nájsť* **podmienky pre hľadaný bod G**. *Viem, že jeho vzdialenosť od stredu S je daná polomerom ϱ. Zostrojím preto kružnicu k so stredom v bode S a polomerom* 1,5 cm. *Ale nič iné mi nenapadá.*

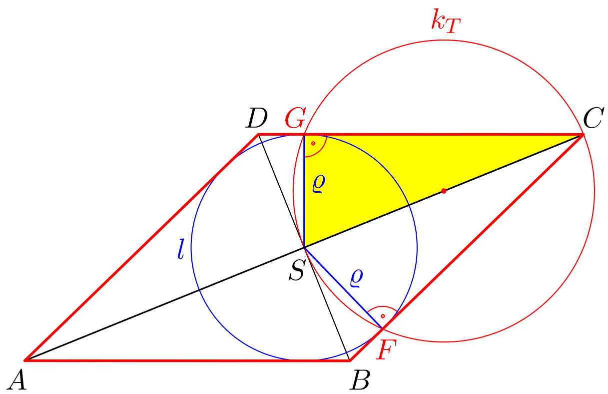
U: Pozri sa ešte raz na náčrt kosoštvorca. Povedal si, že G je dotykovým bodom kružnice a strany CD kosoštvorca.

Ž: *Aha! Úsečky SG a DC sú na seba kolmé. Ale, ako to využijem?*

U: Z kolmosti úsečiek vyplýva, že uhol SGC je pravý. Chceš zostrojiť bod G. Kde ležia vrcholy X pravých uhlov SXC?

Ž: *Jasné! Zostrojím* **Thalesovu kružnicu** *k_T so stredom v strede úsečky SC. Úsečka SC bude priemerom Thalesovej kružnice.*

U: Thalesova kružnica je množinou vrcholov X pravých uhlov SXC, ak je zadaná úsečka SC. Bod G teda zostrojíme ako priesečník Thalesovej kružnice k_T a kružnice k. Neviem, či si uvedomuješ, ale spomenuté dve kružnice popisujú spôsob konštrukcie nielen bodu G, ale aj bodu F na strane BC.



Ž: *Až teraz som si uvedomil, že kosoštvorec je symetrický podľa priamky AC.*

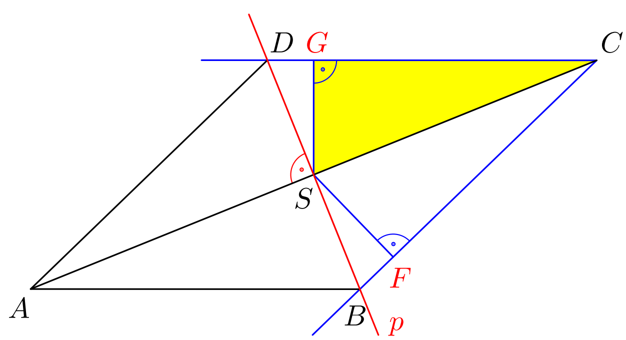
U: Kosoštvorec má dve osi symetrie. Osou súmernosti je aj uhlopriečka BD.

Ž: *No dobre, ale ako ju chcete využiť, keď nemáte ani jeden z bodov B a D?*

U: Využijeme istú vlastnosť uhlopriečok kosoštvorca. Spomínaš si?

Ž: *Nooo ...? Viem, že uhlopriečky kosoštvorca sa rozpoľujú.*

U: A na to, že sú kolmé, si zabudol. Vrcholy B a D kosoštvorca patria teda priamke p, ktorá je kolmá na uhlopriečku AC. Priamka p zároveň prechádza bodom S.



Ž: *Vidím, že sa chcete vyhnúť konštrukcii bodov E a H.*

U: Pochopil si správne. Nájsť body B a D by už nemal byť pre teba problém.

Ž: *Bod B zostrojím ako priesečník priamok p a CF. Prienikom priamok p a CG získam bod D.*

U: Rozbor sme teda zvládli. Zápis podmienok pre hľadané body G, F, B a D si máš možnosť pozrieť ešte raz v rámčeku.

