Zobrazenie množiny reálnych čísel na jednotkovú kružnicu

RNDr. Marián Macko

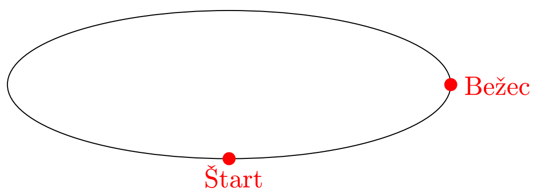
U: Predstav si, že by si prišiel na štadión, kde na štarte oválnej bežeckej dráhy stojí bežec. Vedel by si, akú dlhú trať zabehol?

Ž: *No, keď je na štarte, tak určite ešte nebežal.*

U: Myslíš?

Ž: *Vlastne, mohol zabehnúť kolo, dve alebo viac kôl.*

U: Správne. Spýtali by sme sa, koľko kôl absolvoval, zmerali by sme dĺžku jedného kola a vypočítali celkovú dĺžku. A čo v prípade, ak by oddychoval na mieste podľa obrázka?



Ž: *Tak k celým kolám prirátam ešte jednu štvrtinu kola.*

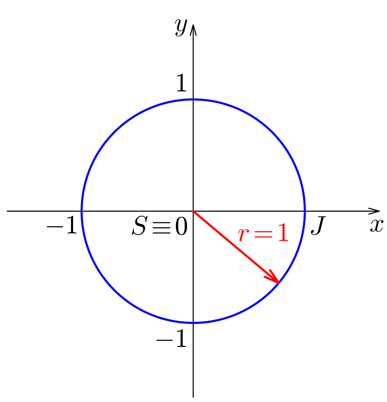
U: Prečo jednu štvrtinu? Čo ak bežal opačným smerom?

Ž: *Na to som nepomyslel.*

U: Vidíš. Podobné problémy vyriešime v matematike dohovorom. Ukážeme to na zobrazení, v ktorom každému reálnemu číslu priradíme na jednotkovej kružnici práve jeden bod.

Ž: *Čo je to* **jednotková kružnica***?*

U: Kružnica, ktorej ***polomer predstavuje jednotku dĺžky*** (1 cm, 1 m, ap.). Pre naše úvahy ***stredom*** jednotkovej kružnice bude ***začiatok súradnicovej sústavy*** a dôležitý bude jej priesečník s kladnou polosou x, ktorý označíme ako bod J.



Ž: *To je ako štart na bežeckej dráhe.*

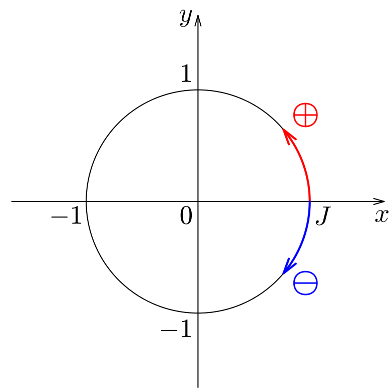
U: Áno, odtiaľ budeme ***merať dĺžku oblúka*** vyjadrenú daným reálnym číslom.

Ž: *V ktorom smere, a ako?*

U: Ako som spomínal, problém smeru vyriešime dohodou. Ak je reálne číslo kladné, meriame v ***kladnom zmysle***, čo je ***proti smeru pohybu hodinových ručičiek***.

Ž: *A ak je reálne číslo* **záporné**, *tak* **v smere pohybu hodinových ručičiek**.

U: Záporným smerom zohľadníme zápornosť čísla, dĺžka oblúka bude jeho absolútnou hodnotou.



Ž: *Skúsme na príklade konkrétneho čísla.*

U: Zostaňme pri čísle $x = \dfrac{\pi}{2}$. Jeho približná hodnota je $1,57$.

Ž: *Prečo ste číslo vyjadrili ako časť Ludolfovho čísla* π*?*

U: Odpoveď na tvoju otázku sa skrýva v riešení tejto úlohy.

