Vzorce pre polovičný argument

RNDr. Marián Macko

U: Vedel by si vypočítať hodnotu funkcie sínus pre argument rovný číslu $\frac{\pi}{8}$?

Ž: *Viem, že hodnota funkcie sínus pre číslo* $\frac{\pi}{4}$ *je* $\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Hodnota funkcie sínus pre argument rovný číslu* $\frac{\pi}{8}$ *by mohla byť polovica tejto hodnoty. Teda číslo* $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

U: Také jednoduché to nebude. Funkcia sínus nie je lineárna funkcia. Nespráva sa teda tak, že koľkokrát menšia je hodnota argumentu, toľkokrát je menšia funkčná hodnota. Vzorec, ktorý potrebujeme na vyriešenie zadanej úlohy, dokážeme odvodiť pre nás z už známych vzorcov. Jeden vzorec vyjadruje hodnotu funkcie kosínus pre dvojnásobný argument. Na jeho zápis použijeme premennú α.

Ž: *Hodnota funkcie kosínus pre dvojnásobok uhla* α *sa dá vyjadriť ako rozdiel druhých mocnín hodnôt funkcií kosínus a sínus uhla* α*:*

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

U: Druhé mocniny hodnôt funkcií kosínus a sínus sa vyskytujú aj v základnom vzorci

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Vyjadri odtiaľ výraz $\cos^2 \alpha$ a dosaď do vzorca pre dvojnásobný argument.

Ž: *Odčítam druhú mocninu funkcie sínus premennej* α. *Dostávam*

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha.$$

Dosadím do vzorca pre dvojnásobný agument

$$\cos 2\alpha = \left(1 - \sin^2 \alpha\right) - \sin^2 \alpha.$$

Po odstránení zátvoriek dostanem

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

U: Z poslednej rovnosti vyjadríme výraz $\sin \alpha$.

Ž: *Odčítam číslo* 1

$$\cos 2\alpha - 1 = -2\sin^2 \alpha,$$

a vydelím číslom -2

$$\frac{\cos 2\alpha - 1}{-2} = \sin^2 \alpha.$$

U: Znamienko mínus z menovateľa zlomku zohľadníme v čitateli. Potom platí

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ .$$

Nakoniec výrazy na oboch stranách rovnice odmocníme

$$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ .$$

Ž: *Prečo ste dali na ľavej strane* **absolútnu hodnotu***?*

U: Výraz $\sin^2\alpha$ nadobúda iba nezáporné hodnoty, tak ako odmocnina. Hodnoty výrazu $\sin\alpha$ však môžu byť aj záporné. Vieme, že platí $\sqrt{u^2} = |u|$.

Ž: *Dobre, porozumel som. Ešte mi vysvetlite, ako odvodený vzťah využiť na riešenie zadanej úlohy.*

U: Nie sme ešte na konci odvádzania vzorca. Potrebujeme pracovať s polovičnou hodnotou argumentu. Preto použijeme substitúciu. Namiesto premennej α použijeme výraz $\frac{x}{2}$. Potom $2\alpha = x$. Dosadíme a dostávame výsledný vzorec

$$\left|sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Ž: *Pochopil som správne, že absolútnu hodnotu výrazu* $|\sin\frac{x}{2}|$ *odstráním podľa toho, do ktorého* **intervalu** *patrí argument* $\frac{x}{2}$*?*

U: Áno. V našom príklade poznáme $\cos\frac{\pi}{4}$, preto hodnota $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8}$ a tá patrí do intervalu $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Pre takéto čísla je hodnota funkcie sínus kladná. Teda

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\ .$$

Ž: *Čiže, ak by napríklad* $\frac{x}{2}$ *bolo rovné číslu* $\frac{9\pi}{8}$*, tak hodnota funkcie sínus by bola* **záporná***, lebo pre argumenty z intervalu* $(\pi;\ 2\pi)$ *je hodnota funkcie sínus záporná. Potom by platilo*

$$\sin\frac{9\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{9\pi}{4}}{2}}\ .$$

