Základné goniometrické rovnice

RNDr. Marián Macko

U: Čo si predstavuješ pod pojmom goniometrická rovnica?

Ž: *Rovnicu, ktorá obsahuje neznámu x ako argument niektorej goniometrickej funkcie. V rovnici môžu byť aj konštanty.*

U: Vedel by si uviesť príklad?

Ž: *Rovnica* $2\sin x = 1$.

U: Tvoj príklad rovnice patrí medzi ***základné goniometrické rovnice***. Majú tvar:

$$\sin x = a, \qquad \cos x = a, \qquad \mathrm{tg} x = a, \qquad \mathrm{cotg} x = a,$$

kde konštanta a je reálne číslo.

Ž: *V mojom prípade konštanta a sa rovná* $\frac{1}{2}$.

U: Má vôbec tvoja rovnica riešenie v množine reálnych čísel?

Ž: *Určite viem určiť jedno riešenie* $x = \frac{\pi}{6}$, *lebo* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

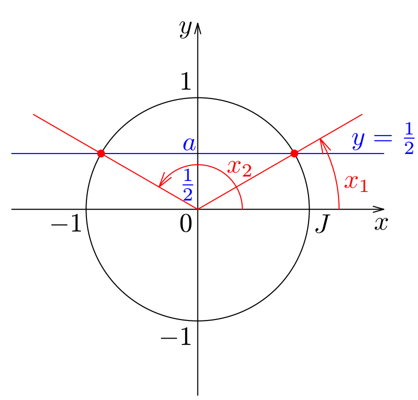
U: A je to jediné riešenie? Zváž, aké vlastnosti má funkcia sínus.

Ž: *Viem, že je periodická s najmenšou periódou 2π. Riešením rovnice budú aj čísla v tvare* $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, *kde k je celé číslo.*

U: Máš pravdu. Ak má goniometrická rovnica nejaké riešenie, tak ich má vzhľadom k periodickosti goniometrickej funkcie nekonečne veľa.

U: Základným problémom teraz je, koľko riešení má tvoja rovnica v intervale $\langle 0; 2\pi)$. Zatiaľ si našiel jedno riešenie. Nie je však jediné. Vráťme sa preto k definícií funkcie sínus a jej geometrickej interpretácií na jednotkovej kružnici.

Ž: *Jasné. Funkcia sínus priradí reálnemu číslu x y-ovú súradnicu bodu na jednotkovej kružnici. V našom prípade má byť y-ová súradnica $\frac{1}{2}$. Také body sú dva. Okrem už určeného riešenia aj bod v II. kvadrante.*



U: Všetky body s y-ovou súradnicou $\frac{1}{2}$ vytvárajú priamku rovnobežnú s osou x, pretínajúcu os y v bode $\frac{1}{2}$. Body, ktoré zodpovedajú hľadaným riešeniam rovnice získame prienikom tejto priamky a jednotkovej kružnice. Aké x zodpovedá bodu v II. kvadrante?

Ž: *Využijem súvis medzi II. kvadrantom a I. kvadrantom. Hľadané x_2 vyjadrím v tvare*

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

U: Čísla $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$, ktoré sú riešeniami rovnice v intervale $\langle 0; 2\pi)$ nazývame ***základné riešenia***. Všetky riešenia rovnice získame zo základných riešení pripočítaním násobkov najmenšej periódy funkcie sínus.

Ž: *Najmenšia perióda je 2π, preto riešenia rovnice sa dajú vyjadriť v tvare $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, alebo v tvare $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, kde k je celé číslo.*

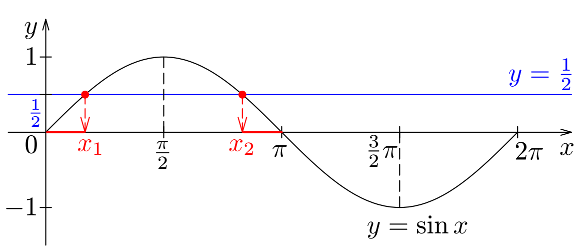
U: Množinu koreňov rovnice môžeme zapísať dvoma spôsobmi, tak ako to máš v rámčeku.

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\} \\ \mathcal{K} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{gathered}}$$

Ž: *Ten prvý je dosť komplikovaný. Ja radšej použijem ten druhý zápis.*

Ž: *Nemohli sme na vyriešenie rovnice využiť graf funkcie sínus?*

U: Samozrejme. Ide o grafický spôsob riešenia rovníc. Výrazy na ľavej a pravej strane rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$ predstavujú ***hodnoty dvoch funkcií***: $f : y = \sin x$ a funkcie $g : y = \frac{1}{2}$. My máme tieto funkcie dať do rovnosti.



U: Ako súvisia základné riešenia rovnice s grafmi týchto funkcií?

Ž: *Budú to **x-ové súradnice priesečníkov** týchto grafov.*

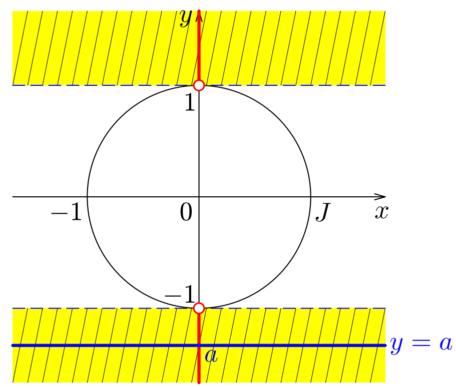
U: Postup riešenia základných goniometrických rovníc je teda založený buď na definíciách goniometrických funkcií a ich geometrickej interpretácii na jednotkovej kružnici alebo na využití grafov funkcií.

Ž: *Je jedno, čo z toho využijem?*

U: Áno. Nepodceňuj však obrázky. Ľahko sa ti môže stať, že na druhú základnú hodnotu riešenia zabudneš. Poďme teraz hľadať odpoveď na otázku, či má rovnica $\sin x = a$ v množine reálnych čísel vždy riešenie.

Ž: *Hodnoty funkcie $y = \sin x$ môžu byť iba v rozpätí od -1 do 1 vrátane. Ak by parameter a bol napríklad 3, tak by rovnica nemala riešenie.*

U: Takýchto hodnôt pre parameter a je nekonečne veľa. Ak platí: $|a| > 1$, tak rovnica $\sin x = a$ ***nemá riešenie***.