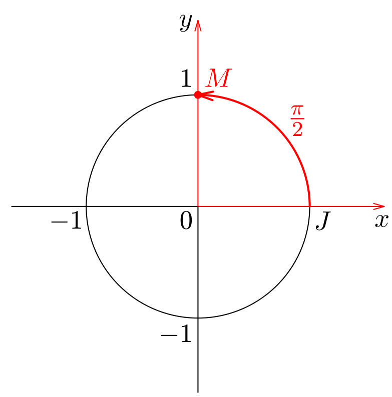
Ž: *Čiže* **od bodu** J *mám* **v kladnom zmysle** *namerať* **oblúk dĺžky** $\dfrac{\pi}{2}$*. Netuším koľko to je a kde bude koniec oblúka.*

U: Vzorec pre dĺžku kružnice by nemal byť problém.

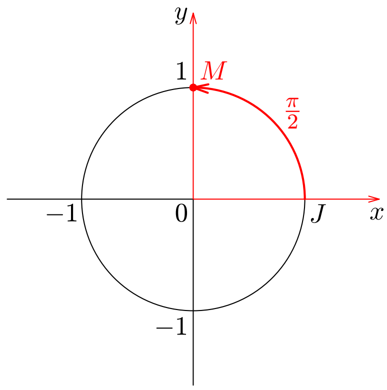
Ž: $o = 2\pi r$*, kde* r *je polomer kružnice.*

U: V našom prípade je $r = 1$ a teda dĺžka kružnice je 2π. Akú časť z toho predstavuje $\dfrac{\pi}{2}$?

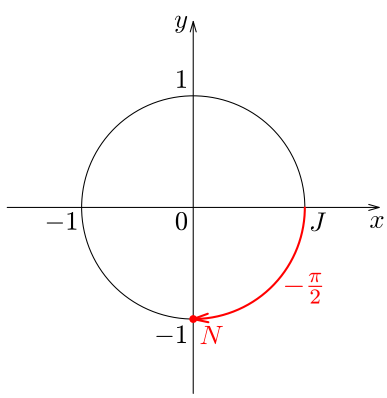
Ž: *Polovica* 2π *je* π*, štvrtina* 2π *je* $\dfrac{\pi}{2}$*. Bežec prebehol štvrtinu dráhy.*



U: ***Číslu*** $\frac{\pi}{2}$ sme teda ***priradili bod*** M tak, že ***dĺžka oblúka*** JM meraná v kladnom zmysle ***je*** $\frac{\pi}{2}$. Navyše toto číslo vyjadruje veľkosť uhla JOM v radiánoch pri otočení polpriamky OJ v kladnom zmysle do koncovej polohy danej polpriamkou OM.



Ž: *Pochopil som správne, že pre* $x = -\frac{\pi}{2}$ *budem polpriamku* OJ **otáčať v zápornom zmysle** *o uhol veľkosti* $\frac{\pi}{2}$*?*



U: Áno. Dostaneš bod N, pričom dĺžka oblúka JN je:

$$|x| = \left|-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}.$$

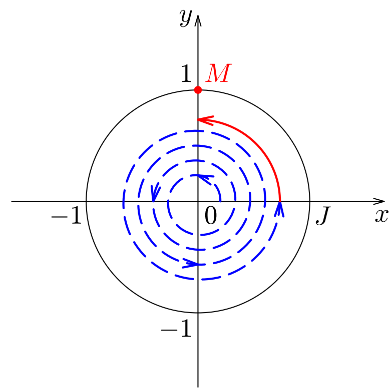
Ž: *Zatiaľ sme sa veľmi nenabehali. Nezabehli sme ani kolo.*

U: Máš pravdu. Zoberme číslo $\frac{17\pi}{2}$, čo je viac ako 2π. Tu už nejaké to kolo bude. Koľko ich je, určíš, ak číslo $\frac{17}{2}$ napíšeš napríklad v tvare zmiešaného čísla.