1. $|SG| = 1{,}5\text{ cm} \;\Rightarrow\; G \in k(S;\ 1{,}5\text{ cm})$
2. $|\sphericalangle SGC| = 90^\circ \;\Rightarrow\; G \in k_T(S \div C;\ 2\text{ cm})$
   $G \in k\ \cap\ k_T$

1. $|SF| = 1{,}5\text{ cm} \;\Rightarrow\; F \in k(S;\ 1{,}5\text{ cm})$
2. $|\sphericalangle SFC| = 90^\circ \;\Rightarrow\; F \in k_T(S \div C;\ 2\text{ cm})$
   $F \in k\ \cap\ k_T$

1. $BD \perp AC \;\Rightarrow\; B \in p;\ p \perp AC \wedge S \in p$
2. $F \in BC \;\Rightarrow\; B \in \overleftrightarrow{FC}$
   $B \in p\ \cap\ \overleftrightarrow{FC}$

1. $BD \perp AC \;\Rightarrow\; D \in p;\ p \perp AC \wedge S \in p$
2. $G \in DC \;\Rightarrow\; D \in \overleftrightarrow{GC}$
   $D \in p\ \cap\ \overleftrightarrow{GC}$

U: Ak si pozorne vnímal celý rozbor, ***zápis konštrukcie*** by si mal zvládnuť v pohode.

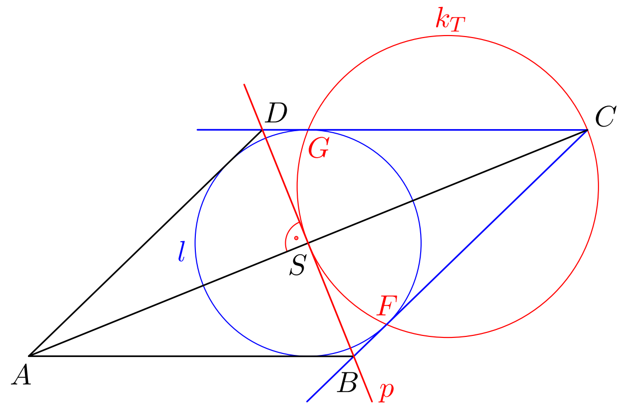
Ž: *Najskôr narysujem úsečku AC veľkosti 8 centimetrov. Zostrojím jej stred S. Body G a F nájdem ako priesečníky dvoch kružníc. Jedna z kružníc má stred v bode S a polomer 1,5 centimetra a druhá kružnica je Thalesova. Jej priemerom je úsečka SC.*

U: Ako si správne uviedol, obe kružnice majú dva spoločné body. Ktorý z nich označíme ako bod G, nie je vôbec podstatné. Úloha teda vedie k jednému riešeniu. Pokračuj ďalej v popise konštrukcie.

Ž: *Zostáva mi nájsť body B a D. Stredom S uhlopriečky AC zostrojím kolmicu p na AC. Priesečník priamky p s priamkou CG určuje bod D. Bod B získam ako priesečník priamky p, ale tentokrát s priamkou CF. Môžem teda narysovať kosoštvorec $ABCD$.*

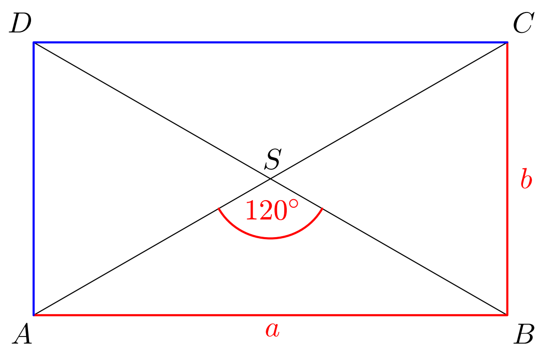
U: Tak, ako v každej konštrukčnej úlohe, aj teraz celý zápis konštrukcie uvedieme prehľadne pomocou symboliky v nasledujúcej tabuľke.