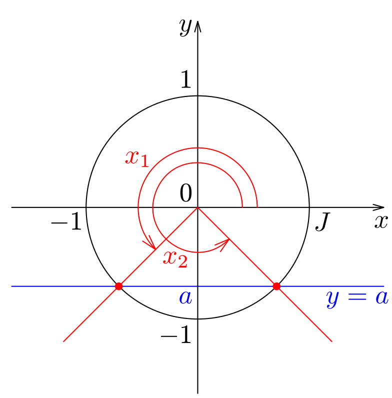


Ž: *Priamky rovnobežné s x-ovou osou vo vyšrafovaných oblastiach nepretnú jednotkovú kružnicu. Keďže neexistuje bod na jednotkovej kružnici, neexistuje ani riešenie pre neznámu x.*

U: Koľko základných riešení získaš, ak $|a| = 1$?

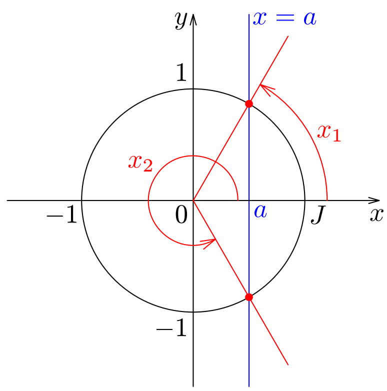
Ž: **Jedno základné riešenie pre** $a = 1$ *a jedno základné riešenie pre* $a = -1$.
Pre $a = 1$ dostanem rovnicu $\sin x = 1$. Riešením bude $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Pre $a = -1$ má rovnica tvar $\sin x = -1$ a jej riešenie je $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

U: Ostal posledný prípad. Pre každé reálne číslo a, pre ktoré platí $|a| < 1$ má rovnica $\sin x = a$ ***dve základné hodnoty riešenia*** $x_1;\ x_2$.



Ž: *Tuším, že v prípade rovnice $\cos x = a$ to bude* **analogické**.

U: Áno. Musíš si ale na jednotkovej kružnici všímať x-ovú súradnicu bodov, pretože ona určuje hodnoty funkcie kosínus.



U: Podobné analógie budú platiť aj pri riešení rovníc $\mathrm{tg}x = a$ a $\mathrm{cotg}x = a$. Ukážeme si preto, ako to bude s riešiteľnosťou rovnice $\mathrm{tg}x = a$.

Ž: *Hodnotami funkcie tangens môžu byť všetky reálne čísla. Preto* **pre ľubovoľné reálne číslo** a *bude mať rovnica* $\mathrm{tg}x = a$ *riešenie.*

U: To je prvá zmena oproti rovnici $\sin x = a$. Druhá zmena súvisí s periodickosťou.

Ž: *Tangens má najmenšiu periódu číslo* π*.*

U: Z toho vyplýva, že ak riešením rovnice je reálne číslo x, tak riešením sú aj čísla v tvare $x + k\pi$, kde k je celé číslo. Táto informácia nám zároveň hovorí, že základné hodnoty riešenia rovnice $\mathrm{tg}x = a$ budeme hľadať v intervale dĺžky π. Pre funkciu tangens je vhodný otvorený interval $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

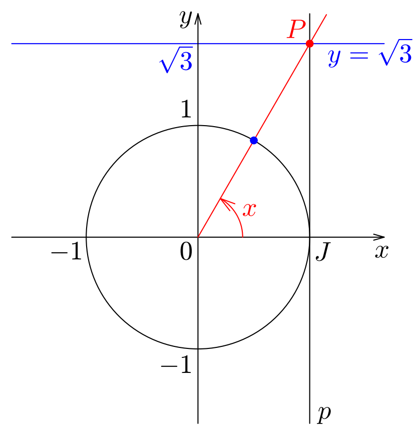
Ž: *Potom je to ešte jednoduchšie ako v prípade funkcie sínus. Tangens je na intervale* $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ *záporný a na intervale* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *kladný. Teda ak parameter* a *v rovnici* $\mathrm{tg}x = a$ *bude* **kladné** *reálne číslo, základná hodnota riešenia bude z intervalu* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$*.*

Ak parameter a *bude* **záporné** *reálne číslo,* x *bude patriť do otvoreného intervalu* $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$*. V oboch prípadoch bude mať rovnica jedno základné riešenie.*

U: Pre úplnosť uvediem, že ak $a = 0$, tak rovnica $\mathrm{tg}x = 0$ má základné riešenie $x = 0$.

U: Vidím, že si dobre využil vedomosti o funkcii tangens. Verím, že ti nebude robiť problém aplikovať tieto poznatky pre konkrétne hodnoty parametra a. Začnime rovnicou $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$.

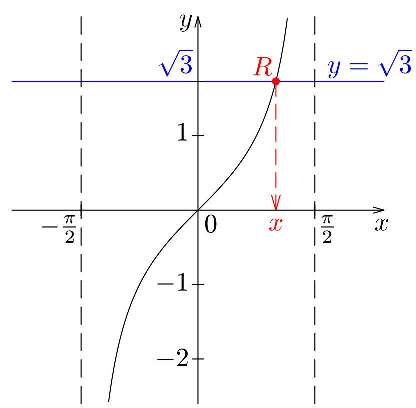
Ž: *Tangens predstavuje* y*-ovú súradnicu bodu bodu* P *na dotyčnici k jednotkovej kružnici v bode* $J\,[1; 0]$*.*



Ž: *Taký bod P je len jeden, a to v I. kvadrante. Zodpovedá mu hodnota neznámej* $x = \dfrac{\pi}{3}$.

U: Všetky riešenia rovnice $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$ preto vyjadríme v tvare $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, kde k je celé číslo.

U: Riešenie využitím grafu by vyzeralo tak, ako to je na obrázku.



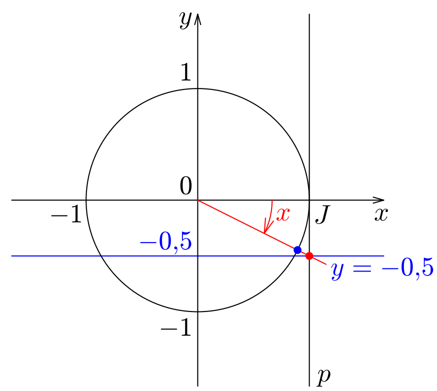
U: Ide o prienik grafov funkcie $f : y = \mathrm{tg}x$ a konštantnej funkcie $g : y = \sqrt{3}$. Samotné riešenie rovnice je určené x-ovou bodu R, ktorý je priesečníkom grafov týchto dvoch funkcií.