Ž: *Teda*

$$\frac{17\pi}{2} = \left(8 + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi = 8\pi + \frac{\pi}{2} = 4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Jedna otáčka je 2π*, tak* 8π *sú* 4 **otáčky***, zostáva teda* $\frac{\pi}{2}$*. Ale to je to isté čo sme už mali.*



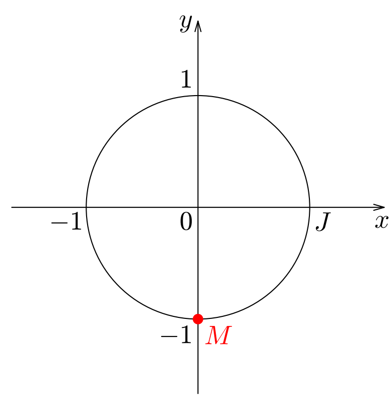
U: Dôležité ale je, uvedomiť si, že ***každému reálnemu číslu*** priradíme týmto spôsobom ***jednoznačne bod*** na jednotkovej kružnici. ***Obrátene*** to ale ***neplatí***, čo si ukážeme.

Ž: *To je ako s naším bežcom v úvode.*

U: Áno. Poloha bežca na oválnej trati nám nepovie, či je na danom mieste prvýkrát, alebo tretíkrát. Dokonca mohol bežať opačne.

Ž: *To znamená, že daný bod na jednotkovej kružnici mohol byť priradený viacerým reálnym číslam.*

U: Máš pravdu. Pokús sa teda na záver určiť ***množinu všetkých tých reálnych čísel***, ktorým je na jednotkovej kružnici ***priradený bod*** M podľa obrázka:



Ž: *Určím najskôr reálne číslo, ktoré nezohľadňuje žiadne otáčky.*

U: To číslo patrí vždy do intervalu $\langle 0;\ 2\pi)$.

Ž: *V kladnom smere má hodnotu 3-krát* $\frac{\pi}{2}$, *teda* $\frac{3\pi}{2}$.

U: Ostatné čísla dostaneš tak, že k tomuto základnému číslu prirátaš otáčky v kladnom alebo zápornom zmysle. Teda všetky reálne čísla, ktoré vyhovujú úlohe, zapíšeš v tvare

$$x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a predstavuje ***počet otáčok***.

Ž: *Načo je dobré takéto priradenie?*

U: Umožňuje ***definovať istý druh funkcií***, ako sú funkcie sínus, kosínus a podobne. Ale to je obsahom inej témy.

Príklad 1:
Zostrojte bod na jednotkovej kružnici, ktorý prislúcha reálnemu číslu $\dfrac{111\pi}{4}$.

U: Pripomeňme si, aká je ***dĺžka jednotkovej kružnice***.

Ž: *Je to* 2π, *lebo vzorec pre dĺžku kružnice je* $o = 2\pi r$ *a polomer je* 1.

U: Číslo $\dfrac{111}{4}$ uprav na tvar zmiešaného čísla.

Ž: $\dfrac{111\pi}{4} = \left(27 + \dfrac{3}{4}\right) \cdot \pi = 27\pi + \dfrac{3\pi}{4}$
27π *je zbytočné uvažovať, lebo to sú celé otáčky.*

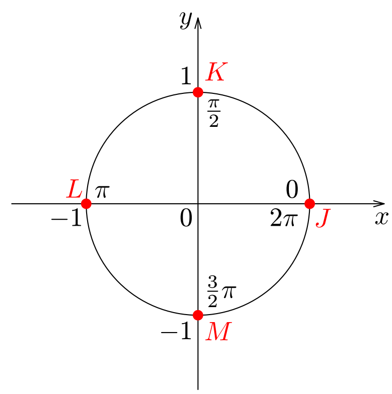
U: Pozor! Celá otáčka predstavuje oblúk dĺžky 2π. To znamená, že dĺžka oblúka pri vykonaní akéhokoľvek počtu celých otáčok, musí byť ***párnym násobkom čísla*** π a 27 je nepárne číslo.