1. $AC;\ |AC| = 8\ cm$
2. $k;\ k(S;\ 1{,}5\text{ cm})$
3. $k_T;\ k_T(S\ \div\ C;\ 2\text{ cm})$
4. $F, G;\ F, G \in k \cap k_T$
5. $p;\ p \perp AC,\ A\ \div\ C \in p$
6. $B;\ B \in\ p\ \cap \overleftrightarrow{FC}$
7. $D;\ D \in\ p\ \cap \overleftrightarrow{CG}$
8. $ABCD$


k_T
D
C
G
l
S
F
A
B
p

Príklad 6: *Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak je dané $|\sphericalangle ASB| = 120°$, kde S je priesečník uhlopriečok štvoruholníka a $a + b = 10$ cm.*

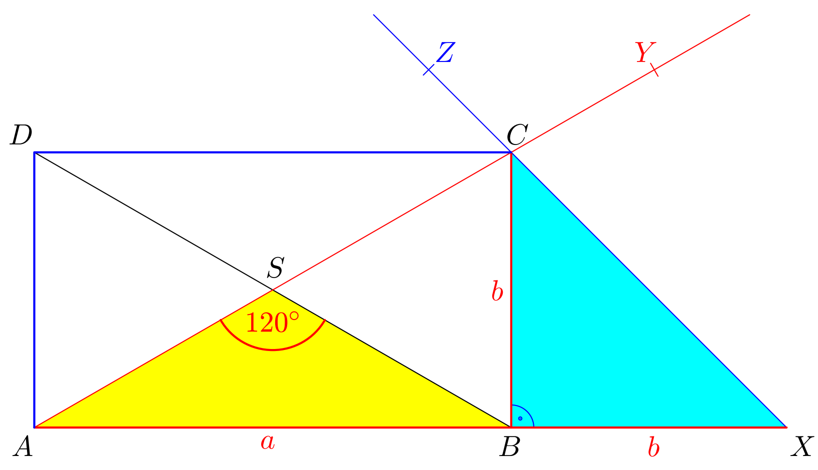
Ž: *Načrtnem si obdĺžnik $ABCD$. Bod S je priesečníkom jeho uhlopriečok AC a BD. Farebne vyznačím zadaný uhol ASB a súčet dĺžok strán a a b.*



U: Urobil si chybu. Nemôžeš vyznačiť farebne úsečky AB a BC. Nepoznáš dĺžky týchto úsečiek. Zo zadania vieš iba to, aký je súčet ich dĺžok. Preto sa snaž tieto úsečky dostať do jednej línie.

Ž: *Mám namerať úsečku BC od bodu B na polpriamku $\overrightarrow{AB}$?*

U: Presne tak. Ak úsečku b prenesieš na polpriamku $\overrightarrow{AB}$, získaš bod X. Úsečka AX bude mať zadanú veľkosť 10 centimetrov.



Ž: *Ako mi to pomôže? Veď budem poznať iba jeden vrchol obdĺžnika. Ako zostrojím body B, C a D?*

U: Musím povedať, že dosť jednoducho. Je pravda, že zatiaľ to nie je v obrázku vidieť. Ak trochu porozmýšľaš, tak veľkosti uhlov, ktoré sú priľahlé k strane AX v trojuholníku AXC, by si mal byť schopný vypočítať.

Ž: *Poznám iba uhol ASB. Ten má podľa zadania veľkosť 120 stupňov. Trojuholník ASB je* **rovnoramenný** *so základňou AB. Keďže* **súčet veľkostí vnútorných uhlov** *v trojuholníku je 180 stupňov, na uhly pri základni zvyšuje 60 stupňov. A keďže uhly SAB a ABS sú zhodné, tak uhol SAB má veľkosť 30 stupňov.*

U: Teda aj uhol SAX má veľkosť 30 stupňov. Verím, že takto jednoducho zdôvodníš aj výpočet veľkosti uhla AXC. Nezabudni na to, že úsečku BC sme preniesli na úsečku BX.