Ž: *Množinu koreňov rovnice zapíšeme v tvare* $\mathcal{K} = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

U: Áno. Priamka pretne základnú časť tangentoidy v jednom bode.
Vyriešme nakoniec rovnicu $\mathrm{tg}x = -0{,}5$.

Ž: *Základná hodnota riešenia bude v otvorenom intervale* $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$. *Určím ju pomocou kalkulačky.*

$$\boxed{x = -0{,}46365}$$



U: Vyjadriť všetky riešenia rovnice znamená pripočítať k tvojmu výsledku celočíselné násobky najmenšej periódy funkcie tangens. To sú násobky čísla π.

$$\boxed{x = -0{,}46365 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}}$$

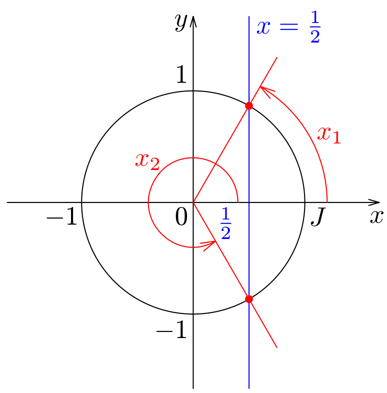
Príklad 1: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

U: Vyriešime najskôr rovnicu $\cos x = \dfrac{1}{2}$ na základe definície funkcie kosínus a jej geometrickej interpretácie na jednotkovej kružnici. Ako s tým súvisí funkcia kosínus?

Ž: *Hodnoty funkcie kosínus chápem ako x-ové súradnice bodov na jednotkovej kružnici, ktoré sú istým spôsobom priradené reálnemu číslu x.*

U: Hľadaj na jednotkovej kružnici všetky body, ktorých x-ová súradnica je $\dfrac{1}{2}$. K týmto bodom potom urč hodnotu neznámej x.

Ž: *Všetky body, ktoré majú x-ovú súradnicu rovnú $\dfrac{1}{2}$ vytvárajú priamku rovnobežnú s osou y, ktorá pretína os x v bode $\dfrac{1}{2}$. Táto priamka pretína jednotkovú kružnicu v dvoch bodoch. V* **I. a IV.** *kvadrante.*



U: Hodnota x prislúchajúca bodu jednotkovej kružnice v I. kvadrante patrí medzi význačné hodnoty: $x = \dfrac{\pi}{3}$. Ako určíš hodnotu pre bod vo IV. kvadrante?

Ž: *I. a IV. kvadrant sú symetrické podľa osi x, preto od čísla 2π odrátam hodnotu zodpovedajúcu bodu v I. kvadrante. Po úpravách som dostal výsledok $\dfrac{5\pi}{3}$.*

$$\boxed{x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}}$$

U: Čísla $\dfrac{\pi}{3}$ a $\dfrac{5\pi}{3}$ sú ***základné hodnoty riešenia*** rovnice $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Čo využijeme, aby sme určili všetky hodnoty riešenia?

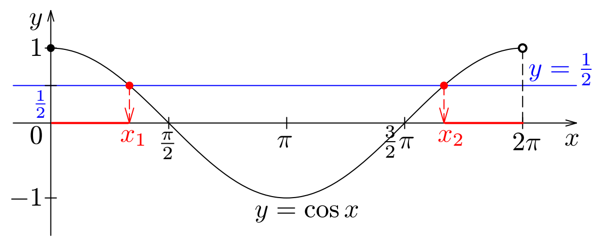
Ž: *Funkcia kosínus je periodická s najmenšou periódou 2π. Preto sa tieto hodnoty budú pravidelne opakovať. Všetky riešenia dostaneme, ak k základným hodnotám pripočítame celočíselné násobky čísla 2π.*

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

U: Pozrime sa ešte, ako bude vyzerať riešenie úlohy ***využitím grafov***. Výrazy na ľavej a pravej strane rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ predstavujú hodnoty dvoch funkcií.

Ž: *Jedna funkcia má predpis* $y = \cos x$ *a druhá funkcia je konštantná* $y = \frac{1}{2}$.

U: Keďže stačí nájsť základné hodnoty riešenia rovnice, stačí načrtnúť graf funkcie $y = \cos x$ na intervale $\langle 0; 2\pi)$. Ako určíš riešenie rovnice z grafu?



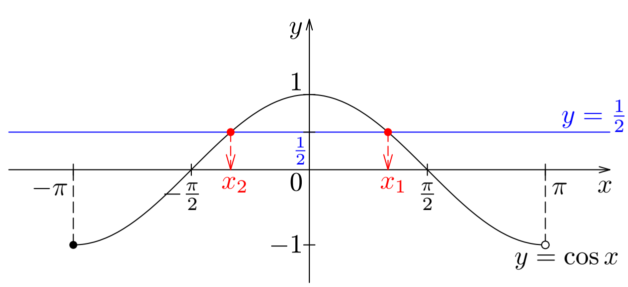
Ž: *V rovnici ide o rovnosť výrazov. Teda aj hodnoty funkcií sa majú rovnať. Riešením budú* **priesečníky grafov**.

U: y-ovú súradnicu priesečníkov si využil na porovnanie hodnôt funkcií. Hodnoty neznámej v rovnici sú x-ové súradnice týchto priesečníkov. Hodnota neznámej x_2, ako ukazuje obrázok, sa dá vyjadriť v tvare $2\pi - x_1$, čo je hodnota, ktorú sme získali aj pri prvom spôsobe riešenia úlohy.

Ž: *Číslo* x_1 *je známa hodnota, ktorú si máme pamätať.*

U: Áno. Dopočítať zvyšok je analógia prvému spôsobu riešenia.

Ukážeme si, že pri grafickom spôsobe sme mohli zobrať graf funkcie kosínus na inom, možno vhodnejšom intervale dĺžky 2π. Je to interval $\langle -\pi; \pi)$.



Ž: *Je symetrický podľa osi* y. *Čiže, ak vieme* x_1, *tak vieme aj* x_2, *lebo* $x_2 = -x_1$.

U: Vzhľadom na symetriu je to možno jednoduchšie. Základné hodnoty riešenia rovnice budú však uvedené z intervalu $\langle -\pi; \pi)$.