Ž: *Tak to upravím na tvar:*

$$\frac{111\pi}{4} = 26\pi + \pi + \frac{3\pi}{4} = 26\pi + \frac{7\pi}{4}.$$

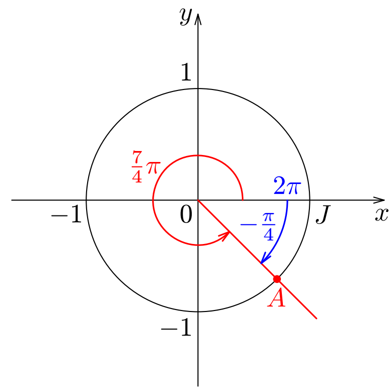
Číslo 26π *predstavuje* 13 *otáčok.*

U: Zostáva určiť oblúk dĺžky $\dfrac{7\pi}{4}$. Pomôžu ti 4 dôležité body J, K, L, M na jednotkovej kružnici, ktoré sú priradené uvedeným číslam podľa obrázka.



Ž: *Číslo* $\dfrac{7\pi}{4}$ *je viac ako* $\pi = \dfrac{4\pi}{4}$ *o* $\dfrac{3\pi}{4}$, *takže sa dostaneme do IV. kvadrantu.*

U: Správne. Dá sa to zdôvodniť aj tak, že z celej otáčky 2π treba ubrať $\dfrac{\pi}{4}$.



U: Číslu $\frac{111\pi}{4}$ je na jednotkovej kružnici priradený bod A.

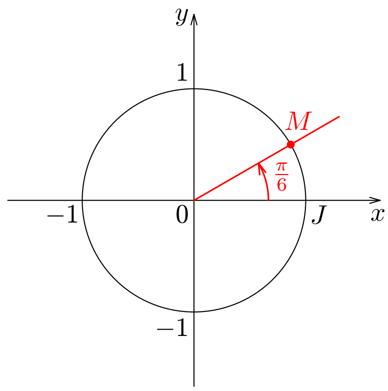
Príklad 2:
Rozhodnite, či dvojici reálnych čísel $\frac{25\pi}{6}$ *a* $-\frac{29\pi}{6}$ *je na jednotkovej kružnici priradený ten istý bod.*

Ž: $\frac{25}{6}$ *je nepravý zlomok, vyjadruje nejaké celky a časť celku, preto ho upravíme na tvar zmiešaného čísla*

$$\frac{25\pi}{6} = \left(4 + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{\pi}{6} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}.$$

Vykonáme dve celé otáčky a zostáva ešte $\frac{\pi}{6}$.

U: Číslo $\frac{\pi}{6}$ je trikrát menej ako číslo $\frac{\pi}{2}$, ktoré predstavuje dĺžku štvrť kružnice, takže aj oblúk bude trikrát kratší.

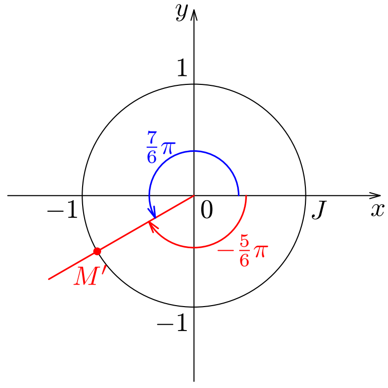


U: Podobným spôsobom pokračuj s číslom $-\frac{29\pi}{6}$.

Ž: *Dostávam*

$$-\frac{29\pi}{6} = -\left(4 + \frac{5}{6}\right) \cdot \pi = -4\pi - \frac{5\pi}{6} = 2 \cdot (-2\pi) - \frac{5\pi}{6}.$$

Zlomok upravím na tvar zmiešaného čísla. Celočíselný násobok čísla π *predstavuje dve otáčky v zápornom smere a* $-\frac{5\pi}{6}$ *je menej ako pol otáčky v zápornom smere. Dostaneme sa do* **III. kvadrantu**.



U: Máš pravdu. Zadaným číslam sú priradené ***rôzne body na jednotkovej kružnici***. Priradenie bodu pre záporné číslo $-\dfrac{29\pi}{6}$ môžeme urobiť však aj iným spôsobom. Čo keby sme dotiahli do konca aj tretiu otáčku v zápornom smere?

Ž: *Ako, do konca? Veď zostalo iba číslo* $-\dfrac{5\pi}{6}$. *Celú otáčku v zápornom smere vyjadruje číslo* -2π.