U: Výborne. Určme ešte, pre ktoré hodnoty premennej x platí vzorec $\left|sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

Ž: *Výraz pod odmocninou musí nadobúdať nezáporné hodnoty. Teda*

$$\frac{1-\cos x}{2} \geqq 0.$$

U: Vynásobíme číslom 2 a dostávame

$$1-\cos x \geqq 0.$$

Ž: *Pripočítam výraz* $\cos x$*:*

$$1 \geqq \cos x.$$

Ale to **platí vždy***, lebo funkcia kosínus nadobúda hodnoty iba z uzavretého intervalu* $\langle -1;\ 1\rangle$.

U: Analogickým spôsobom by sme odvodili vzorec pre hodnotu funkcie kosínus polovičného argumentu. Dostali by sme

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Ž: *Aj tento vzorec platí pre všetky reálne čísla* x*?*

U: Riešenie podmienky je analogické. Hodnoty výrazu $\dfrac{1+\cos x}{2}$ pod odmocninou musia byť nezáporné. Teda

$$\frac{1+\cos x}{2} \geqq 0.$$

Ž: *Opäť vynásobíme číslom* 2*. Dostaneme*

$$1+\cos x \geqq 0.$$

Odčítame číslo jedna

$$\cos x \geqq -1.$$

A to **platí pre každé reálne číslo** x.

U: Odvodiť analogické vzorce pre funkcie tangens a kotangens už nebude problém. Ako je definovaná funkcia tangens?

Ž: *Hodnota funkcie tangens je daná podielom hodnôt funkcií sínus a kosínus:*

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

U: To isté platí aj pre polovičný argument

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,.$$

My máme vyjadrenia pre absolútnu hodnotu výrazov sínus a kosínus polovičného argumentu. Preto budeme vyjadrovať ***absolútnu hodnotu*** aj pre funkciu tangens. Platí

$$\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}\,.$$

Ž: *Po dosadení vzorcov pre hodnoty funkcií sínus a kosínus polovičného argumentu dostávame*

$$\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}\,.$$

Podiel odmocnín môžeme upraviť na odmocninu z podielu:

$$\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}}\,.$$

U: V zloženom zlomku sa dvojky vykrátia a výsledný vzorec bude

$$\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,.$$

Tento vzorec neplatí, ak výraz $1+\cos x$ je rovný nule.

Ž: *Čiže kosínus sa nesmie rovnať číslu -1. Hodnoty argumentu x patria do množiny reálnych čísel, okrem čísel v tvare $\pi + 2k\pi$, kde k je celé číslo.*

U: V závere uvedieme prehľad vzorcov pre polovičný argument.

$$\left|sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\ x \in \mathbb{R}$$

$$\left|cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\ x \in \mathbb{R}$$

$$\left|tg\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};\ x \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Príklad 1: *Bez použitia kalkulačky a tabuliek vypočítajte* $\sin\frac{\pi}{12}$.

U: Použijeme ***vzorec pre polovičný argument***:

$$\left|sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Zlomok $\frac{x}{2}$ je v našom prípade rovný číslu $\frac{\pi}{12}$. Aké je x?

Ž: *Dvakrát väčšie. Teda* $x = \frac{\pi}{6}$.

U: Druhá vec, ktorú si musíme uvedomiť, je do ktorého intervalu patrí argument $\frac{\pi}{12}$?

Ž: *Číslo* $\frac{\pi}{12}$ *patrí do intervalu* $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

U: Pre takéto číslo je hodnota funkcie sínus kladná. Preto môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Dostávame

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\ .$$

Pokračuj vo výpočtoch.