Úloha : *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

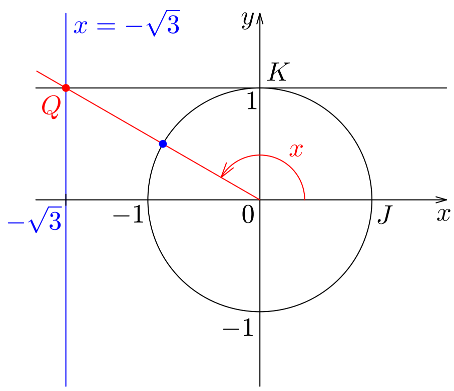
Príklad 2: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$.

U: Pozrime sa najskôr na riešenie rovnice $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$ z pohľadu geometrickej interpretácie funkcie kotangens pomocou jednotkovej kružnice. Ako odčítavame hodnoty funkcie kotangens?

Ž: *Musíme zostrojiť dotyčnicu k jednotkovej kružnici v bode* $K[0;1]$. *Potom reálnemu číslu* x *priradíme istým spôsobom bod na tejto dotyčnici. Kotangens prislúchajúci reálnemu číslu* x *bude určený* x*-ovou súradnicou tohto bodu.*

U: Takže teraz tento postup obráťme. Zápis rovnice znamená, že máme na dotyčnici nájsť všetky body, ktorých x-ová súradnica je rovná číslu $-\sqrt{3}$. Koľko takých bodov na dotyčnici existuje?

Ž: *Podľa načrtnutého obrázka jeden* **jediný bod**.



U: V ktorom kvadrante sa tento bod nachádza?

Ž: *Bod patrí do II. kvadrantu.*

U: Zostáva určiť reálne číslo x, ktorému je tento bod v II. kvadrante priradený. Vieš, že $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}$ je rovný číslu $\sqrt{3}$.

Ž: *Hodnota* x *pre zodpovedajúce body v* **II. kvadrante** *sa vypočíta ako rozdiel čísla* π *a vami uvedenej význačnej hodnoty argumentu* x.

$$\boxed{x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}}$$

U: Určil si zatiaľ základnú hodnotu riešenia z otvoreného intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Nie sú to však všetky riešenia. Funkcia kotangens je periodická s najmenšou periódou π.

Ž: *Pripočítam k hodnote* $\frac{5\pi}{6}$ *celočíselné násobky čísla* π.

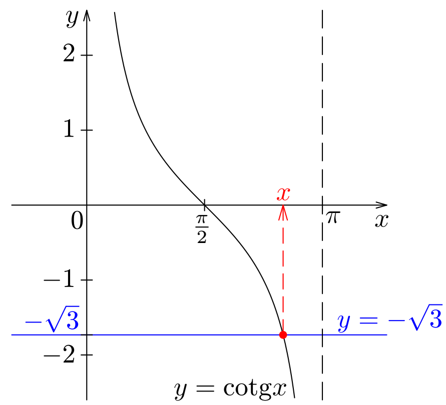
$$\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + k\pi}$$

U: Množinu koreňov rovnice $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$ zapíšeme v tvare, ktorý máš v rámčeku.

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

U: Porovnajme tento spôsob riešenia s ***metódou využitia grafu***.

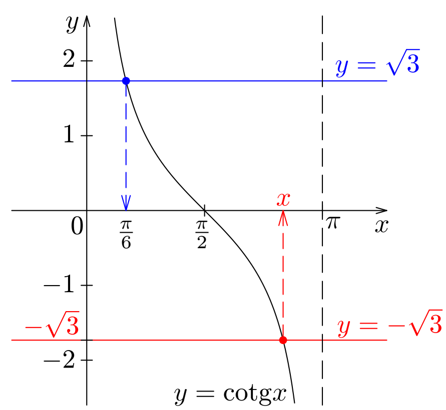
Ž: *Pre základné riešenie načrtnem graf funkcie kotangens na otvorenom intervale* $(0;\pi)$. *To je funkcia určená výrazom na ľavej strane rovnice* $\mathrm{cotg}x = -\sqrt{3}$. *Na pravej strane je iba číslo. To by mohla byť konštantná funkcia* $y = -\sqrt{3}$. *Jej graf je rovnobežka s osou* x.



U: Ide ti to veľmi dobre. Dokážeš interpretovať, ako sa na grafe prejaví základná hodnota riešenia rovnice pre neznámu x?

Ž: *Mal by som určiť priesečník grafov. Riešením rovnice bude* x**-ová súradnica** *tohto* **priesečníka**.

U: Pre určenie tejto hodnoty využijeme stredovú súmernosť grafu funkcie kotangens. Stredom súmernosti je bod $\left[\frac{\pi}{2};0\right]$. Pozri na obrázok.



Ž: *Je to jasné. V podstate je to ináč zobrazená situácia z jednotkovej kružnice.*

Úloha : *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\mathrm{cotg}x = \pi$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \{0{,}30817 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Príklad 3: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$.

Ž: *Vydelil by som obe strany rovnice výrazom* $\sin x$*.*

U: V matematike to nie je dovolená úprava. Môžeš deliť iba nenulovým číslom. Výraz $\sin x$ nadobúda pre niektoré reálne čísla nulovú hodnotu. Delil by si nulou, čo sa nedá. Navyše by si stratil nejaké riešenia pre neznámu x. Pokús sa upraviť výraz na ľavej strane rovnice. Čo sa dá urobiť?

Ž: **Vybrať pred zátvorku** *výraz* $\sin x$*?*

U: Je to vhodnejší spôsob riešenia. V zátvorke zostane výraz $\sin x + \cos x$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0, \\ &\sin x(\sin x + \cos x) = 0. \end{aligned}}$$

U: Dostali sme na ľavej strane ***súčin dvoch výrazov***. Má sa rovnať nule. Kedy to platí?

Ž: *Súčin dvoch výrazov je nula, ak jeden výraz je nula, alebo druhý výraz je nula.*

U: Platí aj obrátená implikácia. Daná vlastnosť sa formuluje z hľadiska logiky v tvare ekvivalencie. Súčin dvoch čísel je rovný nule ***práve vtedy, keď*** aspoň jedno z čísel je rovné nule. V našom prípade zapíšeme:

$$\sin x\,(\sin x + \cos x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin x = 0 \qquad \vee \qquad \sin x + \cos x = 0.$$

Ž: *Prvú rovnicu viem vyriešiť, ale s druhou mi budete musieť pomôcť.*

U: Vyrieš teda rovnicu $\sin x = 0$.