U: O koľko by sme číslo $-\dfrac{5\pi}{6}$ zmenili?

Ž: *Číslo* -2π *sa dá vyjadriť v tvare zlomku* $-\dfrac{12\pi}{6}$. *Odčítali by sme číslo* $\dfrac{7\pi}{6}$.

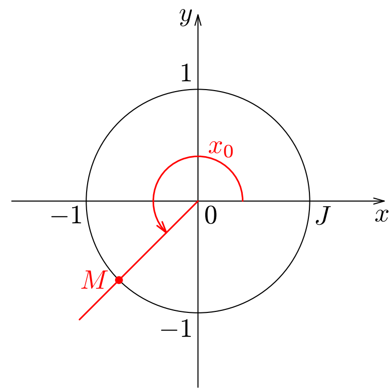
U: Aby sa však hodnota zadaného argumentu nezmenila, musíme preto číslo $\dfrac{7\pi}{6}$ aj pripočítať. Vyjadruje tak časť otáčky v kladnom smere. Sleduj úpravy:

$$-\frac{29\pi}{6} = -\frac{29\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = -\frac{36\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = -6\pi + \frac{7\pi}{6}$$

.

Ž: *Aha! Pre zostojenie bodu na jednotkovej kružnici sú nepodstatné* 3 *celé otáčky v zápornom smere a číslu* $\dfrac{7\pi}{6}$ *priradíme ten istý bod v III. kvadrante ako aj v mojom spôsobe riešenia.*

Príklad 3:
Určte všetky reálne čísla, ktorým je na jednotkovej kružnici priradený bod M podľa obrázka. Bod M leží na osi III. kvadrantu.



U: Najskôr určíme reálne číslo $x_0 \in \langle 0;\ 2\pi)$, ktoré predstavuje dĺžku oblúka JM v kladnom zmysle. Pomôž si napríklad tým, že pravému uhlu prislúcha oblúk dĺžky $\dfrac{\pi}{2}$.

Ž: **V kladnom zmysle**, *čiže proti smeru pohybu hodinových ručičiek prejdeme z bodu J do bodu M dvakrát pravý uhol a ešte jednu polovicu pravého uhla, čiže*

$$x_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

U: Všetky kladné reálne čísla x, ktorým je priradený bod M, sa dajú vyjadriť v tvare

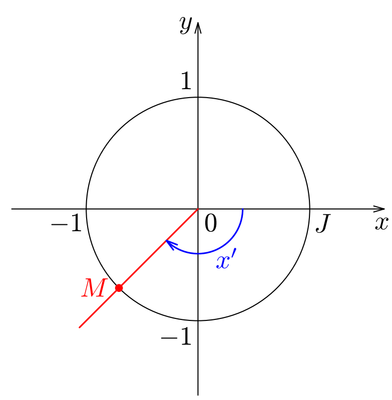
$$x = x_0 + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{N},$$

kde k vyjadruje počet otáčok v kladnom zmysle. V našom prípade:

$$x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi.$$

Ž: *To je jasné. Budú úlohe vyhovovať aj záporné čísla?*

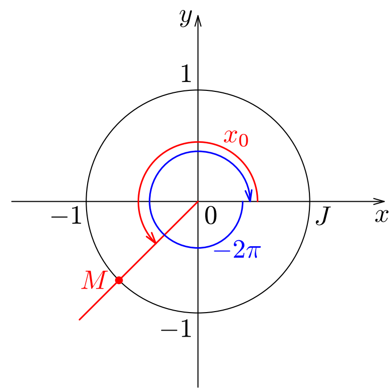
U: V tomto prípade treba merať dĺžku oblúka ***v zápornom zmysle***.



Ž: *Čiže v smere pohybu hodinových ručičiek, a to je*

$$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$$

U: Túto hodnotu získaš aj tak, že vykonáš 1 otáčku v zápornom zmysle a vrátiš sa v kladnom zmysle o $x_0=\frac{5\pi}{4}$, lebo $-\frac{3\pi}{4}=-2\pi+\frac{5\pi}{4}$.