Ž: *Hodnota funkcie kosínus pre číslo* $\frac{\pi}{6}$ *je rovná číslu* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Túto hodnotu dosadím do vzorca a mám*

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\ .$$

U: Zlomky v čitateli zloženého zlomku pod odmocninou upravíme na ***spoločného menovateľa***. Je ním číslo 2. Takže máme

$$\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}\ .$$

Ž: *V menovateli zloženého zlomku si môžem predstaviť číslo* **dve jedniny**. *Preto upravím zložený zlomok tak, že súčin vonkajších výrazov zloženého zlomku predelím súčinom vnútorných výrazov. Potom*

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\ .$$

U: Keďže odmocnina zo zlomku sa dá zapísať ako podiel odmocniny z čitateľa a menovateľa, tak máme zlomok

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}}\ .$$

Ž: *Ale číslo* 4, *ktoré je v menovateli zlomku sa dá* **odmocniť**. *V menovateli zlomku tak dostaneme číslo* 2.

U: Správne. Výsledok úlohy bude zapísaný v tvare

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \ .$$

Úloha : *Bez použitia kalkulačky a tabuliek vypočítajte:* $\cos\left(-\frac{41\pi}{8}\right)$.

Výsledok: $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Príklad 2: *Bez použitia kalkulačky a tabuliek vypočítajte* $\sin\dfrac{x}{2}$, *ak platí:*

$\sin x = -0,8$ *a* $x \in \left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Ž: *Použil by som vzorec pre výpočet hodnoty funkcie sínus polovičného argumentu*

$$\left|sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

U: Do akého intervalu patria hodnoty $\dfrac{x}{2}$, ak podľa zadania vieme, že $x \in \left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$?

Ž: *Hodnoty budú polovičné. Preto patria do intervalu* $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

U: Tento interval je časťou intervalu $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$, v ktorom funkcia sínus nadobúda ***kladné hodnoty***. Teda $\sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$.

Ž: *Nepoznáme však hodnotu funkcie kosínus premennej* x.

U: Zadaná je ale hodnota funkcie sínus. Hodnoty týchto dvoch funkcií spolu súvisia. Spomenieš si na základný vzorec?

Ž: *Máte na mysli*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1?$$

U: Správne. Za $\sin x$ dosadíme zadanú hodnotu a vypočítame hodnotu funkcie kosínus.

$$(-0,8)^2 + \cos^2 x = 1$$

Pokračuj vo výpočtoch.

Ž: *Umocním a dostávam*

$$0,64 + \cos^2 x = 1.$$

Odpočítam číslo $0,64$

$$\cos^2 x = 1 - 0,64,$$

teda na pravej strane bude číslo $0,36$.

U: Výrazy na oboch stranách rovnice $\cos^2 x = 0,36$ odmocníme. Nesmieme zabudnúť, že odmocnina z druhej mocniny dá ***absolútnu hodnotu*** z daného výrazu. Preto

$$|\cos x| = 0,6.$$

Ž: *Na absolútnu hodnotu by som bol zabudol. Dobre, že ste to pripomenuli. Keďže x patrí do otvoreného intervalu* $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$*, bude hodnota funkcie kosínus* **záporná***:*

$$\cos x = -0,6.$$

U: Túto hodnotu stačí dosadiť do vzorca pre polovičný argument, výraz pod odmocninou upraviť a dostaneme výsledok, číslo $\sqrt{0,8}$.

$$\boxed{\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-(-0,6)}{2}} = \sqrt{\frac{1,6}{2}} = \sqrt{0,8}}$$

Úloha : *Bez použitia kalkulačky a tabuliek vypočítajte* $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$*, ak platí:*

$\sin x = -0,8$ *a* $x \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Výsledok: $\frac{1}{2}$

Príklad 3: *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\cos\frac{x}{2}+\sin x=0.$

U: Ukážeme si dva spôsoby riešenia tejto rovnice. Jednoduchší spôsob bude založený paradoxne nie na vzorci pre polovičný argument, ale na vzorci pre dvojnásobný argument. Stačí premenú x v argumente funkcie sínus napísať ako dvojnásobok hodnoty $\frac{x}{2}$. Potom dostávame

$$\cos\frac{x}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=0.$$

Ako sa dá vyjadriť $\sin 2\alpha$?