Ž: *Jej riešením budú všetky celočíselné násobky čísla* π*.*

U: Označme množinu koreňov tejto rovnice symbolom $\mathcal{K}_1$. Platí teda: $\mathcal{K}_1 = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

U: A teraz k rovnici $\sin x + \cos x = 0$. V čom je pre teba problém?

Ž: *V rovnici sú dve rôzne funkcie, sínus a kosínus. Mám ich porovnávať?*

U: Nie je to nutné. Na vyriešenie rovnice môžeme využiť inú goniometrickú funkciu.

Ž: *Myslíte funkcie tangens a kotangens?*

U: Presne tak. Pri riešení tejto rovnice je vhodné od dvoch rôznych funkcií sínus a kosínus prejsť k jednej funkcii. Napríklad k funkcii tangens.

Ž: *To ale potrebujeme zlomok* $\dfrac{\sin x}{\cos x}$*, aby sme použili tangens.*

U: Tak si taký zlomok vyrobíme. Vydelíme obe strany rovnice výrazom $\cos x$.

Ž: *A to sa dá? Veď pred chvíľou ste vysvetľovali, že výraz môže mať nulovú hodnotou. Takým číslom sa nedá deliť.*

U: Som rád, že si pochopil problém delenia výrazom. V tomto prípade úprava bude ekvivalentná, lebo pre tie reálne čísla x, pre ktoré je kosínus rovný nule, sú hodnoty funkcie sínus nenulové. Na ľavej strane rovnice $\sin x + \cos x = 0$ dostaneme v tomto prípade nenulové číslo. Hodnoty, pre ktoré $\cos x = 0$, nie sú riešením rovnice, ktorú práve riešime.

Ž: *Je mi to jasnejšie. Pri takýchto úpravách sa mám zamýšľať nad výrazmi na ľavej a pravej strane rovnice.*

U: Vráťme sa teda k úprave rovnice $\sin x + \cos x = 0$. Vydelíme obe strany výrazom $\cos x$. Výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$ nahradíme symbolom $\mathrm{tg} x$. Sleduj rámček.

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x + \cos x = 0,\\[2ex]&\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0,\\[2ex]&\mathrm{tg} x + 1 = 0.\end{aligned}}$$

Ž: *Ďalej je to už jednoduchá úloha. Vyriešim rovnicu* $\mathrm{tg} x = -1$. *Má jedno základné riešenie a to číslo* $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

U: Všetky riešenia rovnice $\mathrm{tg} x = -1$ vyjadríme v tvare $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, kde k je celé číslo. To preto, lebo funkcia tangens je periodická. Najmenšou periódou je číslo π. Platí teda:

$$\mathcal{K}_2 = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

U: Ako dostaneme množinu koreňov zadanej rovnice?

Ž: *Zjednotením oboch množín.*

$$\boxed{\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2 = \left\{k\pi;\ \frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Príklad 4: *Vyriešte na uzavretom intervale* $\langle -10; 10\rangle$ *rovnicu* $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = 0$.

U: Úloha nie je náročná. Pri jej vyriešení vyžiješ aj vedomosti o zlomkoch. Tie robia občas problém. Tušíš v čom?

Ž: *V* **menovateli** *zlomku* **nesmie byť nula**.

U: Výborne. Začnime teda riešením podmienky. Výraz $1-\cos x$ nesmie byť rovný nule. Pokračuj v riešení.

Ž: *To znamená, že kosínus pre neznámu* x *nesmie nadobúdať hodnotu* 1. *V základnom intervale* $\langle 0; 2\pi)$ *má kosínus hodnotu* 1 *iba raz. Vtedy argument* x *je rovný číslu* 0.

U: Ak využijeme periodickosť funkcie kosínus s najmenšou periódou 2π, tak definičným oborom rovnice budú všetky reálne čísla okrem párnych násobkov čísla π.

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

U: Zadaný obor rovnice je uzavretý interval $\langle -10; 10\rangle$. Z tejto množiny vylúčime párne celočíselné násobky čísla π. Sú to čísla -2π; 0; 2π. Pri samotnom riešení rovnice nemusíme robiť žiadne úpravy. K riešeniu stačí dôjsť logickou úvahou. Uvedom si, čo znamená daný zápis rovnice.

$$\boxed{\frac{\sin x}{1-\cos x} = 0}$$

Ž: *Zlomok sa má rovnať nule.*

U: Kedy to nastane?

Ž: *Ak* **čitateľ** *zlomku sa* **rovná nule**. *V našom prípade výraz* $\sin x$ *sa rovná nule.*

U: Ale riešenie tejto rovnice $\sin x = 0$ zvládneš hravo aj sám.

Ž: *V množine reálnych čísel sú riešením rovnice* $\sin x = 0$ *všetky celočíselné násobky čísla* π.

U: Zohľadni teraz obor rovnice a definičný obor rovnice. Vzhľadom na podmienku nemôžeš uvažovať párne celočíselné násobky čísla π.

Ž: *Ak zo všetkých celočíselných násobkov čísla* π *vylúčim párne násobky, zostanú* **nepárne celočíselné násobky čísla** π.

U: Zostáva určiť, ktoré nepárne násobky čísla π patria do uzavretého intervalu $\langle -10; 10\rangle$. Vtedy dostaneš množinu koreňov zadanej rovnice.

Ž: *To je ľahké. Číslo* π *je približne* $3,14$. *Medzi čísla* -10 *a* 10 *patria iba jeho trojnásobok, jedennásobok a to isté so znamienkom mínus.*

U: Riešením rovnice je teda množina $\mathcal{K} = \{-3\pi;\ -\pi;\ \pi;\ 3\pi\}$.

Úloha : *Vyriešte na uzavretom intervale* $\langle -10; 10\rangle$ *rovnicu* $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 0$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \left\{-\dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{2}\right\}$

Príklad 5: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $4\cos^2 x = 3\mathrm{cotg}^2 x$.

Ž: *Hodnotu funkcie kotangens by som na základe definície zapísal ako podiel hodnôt funkcií kosínus a sínus.*

$$\boxed{4\cos^2 x = 3\,\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

U: Ideš na to dobre. Mohlo by sa nám zdať, že sme si veľmi nepomohli. Upravili sme rovnicu obsahujúcu dve rôzne funkcie a to kosínus a kotangens na inú rovnicu. Aj táto rovnica obsahuje dve funkcie, sínus a kosínus a navyše aj zlomok. Bude však prostriedkom na vyriešenie úlohy. Zlomky v rovnici si vyžadujú určiť podmienky. Aká ***podmienka*** musí platiť v poslednej rovnici?