Ž: *Alebo 2 otáčky v zápornom zmysle a potom $x_0=\frac{5\pi}{4}$.*

U: Takže aj záporné čísla, ktorým je na jednotkovej kružnici priradený bod M, možno vyjadriť v tvare súčtu celočíselných násobkov čísla 2π a čísla $x_0=\frac{5\pi}{4}$.

Ž: *Číslo k, ktoré vyjadruje násobky čísla 2π v tomto prípade, bude záporné.*

U: Spojením oboch výsledkov do jedného môžeme všetky riešenia úlohy vyjadriť v tvare

$$x=\frac{5\pi}{4}+k\cdot 2\pi,\ \ k\in\mathbb{Z},$$

kde $\mathbb{Z}$ označuje množinu celých čísel.

Príklad 4:
Zistite, ktoré body na jednotkovej kružnici prislúchajú reálnym číslam

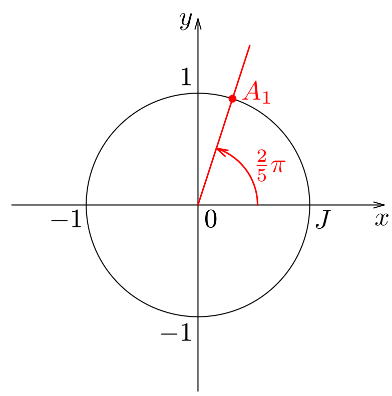
$$x = \frac{2\pi}{5} - \frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}.$$

U: Reálne číslo je vyjadrené ako rozdiel dvoch zlomkov, z ktorých každý má iný význam pre hľadanie prislúchajúcich bodov na jednotkovej kružnici.

Ž: *Keby tam nebol druhý zlomok, kde je parameter k, tak by to nebolo ťažké.*

U: Máš pravdu, táto situácia nastane, ak zoberieš $k = 0$.

Ž: *Potom sa $x = \dfrac{2\pi}{5}$ a tomuto číslu prislúcha mu bod (označím ho A_1) v* **I. kvadrante**, *pretože $\dfrac{2\pi}{5}$ je menej ako $\dfrac{\pi}{2}$.*



U: Správne. Pozrime sa na druhý zlomok. $k \cdot \dfrac{\pi}{4}$ predstavuje celočíselné násobky reálneho čísla $\dfrac{\pi}{4}$. Vieme, že číslu $\dfrac{\pi}{4}$ zodpovedá polovica oblúčika v jednom kvadrante, čiže otočenie o uhol 45 stupňov. Ak teda dosadíme k rovné jedna, od bodu A_1 otáčame o 45 stupňov. Pre k rovné dvom otáčame o 90 stupňov, čo je pravý uhol.

Ž: *Čiže, pre $k = 8$ budeme otáčať o 360°, to je jedna celá otáčka. Dostaneme sa opäť do bodu A_1 a potom sa všetky body začnú opakovať.*

U: Áno. A keby si za k dosadil číslo -8, tiež by si sa dostal naspäť do bodu A_1, ibaže v opačnom smere. Stačí teda za parameter k zobrať celé čísla od 0 do 7 vrátane, alebo od -7 do nuly vrátane, vypočítať príslušné x a priradiť body na jednotkovej kružnici.

Ž: *Pre všetky ostatné celé čísla už potom dostaneme tie isté body.*

U: Presne tak. Poďme počítať.
Pre $k = 1$ je $x = \dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{8\pi - 5\pi}{20} = \dfrac{3\pi}{20}$. Tomu priradíme bod A_2.
Pokračuj ďalej.