Ž: *Ide o vzorec pre hodnotu funkcie sínus dvojnásobného argumentu, a platí*

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

U: V našom prípade je premenná α rovná výrazu $\frac{x}{2}$. Po aplikácií vzorca dostávame

$$\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Skús upraviť výraz na ľavej strane rovnice.

Ž: *Oba sčítance obsahujú výraz* $\cos\frac{x}{2}$. *Preto na ľavej strane rovnice vyberiem tento výraz pred zátvorku a mám*

$$\cos\frac{x}{2}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

U: Kedy sa súčin dvoch výrazov rovná nule?

Ž: *Súčin dvoch výrazov je rovný nule, ak jeden alebo druhý výraz je rovný nule. Teda*

$$\cos\frac{x}{2}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=0\vee 1+2\sin\frac{x}{2}=0.$$

U: Vyriešime najskôr prvú rovnicu $\cos\frac{x}{2}=0$. Kedy nadobúda funkcia kosínus nulové hodnoty?

Ž: *Funkcia kosínus nadobúda nulové hodnoty, ak argument funkcie je* **nepárnym násobkom** *čísla* $\frac{\pi}{2}$.

U: To znamená, že v našom prípade platí $\frac{x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo. Ak rovnicu vynásobíme číslom dva, dostaneme jeden tvar riešení zadanej rovnice. Teda

$$x=(2k+1)\cdot\pi.$$

U: Poďme vyriešiť druhý prípad, keď $1+2\sin\frac{x}{2}=0$.

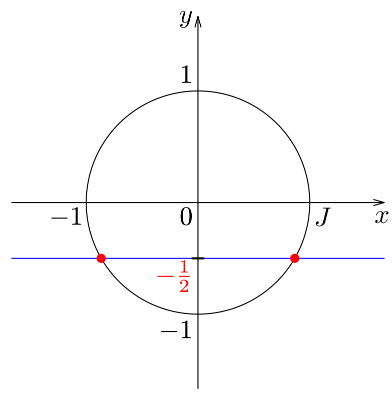
Ž: *Odčítam číslo jedna a predelím dvomi. Potom rovnica bude mať tvar* $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$. *Postup riešenia tejto rovnice však potrebujem pripomenúť.*

U: Pri riešení využijeme jednotkovú kružnicu. Stačí si uvedomiť, ktorú súradnicu bodov jednotkovej kružnice predstavuje hodnota funkcie sínus.

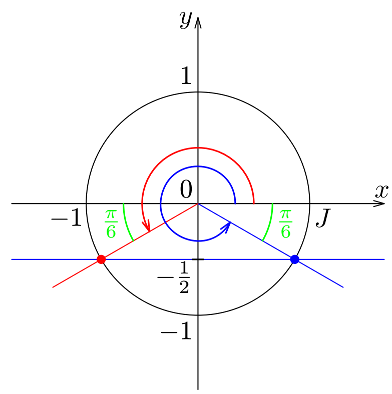
Ž: *To si pamätám. Podľa definície funkcie sínus je to* ***y-ová súradnica****.*

U: Tá má byť záporná, rovná číslu $-\frac{1}{2}$. V ktorých kvadrantoch ležia body na jednotkovej kružnici, ktorým prislúcha záporná y-ová súradnica?

Ž: *Sú to body v* ***III. a vo IV. kvadrante****.*



U: Ak si pamätáš, že funkcia sínus nadobúda hodnotu $\frac{1}{2}$ pre argument rovný číslu $\frac{\pi}{6}$, riešenie rovnice $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ nebude náročné. Hodnota argumentu $\frac{x}{2}$ zodpovedajúca bodu na jednotkovej kružnici v III. kvadrante sa vypočíta ako ***súčet čísel*** π a $\frac{\pi}{6}$. Bude teda rovná číslu $\frac{7\pi}{6}$. Pozri na obrázok.