Ž: *V menovateli zlomku nesmie byť nula. To znamená, že výraz* $\sin^2 x$ *musí byť rôzny od nuly.*

U: Druhá mocnina výrazu je rôzna od nuly, ak základ mocniny, teda výraz $\sin x$, je rôzny od nuly. Vyrieš túto podmienku.

Ž: *Podmienka* $\sin x \neq 0$ *je splnená pre všetky reálne čísla* x*, okrem celočíselných násobkov čísla* π.

U: Správne, do definičného oboru rovnice nepatria čísla vyjadrené v tvare $k\pi$, kde k je celé číslo. Vráťme sa teraz k riešeniu rovnice $4\cos^2 x = 3\,\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$. Ako by si pokračoval v jej úpravách?

Ž: *Viem, že ak sú v rovnici zlomky, je dobré ich odstrániť.* **Vynásobím** *obe strany rovnice* **výrazom** $\sin^2 x$. *Vznikla rovnica* $4\cos^2 x \cdot \sin^2 x = 3\cos^2 x$.

U: Tento zápis nás zvádza vydeliť v ďalšom kroku obe strany rovnice výrazom $\cos^2 x$.

Ž: *Vykrátiť výrazy v rovnici týmto výrazom.*

U: Výraz, ktorým by sme delili, nadobúda pre niektoré reálne čísla x nulovú hodnotu. Riešenie by sa rozdelilo na dva prípady. V prípade, že hodnoty výrazu, ktorým vydelíme obe strany rovnice sú nenulové, bude úprava delenia ekvivalentná. Zvlášť by sme vyriešili prípad, kedy výraz, ktorým delíme, nadobúda nulové hodnoty.

U: Vhodnejším spôsobom riešenia rovníc je upraviť rovnicu na anulovaný tvar.

Ž: *Čo to znamená?*

U: Na jednej strane rovnice je číslo nula.

Ž: *Odrátam výraz* $3\cos^2 x$. *V nasledujúcej úprave rovnice vyberiem tento výraz* **pred zátvorku** *na ľavej strane rovnice a dostanem súčin výrazov* $\cos^2 x$ *a* $4\sin^2 x - 3$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 4\cos^2 x\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0, \\[1em] \cos^2 x\left(4\sin^2 x - 3\right) = 0. \end{array}}$$

U: Kedy sa súčin dvoch výrazov rovná nule?

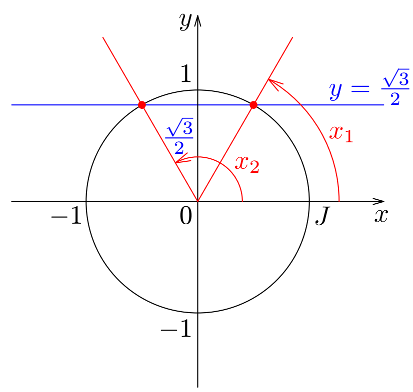
Ž: *Ak aspoň jeden z výrazov je nula. V našom prípade* $\cos^2 x$ **je nula**, *alebo zátvorka je nulová. To prvé vyriešim jednoducho. Aby druhá mocnina funkcie kosínus dávala nulu, musí platiť* $\cos x = 0$. *Riešením tejto rovnice sú nepárne násobky čísla* $\frac{\pi}{2}$. *A so zátvorkou potrebujem poradiť.*

U: Výraz $\left(4\sin^2 x - 3\right)$ ***rozložíme podľa vzorca*** $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$. Sleduj v rámčeku.

$$\boxed{\begin{aligned} 4\sin^2 x - 3 &= 0, \\ (2\sin x - \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{3}) &= 0. \end{aligned}}$$

U: Dostali sme na ľavej strane súčin dvoch výrazov. Ten má byť rovný nule. Tak ako pred chvíľou. Verím, že túto časť riešenia už zvládneš sám.

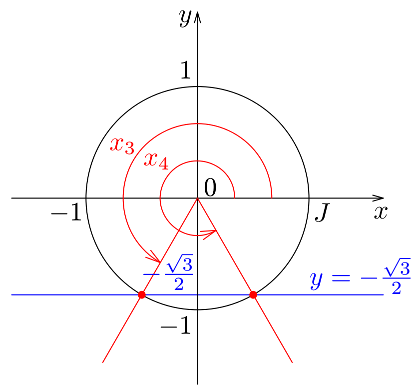
Ž: *Budem riešiť dve rovnice:* $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ *a* $2\sin x + \sqrt{3} = 0$. *Z prvej rovnice úpravou pripočítaním a delením dostávam rovnicu* $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Sínus je kladný v I. a II. kvadrante. Preto základnými hodnotami riešenia pre neznámu* x *tejto rovnice budú čísla* $x_1 = \frac{\pi}{3}$ *a* $\frac{2\pi}{3}$.



U: K základným riešeniam pripočítame celočíselné násobky čísla 2π, lebo funkcia sínus je periodická s najmenšou periódou 2π. Vyrieš podobne druhú rovnicu.

Ž: *Po úprave dostanem podobnú rovnicu, iba na pravej strane bude znamienko mínus. Teda* $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

U: Základné hodnoty budú zodpovedať bodom na jednotkovej kružnici v III. a vo IV. kvadrante.



Ž: *Riešenie x_3 bude rovné číslu $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Pre IV. kvadrant bude prislúchať $x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.*

U: Ak to celé zhrnieme, dostávame riešenie zadanej rovnice vyjadrené číslami v piatich tvaroch. Nepárne násobky čísla $\frac{\pi}{2}$ a čísla x označené indexami 1 až 4.

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

U: Dúfam, že si nezabudol overiť, či tieto čísla vyhovujú podmienke.

Ž: *Žiadne číslo v tomto tvare nie je zároveň celočíselný násobok čísla π. To bola podmienka.*

U: Zapísaná množina je aj množinou koreňov rovnice.

Príklad 6: *V intervale $\langle 0; 2\pi)$ vyriešte rovnicu $4\sin^3 x = \sin x$.*

U: Upravme rovnicu tak, že všetky výrazy dáme na jednu stranu rovnice.

Ž: *Odčítame výraz $\sin x$ od oboch strán rovnice.*

$$\boxed{4\sin^3 x - \sin x = 0}$$

U: Rovnica v tomto tvare nás nabáda svojím výrazom na ľavej strane k ďalšej úprave. Aká bude?