Ž: *Do zadania dosadím za parameter k postupne* **hodnoty 2, 3 až 7**. *Zlomky odčítam úpravou na spoločného menovateľa. Niektoré zlomky sa vo výsledku dajú krátiť. Všetky výpočty sú uvedené v rámčeku.*

$$k = 2;\; x = \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{4} = \frac{8\pi - 10\pi}{20} = -\frac{2\pi}{20} = -\frac{\pi}{10};\;\; A_3$$

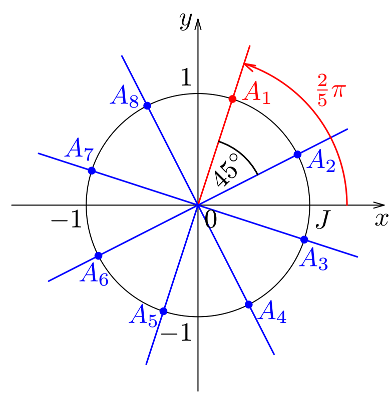
$$k = 3;\; x = \frac{2\pi}{5} - \frac{3\pi}{4} = \frac{8\pi - 15\pi}{20} = -\frac{7\pi}{20}; A_4$$

$$k = 4;\; x = \frac{2\pi}{5} - \frac{4\pi}{4} = \frac{8\pi - 20\pi}{20} = -\frac{14\pi}{20}; A_5$$

$$k = 5;\; x = \frac{2\pi}{5} - \frac{5\pi}{4} = \frac{8\pi - 25\pi}{20} = -\frac{19\pi}{20}; A_6$$

$$k = 6;\; x = \frac{2\pi}{5} - \frac{6\pi}{4} = \frac{8\pi - 30\pi}{20} = -\frac{24\pi}{20}; A_7$$

$$k = 7;\; x = \frac{2\pi}{5} - \frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi - 35\pi}{20} = -\frac{29\pi}{20}; A_8$$



U: Úlohe vyhovuje osem bodov, ktoré rozdelia kružnicu na osem rovnakých častí.

Príklad 5:
Určte $a \in \mathbb{Z}$ tak, aby body na jednotkovej kružnici prislúchajúce reálnym číslam $x = \frac{2\pi}{3}$ a $y = \frac{\pi}{4} - \frac{a\pi}{5}$ splývali.

Ž: *Ak body majú splývať, tak sa tieto čísla musia* **rovnať**. *Vyriešim rovnicu:*

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{a\pi}{5}.$$

U: To by pre teba nemal byť problém.

Ž: *Odstránim zlomky, teda vynásobím obe strany rovnice číslom* 60

$$40\pi = 15\pi - 12a\pi,$$

odčítam číslo 15π

$$25\pi = -12a\pi.$$

Nakoniec vydelím číslom -12π

$$a = -\frac{25\pi}{12\pi} = -\frac{25}{12}.$$

U: Je to riešenie úlohy, ak hľadáme celé čísla a?

Ž: $-\frac{25}{12}$ *nie je celé číslo, takže úloha nemá riešenie.*

U: Ale nezohľadnili sme všetky situácie. Čísla sa môžu rovnať, ale aj nemusia.

Ž: *A to ako nemusia?*

U: Zabudol si, že pri priraďovaní bodov na jednotkovej kružnici ten istý bod prislúcha nekonečne veľa rôznym číslam, ktoré sa ***líšia o násobky čísla*** 2π. Teda môže nastať:

$$y = x + k \cdot 2\pi,$$

kde k je celé číslo.
Po dosadení:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{a\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

Ž: *Jej riešenie potrebujem vysvetliť. Sú tam až dve neznáme.*

U: Budeme riešiť analogickými úpravami, ako si riešil ty v úvode. Vynásobíme 60

$$15\pi - 12a\pi = 40\pi + 120\pi k,$$

odčítame 15π

$$-12a\pi = 25\pi + 120\pi k,$$

odčítame $120\pi k$

$$-12a\pi - 120\pi k = 25\pi,$$

a nakoniec vydelíme číslom π

$$-12a - 120k = 25.$$

Ž: *To sa dá vyriešiť?*

U: Už sme len krok od cieľa. Keďže a aj k sú celé čísla, vzhľadom na koeficienty v poslednej rovnici stačí ***využiť deliteľnosť v množine celých čísel***. Čo sa dá urobiť s výrazom na ľavej strane?

Ž: *Vybral by som číslo* 12 *pred zátvorku:*

$$12(-a - 10k) = 25$$

.