Ž: *Aha! Dobre, že ste to pripomenuli. Trojuholník CBX je tiež* **rovnoramenný**, *lebo úsečky BC a BX majú veľkosť b. Navyše tieto ramená zvierajú* **pravý uhol**. *Pri vrcholoch X a C v trojuholníku sú preto uhly veľkosti 45 stupňov.*

U: No vidíš. Zvládol si to s prehľadom. Podľa vety (usu) vieme teda narysovať trojuholník AXC. Za ***známe body*** budeme považovať body A a X. Aké budú podmienky pre ***hľadaný bod*** C?

Ž: *Bod C patrí ramenu $\overrightarrow{AY}$ uhla YAX veľkosti 30 stupňov a ramenu $\overrightarrow{XZ}$ uhla AXZ veľkosti 45 stupňov. Získam ho prienikom týchto dvoch polpriamok.*

$$1.\ |\sphericalangle XAC| = 30^\circ \ \Rightarrow\ C \in \overrightarrow{AY},\ |\sphericalangle XAY| = 30^\circ$$
$$2.\ |\sphericalangle AXC| = 45^\circ \ \Rightarrow\ C \in \overrightarrow{XZ},\ |\sphericalangle AXZ| = 45^\circ$$
$$C \in \overrightarrow{AY} \cap \overrightarrow{XZ}$$

U: Táto konštrukcia bola základom celej úlohy. To ostatné už získame pomerne jednoducho. Ak zostaneš ešte na chvíľu v trojuholníku AXC, tak objavíš, že bod B je jeho význačným bodom. Vieš akým?

Ž: *Že by to súviselo s kolmosťou? Vlastne, áno. Bod B je pätou výšky z bodu C na stranu AX.*

U: Správne. Bod B preto zostrojíme ako priesečník úsečky AX a priamky p, ktorá je kolmá na úsečku AX a prechádza bodom C. Vedel by si zostrojiť aj bod D?

Ž: *To je už teraz ľahké. Ale ťažšie sa to slovne popisuje. Bod D získam ako priesečník dvoch priamok. Jedna z nich prechádza bodom A a je rovnobežná s priamkou p. Druhá priamka prechádza bodom C a je rovnobežná s priamkou AX.*

U: Konštrukcia bodu D by sa dala zvládnuť jednoduchšie na základe stredovej súmernosti podľa priesečníka uhlopriečok obdĺžnika. Bod B sa v nej zobrazí do bodu D. Stredom súmernosti je stred úsečky AC.

Ž: *Dobrá finta! Zjednoduší to zápis konštrukcie.*

U: Tak ho slovne okomentuj!

Ž: *Najskôr narysujem úsečku AX dĺžky $a + b$. Bod C získam ako priesečník ramien AY a XZ uhlov XAY a AXZ, ktorých veľkosti sú 30 stupňov, resp. 45 stupňov. Bodom C zostrojím priamku p kolmú na AX. Priesečník priamky p s úsečkou AX označím ako bod B. Na zostrojenie bodu D využijem stredovú súmernosť, ktorej stredom súmernosti je stred úsečky AC. Získam takto obdĺžnik $ABCD$.*

U: Celý postup konštrukcie je symbolicky zapísaný v nasledujúcej tabuľke.

1. AX; $|AX| = a + b = 10$ cm
2. $\sphericalangle XAY$; $|\sphericalangle XAY| = 30°$
3. $\sphericalangle AXZ$; $|\sphericalangle AXZ| = 45°$
4. C; $C \in \overrightarrow{AY} \cap \overrightarrow{XZ}$
5. p; $p \perp AX, C \in p$
6. B; $B \in AX \cap p$
7. D; $S_{A \div C} : B \rightarrow D$
8. $ABCD$

Ž: *Zistil som, že je potrebné často dokresľovať rôzne úsečky, alebo ich prenášať na iné priamky. Potom už úloha nie je náročná. Ten obdĺžnik narysujem veľmi jednoducho. Môžem?*

U: Určite si úlohe porozumel. Tak sa pusti do rysovania.

Ž: *Výsledok mojej práce si máte možnosť pozrieť na nasledujúcom obrázku.*