Ž: *Vyberiem výraz $\sin x$ **pred zátvorku**. To, čo zostalo v zátvorke, **rozložím** podľa vzorca $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$. Dostanem $\sin x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$.*

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x(4\sin^2 x - 1) &= 0, \\ \sin x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) &= 0. \end{aligned}}$$

U: Ak si uvedomíš, kedy je súčin troch výrazov rovný nule, zistíš, že riešenie zadanej rovnice sme previedli na riešenie niekoľkých základných goniometrických rovníc.

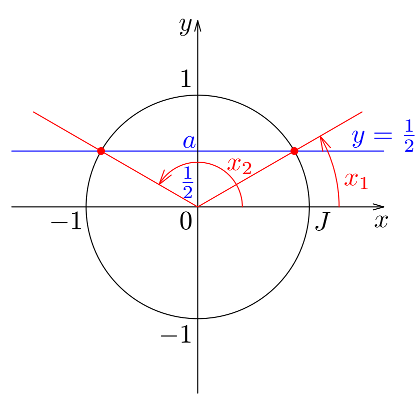
Ž: *Buď bude sínus rovný nule, alebo výraz v prvej zátvorke bude rovný nule, alebo výraz v druhej zátvorke. Budem riešiť tri rovnice. Dosť veľa práce.*

U: Rovnice budú podobné. Preto sa budú opakovať aj postupy riešenia týchto rovníc. Začni rovnicou $\sin x = 0$.

Ž: *Vyskytuje sa veľmi často. Dokonca aj pri funkciách tangens a kotangens. Jej riešenie si pamätám, je jednoduché. Rovnici vyhovujú **celočíselné násobky čísla** π.*

U: Ak takto zvládneš aj zvyšné dve rovnice, nemáme čo robiť. Rovnicu $2\sin x - 1 = 0$ upravíme na tvar $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Urč jej dve riešenia v zadanom obore rovnice.

Ž: *Viem, že sínus je kladný v **I. a v II. kvadrante**. Hodnota v I. kvadrante patrí medzi význačné. Sínus pre $\dfrac{\pi}{6}$ je rovný číslu $\dfrac{1}{2}$, preto jedno riešenie je $\dfrac{\pi}{6}$. Na určenie druhého riešenia si pomôžem jednotkovou kružnicou.*



U: Hodnota v II. kvadrante sa vypočíta tak, že od čísla π uberieme určenú hodnotu z I. kvadrantu:

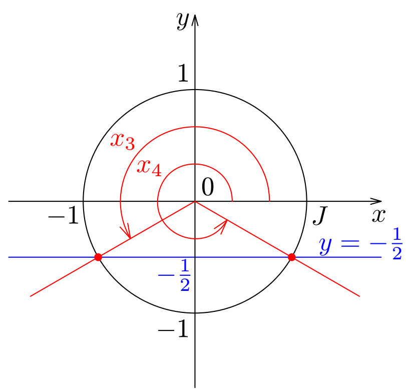
$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Zostáva ti vyriešiť poslednú rovnicu $2\sin x + 1 = 0$.

Ž: *Mali ste pravdu. Bude dosť analogická tej predchádzajúcej. Len na pravej strane po úprave bude znamienko mínus.*

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$

Ž: *Jej riešenia budú zodpovedať bodom na jednotkovej kružnici v* **III. a IV. kvadrante**.



Ž: *Riešenie v III. kvadrante určím tak, že k číslu π pripočítam hodnotu zodpovedajúcu I. kvadrantu. Prechod medzi IV. a I. kvadrantom je cez uhol 2π. Teraz však hodnotu zodpovedajúcu I. kvadrantu odpočítam.*

$$\boxed{\begin{aligned} \pi + \frac{\pi}{6} &= \frac{7\pi}{6}, \\ 2\pi - \frac{\pi}{6} &= \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}}$$

U: Ak usporiadame všetky riešenia týchto troch základných rovníc podľa veľkosti, množina koreňov zadanej rovnice sa bude dať zapísať v tvare

$$\boxed{\mathcal{K} = \left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \pi;\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right\}}$$

Príklad 7: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\dfrac{5\sin x+4}{10\sin x+4}=1$.

U: Začneme ***podmienkou*** pre výraz na ľavej strane rovnice. Výraz je v tvare zlomku, preto v menovateli nesmie byť nula.

Ž: *Podmienka má tvar* $10\sin x+4\neq 0$. *Najskôr odčítam číslo* 4, *potom vydelím číslom* 10 *a zlomok na pravej strane vykrátim dvomi. Dostanem nerovnicu, ktorá je v poslednom riadku nasledujúceho rámčeka.*

$$\boxed{\begin{aligned} 10\sin x &\neq -4,\\ \sin x &\neq -\frac{4}{10},\\ \sin x &\neq -\frac{2}{5}. \end{aligned}}$$

U: Hodnotu neznámej x, ktorá prislúcha funkčnej hodnote sínus rovnej $-\dfrac{2}{5}$ určíme použitím ***kalkulačky***.

Ž: *Pre* x *vyšlo približne* $-0{,}4115$. *Prečo je to záporné číslo?*

U: Pracovný režim kalkulačky je takto nastavený. Ak je hodnota funkcie sínus reálneho čísla x kladná, tak x patrí do intervalu $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$. Ak je hodnota funkcie sínus reálneho čísla x ***záporná***, tak x patrí do intervalu $\left\langle -\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$.

Ž: *Aha! To je teda aj náš prípad. Mohli by sme riešenie pre* x *vyjadriť kladným číslom?*

U: Samozrejme. Funkcia sínus je periodická. Ak periódu 2π prirátame k nášmu výsledku, dostaneme riešenie zodpovedajúce bodu na jednotkovej kružnici vo ***IV. kvadrante***. Aký bude výsledok?

Ž: *Dostaneme číslo* $5{,}8717$. *Spomínam si, že funkcia sínus nadobúda hodnotu* $-\dfrac{2}{5}$ *v intervale* $\langle 0;\ 2\pi)$ *dvakrát. Tejto hodnote zodpovedá aj bod v* **III. kvadrante**.

U: Správne. Dokážeš určiť výsledok aj pre tento prípad?

Ž: *Nemal by to byť problém. K číslu* π *prirátam hodnotu* $0{,}4115$ *a dostávam druhé riešenie* $x=3{,}5531$.