U: Vzhľadom na to, že a aj k sú celé čísla, to znamená, že hodnoty výrazu na ľavej strane sú tiež celé čísla. Navyše deliteľné číslom 12, teda aj číslami 2 a 3. Ako je to s číslom na pravej strane?

Ž: *Číslo* 25 *nie je deliteľné ani číslom* 2*, ani číslom* 3*.*

U: Vzhľadom na to, že ***ľavá strana*** je pre ľubovoľné hodnoty neznámych ***párne číslo*** a 25 ***je nepárne číslo***, tak rovnosť nenastane nikdy. Rovnica nemá v množine celých čísel riešenie. ***Neexistuje*** teda také celé číslo a tak, aby daným dvom reálnym číslam prislúchal na jednotkovej kružnici ten istý bod.

Príklad 6:
Určte všetky reálne čísla $x = -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \cdot k$, *kde* k *je celé číslo tak, aby* $x \in \langle 0;\ 2\pi)$.

U: To, že $x \in \langle 0;\ 2\pi)$ znamená ***vyriešiť dve nerovnice***:
$x \geqq 0$, a zároveň $x \leqq 2\pi$.
V našom prípade prvá nerovnica po dosadení za x bude:

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \cdot k \geqq 0,$$

kde neznáma k je z množiny celých čísel.
To by nemal byť problém vyriešiť.

Ž: *Vynásobím číslom* 12

$$-9\pi - 8\pi k \geqq 0,$$

pripočítam číslo 9π

$$-8\pi k \geqq 9\pi$$

a vydelím číslom -8π

$$k \geqq -\frac{9\pi}{8\pi}.$$

U: Pozor! Zabudol si, že pri delení oboch strán nerovnice tým istým záporným reálnym číslom sa znak nerovnice mení na opačný. Posledná nerovnica má byť správne:

$$k \leqq -\frac{9\pi}{8\pi}$$

a po vykrátení

$$k \leqq -\frac{9}{8}.$$

Ž: *Keďže parameter* $k \in \mathbb{Z}$, *čo sú* **celé čísla**, *prvej nerovnici vyhovujú celé čísla:*

$$k \in \{\ldots;\ -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2\}.$$

U: Vyrieš podobným spôsobom druhú nerovnicu:

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \cdot k \leqq 2\pi.$$

Ž: *Opäť vynásobím číslom* 12

$$-9\pi - 8\pi k \leqq 24\pi,$$

pripočítam číslo 9π

$$-8\pi k \leqq 33\pi$$

a vydelím číslom -8π

$$k \geqq -\frac{33}{8}.$$

U: Ktoré celé čísla vyhovujú tejto nerovnici?

Ž: *Tejto nerovnici vyhovujú* **celé čísla**

$$k \in \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ \dots\}.$$

U: Obe nerovnice musia platiť súčasne. Ktoré celé čísla budú riešením pre parameter k?

Ž: *Treba zobrať tie, ktoré sú aj v jednej, aj v druhej množine.*

U: Hovorí sa tomu ***prienik množín*** riešení prvej a druhej nerovnice. Verím, že ho dokážeš určiť.

Ž: *Pre prienik množín mám*

$$\{\dots;\ -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2\} \cap \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ \dots\} = \{-4;\ -3;\ -2\}.$$

Úlohe teda vyhovujú 3 hodnoty pre parameter k.

U: Vypočítaj hodnoty neznámej $x = -\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} \cdot k$.

Ž: *Postupne* **dosadím za parameter hodnoty -4; -3 a -2**. *V každom prípade upravím zlomky na spoločného menovateľa a prevediem matematické operácie, tak ako to je v rámčeku.*

$$\boxed{\begin{aligned}
k = -4;\ x &= -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \cdot (-4) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{3} = \frac{-9\pi + 32\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}\\
k = -3;\ x &= -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \cdot (-3) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{3} = \frac{-9\pi + 24\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}\\
k = -2;\ x &= -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \cdot (-2) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{-9\pi + 16\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}
\end{aligned}}$$

U: Riešením úlohy sú teda tri čísla:

$$x \in \left\{\frac{23\pi}{12};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{12}\right\}.$$