Ž: *Už si spomínam. Riešenie zodpovedajúce bodu na jednotkovej kružnici, ktorý patrí do IV. kvadrantu vypočítam, ak od čísla 2π* ***odrátam*** *hodnotu $\frac{\pi}{6}$. Dostanem zlomok $\frac{11\pi}{6}$.*

U: Správne. Navyše vieme, že funkcia sínus je periodická s ***najmenšou periódou*** 2π. Preto vyjadrenie neznámej $\frac{x}{2}$ zodpovedajúce III. kvadrantu bude v tvare

$$\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

Hodnotu neznámej x dostaneme vynásobením výrazov na oboch stranách rovnice číslom dva, takže

$$x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi.$$

Vyjadri podobným spôsobom riešenie zodpovedajúce IV. kvadrantu.

Ž: *Pre tento prípad platí*

$$\frac{x}{2} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

Opäť vynásobím dvoma a dostávam

$$x = \frac{11\pi}{3} + 4k\pi.$$

U: Zhrnutím všetkých prípadov, ktoré sme vyriešili dostávame celkové riešenia zadanej rovnice. Obsahuje nekonečne veľa reálnych čísel, ktoré sa dajú vyjadriť jedným z troch tvarov.

$$\mathcal{K} = \left\{ (2k+1)\pi,\ \frac{7\pi}{3} + 4k\pi,\ \frac{11\pi}{3} + 4k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ž: *Spomenuli ste, že sa úloha dá vyriešiť aj iným spôsobom.*

U: Samotné zadanie rovnice ponúka myšlienku využiť vzorec pre hodnotu funkcie kosínus polovičného argumentu. Problém je v tom, že my potrebujeme hodnotu výrazu $\cos\frac{x}{2}$ a podľa vzorca vieme vyjadriť iba ***absolútnu hodnotu*** z tohto výrazu

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Preto výraz $\cos\frac{x}{2}$ nahradíme výrazom $\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Ž: *Dostaneme rovnicu*

$$\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} + \sin x = 0.$$

Vyzerá to čudne.

U: Možno čudne z toho dôvodu, že je zápisom dvoch rovníc. Vyriešiť ich však môžeme naraz. Odčítame výraz $\sin x$

$$\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sin x$$

a umocníme

$$\frac{1+\cos x}{2} = \sin^2 x.$$

Ž: *Budeme musieť asi prejsť k jednej funkcii, kosínus. Výraz* $\sin^2 x$ *nahradíme podľa základného vzorca* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *výrazom* $1 - \cos^2 x$. *Dostaneme rovnicu*

$$\frac{1+\cos x}{2} = 1 - \cos^2 x.$$

U: Rovnicu vynásobíme dvomi

$$1 + \cos x = 2 - 2\cos^2 x$$

a upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Neznámou kvadratickej rovnice nie je premenná x, ale výraz $\cos x$. Prezradím ti, že táto kvadratická rovnica má pre neznámy výraz $\cos x$ dve riešenia. Sú to čísla -1 ***a*** $\frac{1}{2}$.

Ž: *To znamená, že ďalej by sme riešili dve jednoduché goniometrické rovnice* $\cos x = -1$ **a** $\cos x = \frac{1}{2}$.

U: Áno. Nechávam ti to na samostatnú prácu. Dostaneš viac tvarov riešení, ako sme ich dostali pri prvej metóde riešenia. Je to preto, lebo umocňovanie, ktoré sme urobili nie je ekvivalentnou úpravou rovnice. Preto musíš urobiť skúšku správnosti. Dostaneš tak rovnaký výsledok ako pri prvej metóde.

Úloha : *V množine reálnych čísel vyriešte rovnicu* $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$.

Výsledok: $\mathcal{K} = \left\{2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 4k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 4k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Príklad 4: *Dokážte, že platí:* $1 - 2 \cdot \sin^2 \dfrac{x}{2} = \cos x$.