U: Zohľadníme ešte periodickosť funkcie sínus s najmenšou periódou 2π. Preto do definičného oboru rovnice budú patriť všetky reálne čísla, okrem čísel zapísaných v tvare $3{,}5531+2k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo, ale aj čísla v tvare $5{,}8717+2k\pi$.

$$\boxed{\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{3{,}5531+2k\pi;\ 5{,}8717+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

Ž: *Čo to znamená definičný obor rovnice?*

U: Definičný obor rovnice je získaný riešením všetkých podmienok pre zadanú rovnicu. Znamená množinu všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť do rovnice tak, aby výrazy v tejto rovnici mali zmysel. Zatiaľ nezáleží na tom, či tieto čísla sú koreňmi rovnice. V našej zadanej rovnici je jeden zlomok, preto sme pre určenie definičného oboru riešili jednu podmienku.

Začnime zadanú rovnicu upravovať.

Ž: *Obe strany rovnice* **vynásobíme výrazom** $10\sin x + 4$, *aby sme odstránili zlomok. Výrazy s neznámou dáme na ľavú stranu rovnice, konštanty na pravú stranu.*

$$\frac{5\sin x + 4}{10\sin x + 4} = 1,$$

$$5\sin x + 4 = 10\sin x + 4,$$

$$5\sin x = 0,$$

$$\sin x = 0.$$

U: Násobenie oboch strán rovnice výrazom $10\sin x + 4$ bolo ekvivalentnou úpravou. Násobili sme výrazom, ktorý nenadobúda nulové hodnoty. Preto sme určili podmienku na začiatku riešenia úlohy.

Dokonči riešenie určením koreňov rovnice $\sin x = 0$.

Ž: *Sínus má nulové hodnoty pre* **celočíselné násobky čísla** π.

U: Vyhovujú tieto čísla podmienke? Inými slovami, patria do definičného oboru rovnice?

Ž: *Definičný obor rovnice je množina reálnych čísel, okrem čísel v tvare* $3{,}5531 + 2k\pi$ *a v tvare* $5{,}8717 + 2k\pi$, *kde* k *je celé číslo. Čísla* $k\pi$, *ktoré sme dostali z poslednej rovnice, sú iné.*

U: Máš pravdu. Množina koreňov zadanej rovnice sú všetky čísla v tvare $k\pi$, kde k je celé číslo.

$$\boxed{\mathcal{K} = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Príklad 8: *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\cos x = -0{,}3 \sin x$.

Ž: *Jednoduché zadanie, ale zaskočilo ma, že v rovnici sa neznáma vyskytuje ako argument dvoch goniometrických funkcií.*

U: Zatiaľ riešime jednoduché goniometrické rovnice. V takých sa vyskytuje iba jedna goniometrická funkcia. To znamená, že aj rovnice zadaného typu treba upraviť na jednoduchší tvar. Od funkcií sínus a kosínus prejdeme napríklad k funkcii kotangens. Pripomeň, ako je funkcia kotangens definovaná.

Ž: *Kotangens je podiel funkcie kosínus a sínus.*

$$\boxed{\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

U: ***Vydelíme*** teda obe strany rovnice ***výrazom*** $\sin x$, lebo funkciu sínus potrebujeme dostať do menovateľa zlomku. Sleduj rámček. V ďalšom riadku úprav výraz $\frac{\cos x}{\sin x}$ nahradíme výrazom $\mathrm{cotg} x$.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= -0{,}3 \sin x, \\ \frac{\cos x}{\sin x} &= -0{,}3, \\ \mathrm{cotg} x &= -0{,}3. \end{aligned}}$$

Ž: *Posledná rovnica je už jednoduchá. Mohli ste pri úpravách rovnice deliť výrazom* $\sin x$*? Čo ak tento výraz má nulovú hodnotu?*

U: Správna pripomienka. Pozrime sa preto bližšie na výraz $\sin x$. Aké sú hodnoty neznámej x, ak výraz $\sin x$ je rovný nule?

Ž: *Riešením rovnice* $\sin x = 0$ *sú všetky celočíselné násobky čísla* π.

U: Ak sa pozrieme na pôvodnú zadanú rovnicu $\cos x = -0{,}3 \sin x$, vieme, že pre celočíselné násobky čísla π sa pravá strana rovná nule. Akú hodnotu má pre celočíselné násobky čísla π ľavá strana rovnice?

Ž: *Pre* $x = 0$ *je* $\cos x = 1$ *a pre* $x = \pi$ *má hodnotu* -1. *Na ľavej strane rovnice sa budú striedať hodnoty* 1 *a* -1. *To znamená, že by rovnosť neplatila.*

U: Máš pravdu. Podrobnejšie sme rozobrali súvis medzi hodnotami funkcií sínus a kosínus. Funkcie ***sínus a kosínus nenadobúdajú naraz nulovú hodnotu***. Ak hodnoty jednej funkcie sú nulové, druhá funkcia má nenulové hodnoty. Konkrétne 1 alebo -1. Delením rovnice výrazom $\sin x$ nestratíme riešenia. Naša úprava je v tomto prípade ekvivalentná.

U: Porozumel som. Deliť výrazy na oboch stranách rovnice môžem iba nenulovým číslom.

U: Ak ide o výraz vždy sa nad nim zamysli. Rozober aj prípad, keď tento výraz má nulové hodnoty. Myslím, že už môžeme dokončiť riešenie. Nájsť korene rovnice $\mathrm{cotg} x = -0{,}3$ nebude náročné. Koľko základných hodnôt riešenia má táto rovnica?

Ž: *Jedno riešenie zodpovedajúce II. kvadrantu, lebo tam je kotangens záporný. Určím ho pomocou kalkulačky.*

$$x = -1{,}27934.$$

Zaujímavé. Je to záporná hodnota. Vôbec to nezodpovedá II. kvadrantu.

U: Pracovný režim kalkulačky je nastavený tak, že pre ***kladné funkčné hodnoty*** získaš riešenie v intervale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Pre ***záporné funkčné hodnoty*** dostaneš výsledok z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Je to preto, lebo funkcie kotangens a tangens sú nepárne.

Ktorú vlastnosť funkcie kotangens využiješ, aby si vyjadril všetky riešenia?

Ž: *Funkcia kotangens je periodická s najmenšou periódou π. K nájdenému riešeniu pripočítam celočíselné násobky čísla π.*

U: Množina koreňov zadanej rovnice je:

$$\mathcal{K} = \{-1{,}27934 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Úloha : *Vyriešte v množine reálnych čísel rovnicu* $\sin x - 2\cos x = 0$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \{1{,}10715 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$