Ž: *Výraz* $\sin^2 \dfrac{x}{2}$ *mám chápať ako druhú mocninu výrazu* $\sin \dfrac{x}{2}$*?*

U: Áno, platí

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2.$$

Dokázať rovnosť znamená napríklad upraviť výraz na ľavej strane a porovnať s výrazom na pravej strane rovnosti. Ako by si upravoval výraz na ľavej strane?

Ž: *Môžem využiť iba vzorec pre hodnotu funkcie sínus polovičného argumentu*

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Ale vo vzorci je absolútna hodnota funkcie sínus.

U: Teda výraz $\sin \dfrac{x}{2}$ sa dá nahradiť buď výrazom $\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$, alebo výrazom $-\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$. Znamienko plus, respektíve mínus pred druhou odmocninou z hľadiska umocňovania nehrá žiadnu úlohu. V oboch prípadoch dostaneme po umocnení ten istý výraz. Dosaď a uprav.

Ž: *Po dosadení dostávam výraz*

$$1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\right)^2.$$

Druhá mocnina a druhá odmocnina sa navzájom rušia, preto dostávam

$$1 - 2 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1 - \cos x}{2}.$$

U: Vykrátime dvojky a dostávame

$$1 - (1 - \cos x).$$

Ž: *Teraz je to už ľahké. Odstránim zátvorku*

$$1 - (1 - \cos x) = 1 - 1 + \cos x.$$

Jednotky sa odčítajú a dostávam výraz $\cos x$,

$$1 - 1 + \cos x = \cos x.$$

U: Dostali sme výraz, ktorý je uvedený na pravej strane rovnosti. ***Teda rovnosť platí.***

U: Potrebujeme ešte overiť, či všetky nami prevedené úpravy vyhovovali pre každé reálne číslo x.

Ž: *Funkcie sínus a kosínus, s ktorými sme pri úprave výrazu pracovali, sú definované pre každé reálne číslo* x.

U: Máš pravdu, ale pri úprave výrazu sa vyskytol aj výraz $\frac{1-\cos x}{2}$ pod odmocninou. Ako vieme, pod odmocninou nemôže byť záporné číslo. Vyrieš preto pre tento prípad podmienku.

Ž: *Podmienka bude mať tvar*

$$\frac{1-\cos x}{2} \geqq 0.$$

Výrazy na oboch stranách nerovnice vynásobím číslom dva, znak nerovnice sa nezmení

$$1-\cos x \geqq 0.$$

U: K výrazom na oboch stranách nerovnice pripočítame výraz $\cos x$ a dostávame

$$1 \geqq \cos x.$$

Ž: *Táto podmienka platí pre každé reálne číslo x.*

U: Prečo?

Ž: *Lebo funkcia kosínus nadobúda hodnoty z uzavretého intervalu $\langle -1;\ 1\rangle$.*

U: Keďže iné podmienky pri úprave výrazu nevznikli, táto rovnosť platí pre ***všetky reálne čísla*** x.

Príklad 5: *Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí:* $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$ *a vzťah dokážte.*

U: Upravme najskôr výraz na ľavej strane rovnosti. V čitateli aj v menovateli zlomku sa nachádza výraz $\sin 2x$. Vieš ho vyjadriť v inom tvare?

Ž: *Pamätám si, že* $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. *Dosadím do výrazu na ľavej strane zadanej rovnosti a dostávam*

$$\frac{2\sin x - 2\sin x\cos x}{2\sin x + 2\sin x\cos x}.$$

U: Vo výrazoch v čitateli, aj menovateli zlomku sa vyskytuje výraz $2\sin x$, ktorý vyberieme pred zátvorku

$$\frac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)}.$$

Ž: *Čiže výrazy* $2\sin x$ *môžeme vykrátiť a dostávame*

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Ako z tohto výrazu dostaneme druhú mocninu hodnoty funkcie tangens?

U: Existuje viacero spôsobov dôkazu rovnosti. Zatiaľ sme ukázali, že výraz na ľavej strane rovnosti sa dá upraviť na tvar

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Skúsme upraviť výraz $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$, ktorý je na pravej strane rovnosti.

Ž: *Netuším ako. Budete mi musieť poradiť.*

U: Na úpravu tohto výrazu využijeme menej známy vzorec pre absolútnu hodnotu funkcie tangens polovičného argumentu. Platí totiž

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Ž: *Dobre, ale my potrebujeme tangens, nie jeho absolútnu hodnotu.*

U: V poriadku. Vo výraze $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$, do ktorého budeme dosadzovať, je druhá mocnina hodnoty funkcie tangens. Druhá mocnina, podobne ako absolútna hodnota, dáva ako výsledky iba ***nezáporné čísla***. Nezáleží na tom, či tangens argumentu $\dfrac{x}{2}$ bude mať kladnú alebo zápornú hodnotu. Výsledok bude vždy kladný. Preto

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \left(\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2.$$

Ž: *Už to vidím. Dostaneme to isté, čo pri úprave výrazu na ľavej strane. Mocnina a odmocnina sa rušia. Dostaneme*

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Rovnosť platí.

U: V poriadku. Určme ešte podmienky pre definičný obor výrazov v danej rovnosti.

Ž: *Výraz* $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ *musí nadobúdať* **nezáporné hodnoty**.

U: Hodnoty funkcie kosínus patria do uzavretého intervalu $\langle -1;\ 1\rangle$. Preto výrazy $1-\cos x$ a $1+\cos x$ nadobúdajú nezáporné hodnoty. Podiel týchto výrazov nikdy nedá záporné číslo. Vyriešime akurát podmienku, kedy menovateľ $1+\cos x$ zlomku je rôzny od nuly.

Ž: *V tom prípade výraz* $\cos x$ *je rôzny od čísla* -1*. To platí vtedy, keď* x *je rôzne od čísel v tvare* $\pi + 2k\pi$*.*

U: Ďalšia podmienka vznikla pri úprave zlomku na ľavej strane. Výraz $2\sin x(1+\cos x)$, ktorý je v menovateli zlomku, musí byť rôzny od nuly. Kedy je súčin dvoch výrazov rôzny od nuly?

Ž: *Súčin dvoch výrazov je rôzny od nuly, ak každý z výrazov je rôzny od nuly. V našom prípade výrazy* $\sin x$ *a* $1+\cos x$ *majú byť rôzne od nuly. Ale pre druhý výraz sme už podmienku riešili.*

U: Vyriešime teda poslednú podmienku $\sin x \neq 0$.

Ž: *To platí, ak* x *je rôzne od čísel v tvare* $k\pi$*, kde* k *je celé číslo.*

U: Tento výsledok zohľadňuje aj predtým vyriešenú podmienku. Teda rovnosť dvoch zadaných výrazov platí pre ***všetky reálne čísla*** x***, okrem celočíselných násobkov čísla*** π.

Príklad 6: *Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí:* $\dfrac{\mathrm{tg} x + \sin x}{\mathrm{tg} x - \sin x} = \mathrm{cotg}^2 \dfrac{x}{2}$ *a vzťah dokážte.*

U: Začnime upravovať výraz na ľavej strane rovnosti. Hodnotu funkcie tangens vieme na základe definície tejto funkcie vyjadriť pomocou funkcií sínus a kosínus.

Ž: *Tangens je definovaný ako podiel týchto funkcií, teda platí*

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Dosadím do výrazu na ľavej strane zadania

$$\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \sin x}{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}.$$

U: Výrazy v čitateli, aj v menovateli zloženého zlomku upravíme na ***spoločného menovateľa***. Je ním výraz $\cos x$. Preto máme

$$\frac{\dfrac{\sin x + \sin x \cos x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x}}.$$

Pokračuj v ďalších úpravách.

Ž: *Zložený zlomok zjednoduším. V čitateli jednoduchého zlomku bude súčin vonkajších výrazov zloženého zlomku a v menovateli súčin vnútorných výrazov zloženého zlomku*

$$\frac{\cos x(\sin x + \sin x \cos x)}{\cos x(\sin x - \sin x \cos x)}.$$

Kosínusy sa vykrátia a dostaneme výraz

$$\frac{\sin x + \sin x \cos x}{\sin x - \sin x \cos x}.$$

U: Oba členy vo výraze v čitateli obsahujú $\sin x$. Tento výraz vyberieme pred zátvorku. To isté urobíme s výrazom v menovateli zlomku.

$$\frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)}.$$

Ž: *Výraz na ľavej strane rovnosti ešte* **vykrátime** *a máme zlomok* $\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$.

U: Pri úprave výrazu $\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}$ využijeme vzorec pre absolútnu hodnotu funkcie kotangens polovičného argumentu

$$\left|\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$$

Navyše si uvedomíme, že

$$\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} = \left(\left|\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right|\right)^2,$$

lebo druhá mocnina z navzájom opačných reálnych čísel je to isté reálne číslo. Tú istú vlastnosť má absolútna hodnota reálneho čísla. Dosaď do výrazu na pravej strane zadanej rovnosti a uprav.

Ž: *Po dosadení dostávam*

$$\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} = \left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)^2 = \frac{1+\cos x}{1-\cos x},$$

lebo druhá mocnina a druhá odmocnina sa navzájom rušia.

U: Dostali sme ten istý výraz, ako pri úprave ľavej strany zadanej rovnosti. Rovnosť teda platí.

U: Teraz určme podmienky.

Ž: *Výraz* $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ *musí nadobúdať* ***nezáporné hodnoty****.*

U: Hodnoty funkcie kosínus patria do uzavretého intervalu $\langle -1;\ 1\rangle$. Preto výrazy $1+\cos x$ a $1-\cos x$ nadobúdajú nezáporné hodnoty. Podiel týchto výrazov nikdy nedá záporné číslo. Vyriešime akurát podmienku, kedy menovateľ $1-\cos x$ zlomku je ***rôzny od nuly***.

Ž: *V tom prípade výraz* $\cos x$ *je rôzny od čísla jedna. To platí vtedy, keď* x *je rôzne od čísel v tvare* $2k\pi$*, kde* k *je celé číslo.*

U: Ďalšia podmienka vznikla pri úprave zlomku na ľavej strane. Výraz $\sin x(1-\cos x)$, ktorý je v menovateli zlomku, musí byť rôzny od nuly. Kedy je súčin dvoch výrazov rôzny od nuly?

Ž: *Súčin dvoch výrazov je rôzny od nuly, ak každý z výrazov je rôzny od nuly. V našom prípade výrazy* $\sin x$ *a* $1-\cos x$ *sú rôzne od nuly. Ale pre druhý výraz sme už podmienku riešili.*

U: Vyriešime teda podmienku $\sin x \neq 0$.

Ž: *To platí, ak* x *je rôzne od čísel v tvare* $k\pi$*, kde* k *je celé číslo.*

U: Ostáva posledná podmienka. Vo výraze sa vyskytuje funkcia tangens. Vieme, že nie pre všetky reálne čísla je táto funkcia definovaná.

Ž: *Funkcia tangens je daná podielom hodnôt funkcií sínus a kosínus. Teda výraz* $\cos x$ *musí byť* **rôzny od nuly***.*

U: To platí, ak hodnoty argumentu x sú rôzne od čísel v tvare $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo.

Ž: *A to je asi všetko.*

U: Áno. Podmienky $x \neq k\pi$ a $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ môžeme spojiť do jednej podmienky. Má tvar $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Teda rovnosť dvoch zadaných výrazov platí pre ***všetky reálne čísla x, okrem celočíselných násobkov čísla $\dfrac{\pi}{2}$***.